VISIT…

98
621(083)
С-741

СПРАВОЧНИК МАШИНОСТРОИТЕЛЯ

В ШЕСТИ ТОМАХ

13673

Том I

Главный редактор тома
д-р техн. наук проф. *Н. С. АЧЕРКАН*

*Издание второе,
исправленное и дополненное*

П/Я. 80

МАШГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1956

621 (083)

АВТОРЫ ТОМА

В. С. ЛЮКШИН, канд. физ.-мат. наук, Н. Я. НИБЕРГ, канд. техн. наук, А. Н. ОБМОРШЕВ, д-р техн. наук, И. С. ПЛУЖНИКОВ, канд. физ.-мат. наук.

Редактор инж. **М. Е. Маркус**

Редактор графических работ инж. **В. Г. Карганов**

Редакция справочной литературы
Зав. редакцией инж. М. Е. Маркус

Адрес редакции: *Москва, Третьяковский пр., д. 1, Машгиз*

СОДЕРЖАНИЕ

От издательства VII

МАТЕМАТИКА

Глава I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин* и канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 1

Математические обозначения 1
Математические таблицы 6

Глава II. ДЕЙСТВИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 62

Вещественные числа 62
О погрешностях и округлении приближенных чисел 65
Оценка точности результатов вычислений 66
Приближенные вычисления без точного учета погрешностей 67
Сокращенное умножение 67
Сокращенное деление 69
Сокращенное извлечение квадратного корня 69
Вычисления с малыми числами и с числами, мало отличающимися от единицы . . 69
Непрерывные (цепные) дроби 71
Действия со степенями 74
Действия с корнями 75
Логарифмы 76
Соединения 79
Конечные ряды 80
Пропорции 82
Проценты 84
Комплексные числа и действия с ними . . 84

Глава III. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 87

Понятие о функции 87
Целая рациональная функция 87
Степенная функция 89
Рациональная функция 90
Функции алгебраические и трансцендентные 90
Обратные функции 91
Показательная и логарифмическая функции 91
Тригонометрические функции 91
Формулы плоской тригонометрии (гониометрия) 94
Синусоидальные величины и их графики 97
Обратные тригонометрические функции 99
Гиперболические функции 100

Глава IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ФИГУР (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 102

Числовые зависимости между элементами фигур 102
Вычисление периметров и площадей плоских фигур 106
Вычисление поверхностей и объемов тел 108
Зависимости между тригонометрическими функциями углов треугольника . . 112
Основные случаи решения треугольников 112
Решение сферических треугольников . . . 114

Глава V. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 115

Определители и применение их к решению линейных систем 115
Алгебраические уравнения 118
Трансцендентные уравнения 121
Отделение корней 123
Графическое решение уравнений 124
Численное решение уравнений 125
Приближенное решение систем линейных уравнений 128
Приближенное решение алгебраических уравнений по методу Н. И. Лобачевского 129

Глава VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 134

Основные понятия теории пределов . . . 134
Основные понятия дифференциального исчисления 136
Формулы дифференцирования 139
Основные теоремы дифференциального исчисления 141
Раскрытие неопределенностей 142
Графическое дифференцирование 143
Функции многих переменных и их дифференцирование 143
Дифференцирование неявных функций . . 146
Определение экстремальных значений функции 147

Числовые ряды и иссследование их сходимости 149
Функциональные ряды; разложение функций в бесконечные ряды 151

Глава VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 154
Неопределенный интеграл и его свойства 154
Основные методы интегрирования 155
Интегрирование рациональных функций 156
Интегрирование иррациональных функций 160
Интегрирование элементарных трансцендентных функций 161
Таблица неопределенных интегралов . . . 165
Определенный интеграл и его свойства . . 172
Несобственные интегралы 174
Интегралы Эйлера 178
Таблица определенных интегралов 178
Приближенное вычисление определенных интегралов 182
Графическое интегрирование 183
Кратные интегралы 184
Криволинейный интеграл 186
Интеграл по поверхности 187
Приложения интегрального исчисления к геометрии и механике 189
Интеграл Стильтьеса 192

Глава VIII. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (канд. физ.-мат. наук *И. С. Плужников*) 194
Основные понятия 194
Элементарные функции комплексного переменного 195
Дифференцирование функций комплексного переменного 196
Интеграл по комплексному переменному 196
Разложение аналитической функции в степенной ряд 197
Особые точки однозначной функции . . . 199
Вычеты аналитической функции 200
Конформные отображения 201

Глава IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 206
Обыкновенные уравнения 1-го порядка . . 206
Обыкновенные уравнения высших порядков и системы уравнений 213
Операционное исчисление 218
Специальные функции 221
Дифференциальные уравнения в частных производных 224

Глава X. ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 226
Векторная алгебра 226
Векторный анализ 230
Тензоры 234

Глава XI. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) . . 238
Аналитическая геометрия на плоскости . . 238
Аналитическая геометрия в пространстве 249

Глава XII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 258
Плоские кривые 258
Пространственные кривые 282
Теория поверхностей 293

Глава XIII. РАЗНОСТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 301
Конечные разности 301
Интерполирование 303

Глава XIV. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) . . 305

Глава XV. НОМОГРАФИЯ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 314
Сетчатые номограммы 315
Номограммы из выравненных точек . . . 318

Глава XVI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 321
Основные понятия и теоремы 321
Употребительные законы распределения 323
Вероятностные характеристики 326
Закон больших чисел и предельная теорема 328
Теория ошибок и способ наименьших квадратов 330
Способ наименьших квадратов 332

Глава XVII. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ (канд. физ.-мат. наук *В. С. Люкшин*) 336
Логарифмическая линейка 336
Арифмометр 340
Планиметры и интеграторы 342
Автоматическая вычислительная машина с пропорциональным рычагом 343
Полуавтоматическая вычислительная машина Точмаш, модель КЕВ 347
Вычислительные машины ВК 348

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ К РАЗДЕЛУ „МАТЕМАТИКА" 349

МЕХАНИКА

Глава XVIII. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (д-р техн. наук *А. Н. Обморшев*) 352
Статика 352
Геометрическая статика 352
Центр тяжести 359
Графостатика 364
Аналитическая статика 366

Кинематика 369
Кинематика точки 369
Относительное движение точки 374
Кинематика твердого тела 375
Общий случай движения твердого тела . . 381
Сложение скоростей при сложном движении твердого тела 381
Динамика 382
Механические единицы 382
Динамика точки 383
Динамика системы 388
Моменты инерции 392
Динамика твердого тела 396
Динамика тела переменной массы 399
Удар 402

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Глава XIX. ОБЩАЯ ЧАСТЬ (канд. техн. наук *Н. Я. Ниберг*) 407
Структура и классификация механизмов 407
Кинематика плоских механизмов 413
Кинетостатика плоских механизмов . . . 418
Динамика механизмов и машин 424
Потери в механизмах и коэффициент полезного действия 429
Трение в механизмах 433
Износ деталей в механизмах 438
Основы теории точности механизмов . . . 444
Проектирование плоских механизмов . . . 447

Глава XX. СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ (канд. техн. наук *Н. Я. Ниберг*) 451
Механизмы с одними поступательными парами 451
Плоские шарнирные механизмы 453
Плоские механизмы с вращательными и поступательными парами 470
Винтовые механизмы с соосным расположением кинематических пар 488
Зубчатые механизмы 492
Кулачковые механизмы 513
Прочие механизмы 525

Приложение. МЕРЫ И ЕДИНИЦЫ 533

ПРЕДМЕТНЫЙ АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ (*С. Л. Хасьминский*) 545

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

При подготовке второго издания „Справочника машиностроителя" были по возможности учтены замечания и предложения читателей по первому изданию. Весь материал был внимательно проверен, ряд глав подвергнут более или менее значительной переработке, некоторые главы написаны заново, к другим сделаны существенные добавления.

Материалы, мало или редко используемые в практике работы машиностроителя, конструктора и технолога, в новое издание справочника не включены.

Устранены замеченные опечатки и ошибки в тексте и фигурах; неясные или неудачно исполненные фигуры заменены новыми.

В соответствии с пожеланиями многих читателей новое издание „Справочника машиностроителя" выходит в шести томах, что сделает более удобным пользование справочником.

В первом томе даны сведения по математике, теоретической механике и теории машин и механизмов.

Во второй том включены справочные данные по теплотехнике, химии, оптике, акустике и гидравлике.

Третий том посвящен расчетам на прочность.

В четвертом томе даны сведения по расчету и конструированию деталей машин.

Пятый том содержит сведения по технологии, необходимые конструкторам при проектировании деталей машин.

В шестой том включены данные по машиностроительным материалам.

По всем вопросам, которые возникнут у читателей при пользовании „Справочником", просим обращаться в Государственное научно-техническое издательство „Машгиз" по адресу: Москва, Третьяковский пр., д. 1.

ГЛАВА I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Стандартные

Обозначение соотношений

$=$ равно
$\equiv$ тождественно равно или тождественно
$\neq$ не равно
$\approx$ приближенно равно
$<$ меньше
$>$ больше
$\leqslant$ меньше или равно
$\geqslant$ больше или равно
$\ll$ мало сравнительно с (значительно меньше)
$\gg$ велико сравнительно с (значительно больше).

Алгебра

$|a|$ абсолютная величина числа a
$+$ (плюс) сложение
$-$ (минус) вычитание
$\cdot$ или $\times$ умножение, например $a \cdot b$ или $a \times b$ или ab (знак умножения часто опускается)
: или — деление, например $a : b$ или $\frac{a}{b}$
% процент
‰ промилле ($2‰ = 0{,}002$)
a^m a в степени m
$\sqrt{\ }$ квадратный корень
i квадратный корень из -1; $i = \sqrt{-1}$
$\sqrt[m]{\ }$ корень степени m при $m \neq 2$
$\log_b$ логарифм при основании b. Если нет надобности указывать основание, то пишут log
lg логарифм при основании 10 (обыкновенный или десятичный логарифм)
ln логарифм при основании $e = 2{,}71828\ldots$ (натуральный логарифм)
( ), [ ], { } скобки
$n!$ факториал; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Геометрия

$\perp$ перпендикулярно
$\parallel$ параллельно
$\#$ равно и параллельно
$\sim$ подобно
AB — отрезок прямой между точками A и B. Это же обозначение употребляется для отрезка, которому приписывается направление от точки A к точке B
$\overline{AB}$ — тот же отрезок, если необходимо отличить его от произведения AB
$\triangle$ треугольник: $\triangle ABC$
$\angle$, $\sphericalangle$ плоский угол
$\smile$ или $\frown$ дуга: $\smile AB$, $\overset{\frown}{AB}$
° градус, ′ минута, ″ секунда — при обозначении величины плоского угла или дуги

Если обозначение ° (градус), ′ (минута) или ″ (секунда) относится к числу, содержащему десятичную дробь, то оно ставится над запятой, например, $6°5',27$; $8°4'2'',9$.

При обозначении величины угла отвлеченным числом подразумевается, что это число есть отношение данного угла к радиану; радиан есть центральный угол, длина дуги которого равна радиусу; радиан $= \frac{180°}{\pi} = 57°,29578\ldots$

π — отношение длины окружности к диаметру.

Тригонометрические и гиперболические функции

sin синус
cos косинус
tg тангенс
ctg котангенс
sec секанс
cosec косеканс
arcsin арксинус ($y = \arcsin x$; y есть дуга, синус которой равен x) (см. стр. 99)

arccos арккосинус
arctg арктангенс
arcctg арккотангенс
sh синус гиперболический
ch косинус гиперболический
th тангенс гиперболический
cth котангенс гиперболический
Arsh area-синус гиперболический (см. стр. 101)
Arch area-косинус гиперболический
Arth area-тангенс гиперболический
Arcth area-котангенс гиперболический.

Для обозначения степени тригонометрической или гиперболической функции показатель степени ставится при знаке функции; например, $\sin^2 x$ (синус квадрат икс) есть $(\sin x)^2$; $\mathrm{th}^3 \varphi$ (тангенс гиперболический куб фи); $\mathrm{arctg}^2 x$ и т. д.

Математический анализ

$a, b, c, \ldots$ постоянные величины (применяются преимущественно первые буквы латинского алфавита)

$x, y, z, u, \ldots$ переменные величины (применяются преимущественно последние буквы латинского алфавита)

$f(), \varphi(), F(), \Phi(), \ldots$ функции одного или нескольких аргументов; например $f(x)$, $F(x, y, z)$

const постоянное

∞ бесконечность

lim предел

$\to$ стремится к . . . , например

$$x \to a, \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Δ приращение (греческая прописная буква дельта)

δ вариация (греческая строчная буква дельта)

d дифференциал

$', '', ''', ^{IV}, ^{V}$ обозначения последовательных производных от функции одного переменного, например

$$f'(x), y', y^{IV}, f^{V}(x)$$

Если порядок производной обозначается буквой или арабской цифрой, то эта буква или цифра ставится в скобки; например $f^{(5)}(x)$, $f^{(a)}(y)$

$\frac{d}{dx}$ первая производная функции одного переменного; например $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$

$\frac{d^n}{dx^n}$ производная n-го порядка $(n > 1)$ функции одного переменного; например $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$

$f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}$
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$
} частные производные функции f нескольких переменных $x, y, z \ldots$ по соответствующим переменным

$\sum$ сумма; например

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$\int$ интеграл

$\int_a^b$ определенный интеграл с нижним пределом a и верхним пределом b

$\prod$ произведение; например,

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Нестандартные

$j = \sqrt{-1}$ употребляется в электротехнике (чтобы не смешивать с силой тока i)

$R(z)$ или Rez действительная часть комплексного числа z

$I(z)$ или Imz мнимая часть комплексного числа z

$\bar{z}$ комплексное число, сопряженное с z; например $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$[a]$ или $E(a)$ целая часть числа a; например

$$E(\pi) = 3;\ E(0{,}07) = 0;\ \left[-\frac{1}{2}\right] = -1$$

$\rightrightarrows$ равномерно сходится, например $f(x) \rightrightarrows f(x)$

$\exp x = e^x$, например вместо $e^{-\int P dx}$ можно написать $\exp\left(-\int P dx\right)$

$\mathrm{sgn}\, x$ обозначает функцию

$$y = \mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$0(\varphi(x)) = f(x)$ при $x \to a$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0$ при $x \to a$

$0(\varphi(x)) = f(x)$ при $x \to a$ означает, что $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ограничено при $x \to a$

$n!!$ произведение натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним четности; например

$$12!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$
$$11!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$$

$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$ — число сочетаний из n элементов по m

Arcsin, Arccos, Arctg, Arcctg обозначают многозначные обратные тригонометрические функции (см. стр. 99)

D знак производной; например $Dy = y'$

D^n знак производной n-го порядка $(n \neq 1)$; например $D^n y = y^{(n)}$

$\dot{}$, $\ddot{}$, $\dddot{}$, . . . последовательные производные функции по переменному t; например

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

и т. д.

d, d^2, d^n дифференциал 1-го, 2-го, n-го порядка

d_x, d_y и т. д. частный дифференциал; например $d_x z$

$\Big|_a^b$ знак двойной подстановки; например

$$\Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

$\int_S$, $\int_V$ интеграл, распространенный на площадь S, на объем V

$\iint_S$ двойной интеграл, распространенный на область S

$\iiint_V$ тройной интеграл, распространенный на область V

$\int\int \ldots \int$ многократный интеграл

$\int_{AB}$, $\int_L$ интеграл, взятый по кривой AB, по кривой L

$\oint_L$ интеграл, взятый по замкнутому контуру L

$\succ$ следует за; например $b \succ a$—элемент b следует за элементом a

$\prec$ предшествует; например $a \prec b$—элемент a предшествует элементу b

$\in$ принадлежит; например $a \in A$—элемент a принадлежит множеству A

$\supset$ содержит; например $D \supset \delta$—область D содержит область δ

$\subset$ влечет за собой; например $A \subset B$—событие A влечет за собой событие B

$\cap$ совмещение событий; $A \cap B$ читается: A и B

$\cup$ объединение событий; $A \cup B$ читается: A или B.

Векторное исчисление

Векторы обозначаются латинскими буквами жирного шрифта как прописными, так и строчными, а также латинскими буквами нежирного шрифта с чертой или со стрелкой над ними, например $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$, $\bar{u}$, $\bar{A}$, $\bar{a}$, $\bar{\omega}$, $\vec{a}$, $\vec{A}$

$\overline{AB}$ вектор, начало которого в точке A, конец в точке B

$\boldsymbol{A}^0$, $\boldsymbol{a}^0$, $\bar{\omega}^0$ единичные векторы соответственно того же направления, что и векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$, $\bar{\omega}$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей прямоугольной системы координат

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные векторы осей любой прямолинейной системы координат

$\boldsymbol{n}$ единичный вектор нормали к поверхности или главной нормали кривой

$u = |\boldsymbol{u}|$, $\bar{u} = |\bar{u}|$, $\omega = |\bar{\omega}|$ длина (абсолютное значение) вектора

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ равенство, сложение (сумма), вычитание (разность) векторов

$m\boldsymbol{A}$, $x\boldsymbol{i}$ произведение скаляра на вектор

$\boldsymbol{AB}$ скалярное произведение двух векторов (*точка между сомножителями не допускается*)

$\boldsymbol{A}^2$ скалярное произведение вектора на самого себя

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ или $[\boldsymbol{AB}]$ векторное произведение двух векторов (*точка между сомножителями не допускается*)

$\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{BC}]$ — векторно-скалярное произведение

$[[\boldsymbol{AB}]\boldsymbol{C}]$ или $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ — двойное векторное произведение.

Для обозначения порядка действий применяются дугообразные скобки, например $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$; $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, $[(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}]$

Скалярный множитель при векторе может быть отделен от него точкой, например $(AB)C = AB \cdot C$.

A_l составляющая (компонента) вектора A по направлению l

A_x, A_y, A_z составляющие вектора A по осям x, y, z прямоугольной системы координат; $A = A_x + A_y + A_z$

A_1, A_2, A_3 составляющие вектора A по осям x_1, x_2, x_3 любой системы координат; $A = A_1 + A_2 + A_3$

A_l проекция (скаляр) вектора A по направлению l

A_x, A_y, A_z проекции вектора A по осям x, y, z прямоугольной системы координат; $A_x i = A_x$ и т. д.

В особых случаях проекции вектора по осям координат могут обозначаться тремя различными латинскими или греческими буквами нежирного шрифта. Например, $r = xi + yj + zk$

∇ дифференциальный оператор

$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ (набла)

$\operatorname{grad}\varphi$ градиент скалярной функции φ $(\equiv \nabla\varphi)$

$\operatorname{div} A$ расхождение (дивергенция) вектора A $(\equiv \nabla A)$

$\operatorname{rot} A$ вихрь (ротор) вектора A $(\equiv [\nabla A]$ или $\nabla \times A)$

Δ или ∇^2 оператор Лапласа, действующий на скалярное или векторное поле

$\frac{\partial\varphi}{\partial l} \equiv l^0 \nabla\varphi$ производная скаляра по данному направлению l

$\frac{\partial A}{\partial l}$ производная вектора по данному направлению l

$\operatorname{Grad}\varphi$, $\operatorname{Div} A$, $\operatorname{Rot} A$ поверхностные (на поверхностях разрыва) градиент, дивергенция, ротор.

Для ограничения действия оператора ∇ применяются дугообразные скобки. Например, в выражении $(\nabla A)B$ оператор ∇ действует только на A.

Теория ошибок (погрешностей) измерения (стандартные)

Общая часть

X истинное значение измеряемой величины

$x, y, z, u, t, \ldots$ искомые значения измеряемых величин

n число произведенных измерений

l_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) результаты отдельных измерений одной и той же величины

p_i (где $i = 1, 2, 3, \ldots n$) веса измеренных значений величины

$q_i = \frac{1}{p_i} (i = 1, 2, 3, \ldots n)$ обратные веса измеренных значений величины

L среднее арифметическое из равноточных измерений

L_0 общая арифметическая середина или среднее взвешенное из неравноточных измерений

$$\left.\begin{aligned} [l] &= l_1 + l_2 + \ldots + l_n \\ [ab] &= a_1b_1 + a_2b_2 + \\ &+ \ldots + a_nb_n \\ [abp] &= a_1b_1p_1 + \\ &+ a_2b_2p_2 + \ldots + \\ &+ a_nb_np_n \\ \left[\frac{ab}{p}\right] &= \frac{a_1b_1}{p_1} + \frac{a_2b_2}{p_2} + \\ &+ \ldots + \frac{a_nb_n}{p_n} \end{aligned}\right\}$$

Сумма каких угодно однотипных выражений, состоящих из одних и тех же букв с разными индексами: $1, 2, 3, \ldots, n$ (обозначение по Гауссу)

$\Delta_i (= l_i - X)$ (где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) — случайная ошибка (погрешность) измерения (случайное отклонение от истинного значения)

θ систематическая ошибка (погрешность) измерения

$v_i (= l_i - L)$ (где $i = 1, 2, 3, \ldots n$) — отклонение отдельного измерения от среднего арифметического

$\vartheta \left(= \frac{[|\Delta|]}{n}\right)$ средняя арифметическая ошибка ряда измерений

m или $\sigma \left(= \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\right)$ средняя квадратическая ошибка ряда измерений

Δ_{lim} предельная ошибка или наибольшая возможная ошибка ряда измерений

$\rho (= 0{,}6745m)$ вероятная ошибка ряда измерений

M или $S \left(= \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$ — средняя квадратическая ошибка арифметической середины (результатора)

$\mu \left(= \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}\right)$ средняя квадратическая ошибка единицы веса

d случайная ошибка разности двойных измерений.

Способ наименьших квадратов

a_i, b_i, c_i, d_i, . . . коэффициенты при неизвестных в уравнениях ошибок или в условных уравнениях.

l свободный член в уравнениях ошибок и в условных уравнениях

W невязка в условных уравнениях

(1), (2), (3), (4), . . . поправки к измеренным величинам (арабские цифры в круглых скобках)

k коррелата

$S_i (= a_i + b_i + c_i + \ldots + l_i)$ суммы коэффициентов и свободных членов уравнений ошибок.

Латинский алфавит

Aa — а	Nn — эн
Bb — бэ	Oo — о
Cc — цэ	Pp — пэ
Dd — дэ	Qq — ку
Ee — е	Rr — эр
Ff — эф	Ss — эс
Gg — ге (же)	Tt — тэ
Hh — ха (аш)	Uu — у
Ii — и	Vv — вэ
Jj — йот (жи)	Ww — дубль-ве
Kk — ка	Xx — икс
Ll — эль	Yy — игрек
Mm — эм	Zz — зет

Греческий алфавит

Αα — альфа	Νν — ни
Ββ — бэта	Ξξ — кси
Γγ — гамма	Οο — омикрон
Δδ — дельта	Ππ — пи
Εε — эпсилон	Ρρ — ро
Ζζ — дзэта	Σσ — сигма
Ηη — эта	Ττ — тау
Θϑθ — тэта	Υυ — ипсилон
Ιι — йота	Φφ — фи
Κκ — каппа	Χχ — хи
Λλ — ламбда	Ψψ — пси
Μμ — ми	Ωω — омега

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

ТАБЛИЦА 1. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ И ИХ ЛОГАРИФМЫ

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1415926536	0,49715	$\frac{1}{\pi}$	0,3183098862	$\bar{1}$,50285
2π	6,283185	0,79818	$\frac{1}{2\pi}$	0,159155	$\bar{1}$,20182
3π	9,424778	0,97427	$\frac{1}{3\pi}$	0,106103	$\bar{1}$,02573
4π	12,566371	1,09921	$\frac{1}{4\pi}$	0,079577	$\bar{2}$,90079
$\frac{\pi}{2}$	1,570796	0,19612	$\frac{2}{\pi}$	0,636620	$\bar{1}$,80388
$\frac{\pi}{3}$	1,047198	0,02003	$\frac{3}{\pi}$	0,954930	$\bar{1}$,97997
$\frac{\pi}{4}$	0,785398	$\bar{1}$,89509	$\frac{4}{\pi}$	1,273240	0,10491
$\frac{\pi}{6}$	0,523599	$\bar{1}$,71900	$\frac{6}{\pi}$	1,909859	0,28100
$\frac{\pi}{8}$	0,392699	$\bar{1}$,59406	$\frac{8}{\pi}$	2,546479	0,40594
$\frac{\pi}{12}$	0,261799	$\bar{1}$,41797	$\frac{12}{\pi}$	3,819719	0,58203
$\frac{\pi}{16}$	0,196350 ($\approx 0{,}2$)	$\bar{1}$,29303	$\frac{16}{\pi}$	5,092958	0,70697
$\frac{\pi}{30}$	0,104720 ($\approx 0{,}105$)	$\bar{1}$,02003	$\frac{30}{\pi}$	9,549297	0,97997
$\frac{\pi}{32}$	0,098175 ($\approx 0{,}1$)	$\bar{2}$,99200	$\frac{32}{\pi}$	10,185916	1,00800
$\frac{\pi}{60}$	0,052360	$\bar{2}$,71900	$\frac{60}{\pi}$	19,098593	1,28100
$\frac{\pi}{64}$	0,049087 ($\approx 0{,}05$)	$\bar{2}$,69097	$\frac{64}{\pi}$	20,371833	1,30903
$\frac{\pi}{90}$	0,034907	$\bar{2}$,54291	$\frac{90^\circ}{\pi}$	28°,617890	1,45709
$\frac{\pi}{180}$	0,017453	$\bar{2}$,24188	$\frac{180^\circ}{\pi}$	57°,295780	1,75812
$\frac{\pi}{360}$	0,008727	$\bar{3}$,94085	$\frac{360^\circ}{\pi}$	114°,5915590	2,05915
$\frac{\pi}{10800}$	0,0002909	$\bar{4}$,46373	$\frac{10800'}{\pi}$	3437′,746771	3,53627
$\frac{\pi}{648000}$	0,000004848	$\bar{6}$,68557	$\frac{648000''}{\pi}$	206264″,806	5,31443
$\frac{4\pi}{3}$	4,188790	0,62209	$\frac{3}{4\pi}$	0,238732	$\bar{1}$,37791
π^2	9,869604 (≈ 10)	0,99430	$\frac{1}{\pi^2}$	0,101321	$\bar{1}$,00570
$4\pi^2$	39,478418	1,59636	$\frac{1}{4\pi^2}$	0,025330	$\bar{2}$,40364
$\frac{\pi^2}{4}$	2,467401	0,39224	$\frac{4}{\pi^2}$	0,405285	$\bar{1}$,60776
π^3	31,006277	1,49145	$\frac{1}{\pi^3}$	0,032252	$\bar{2}$,50855
$\sqrt{\pi}$	1,772454	0,24857	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,564190	$\bar{1}$,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0,39909	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,398942	$\bar{1}$,60091

Продолжение табл. 1

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
$\pi\sqrt{\pi}$	5,568328	0,74572	$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$	0,179587	$\bar{1},25428$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,253314	0,09806	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,797885	$\bar{1},90194$
$\sqrt{\frac{\pi}{3}}$	1,023327	0,01001	$\sqrt{\frac{3}{\pi}}$	0,977205	$\bar{1},98999$
$\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,886227	$\bar{1},94754$	$\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,128379	0,05246
$\sqrt{\frac{\pi}{8}}$	0,626657	$\bar{1},79703$	$\sqrt{\frac{8}{\pi}}$	1,595769	0,20297
$\sqrt[3]{\pi}$	1,464592	0,16572	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$	0,682784	$\bar{1},83428$
$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845270	0,26606	$\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$	0,541926	$\bar{1},73394$
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$	1,162447	0,06537	$\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	0,860254	$\bar{1},93463$
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$	0,922635	$\bar{1},96503$	$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$	1,083852	0,03497
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$	0,805996	$\bar{1},90633$	$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$	1,240701	0,09367
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{16}}$	0,581224	$\bar{1},76434$	$\sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}$	1,720508	0,23566
$\sqrt[3]{\frac{\pi}{32}}$	0,461318	$\bar{1},66400$	$\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}}$	2,167704	0,33600
$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$	1,611992	0,20736	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	0,620350	$\bar{1},79264$
$\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}$	1,119515	0,04903	$\sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$	0,893244	$\bar{1},95097$
$\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}$	0,941396	$\bar{1},97377$	$\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}$	1,062252	0,02623
$\sqrt[4]{\frac{\pi}{32}}$	0,559758	$\bar{1},74800$	$\sqrt[4]{\frac{32}{\pi}}$	1,786488	0,25200
$\sqrt[4]{\frac{\pi}{64}}$	0,470698	$\bar{1},67274$	$\sqrt[4]{\frac{64}{\pi}}$	2,124504	0,32726
$\ln \pi$	1,144730	0,05870			
e	2,7182818285	0,43429	$\frac{1}{e}$	0,3678794412	$\bar{1},56571$
e^2	7,389056	0,86859	$\frac{1}{e^2}$	0,135335	$\bar{1},13141$
$\sqrt{e}$	1,648721	0,21715	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	0,606531	$\bar{1},78285$
$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476	$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$	0,716531	$\bar{1},85524$
$e^{\frac{\pi}{2}}$	4,810477	0,68219	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0,207880	$\bar{1},31781$
e^{π}	23,140693	1,36438	$e^{-\pi}$	0,043214	$\bar{2},63562$
$e^{\frac{3\pi}{2}}$	111,3178	2,04656	$e^{-\frac{3\pi}{2}}$	0,008983	$\bar{3},95342$
$e^{2\pi}$	535,4917	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,001867	$\bar{3},27125$
$M = \lg e$	0,4342944819	$\bar{1},63778$	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258509	0,36222
C (эйлерова постоянная)	0,57721566	$\bar{1},76134$			

Продолжение табл. I

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
g (ускорение силы тяжести)	9,81	0,99167	$\frac{1}{g}$	0,101937	$\bar{1},00833$
$2g$	19,62	1,29270	$\frac{1}{2g}$	0,050969	$\bar{2},70730$
g^2	96,236	1,98334	$\frac{1}{g^2}$	0,010391	$\bar{2},01666$
$\sqrt{g}$	3,13207	0,49583	$\frac{1}{\sqrt{g}}$	0,319279	$\bar{1},50417$
$\sqrt{2g}$	4,42944	0,64635	$\frac{1}{\sqrt{2g}}$	0,225763	$\bar{1},35365$
$\pi\sqrt{g}$	9,8396	0,99298	$\frac{\pi}{\sqrt{g}}$	1,00305	0,00132
$\pi\sqrt{2g}$	13,9155	1,14350	$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}$	0,70925	$\bar{1},85080$
360°	360	2,55630	24^h	24	1,38021
360 · 60′	21 600	4,33445	$24 \cdot 60^m$	1440	3,15836
360 · 60 · 60″	1 296 000	6,112605	$24 \cdot 60 \cdot 60^s$	86400	4,93651
$\sqrt{2}$	1,414214 ≈ 1,41	0,15051	$\sqrt{7}$	2,645751	0,42255
$\sqrt[3]{2}$	1,259921 ≈ 1,26	0,10034	$\sqrt[3]{7}$	1,912931	0,28170
$\sqrt[4]{2}$	1,18920 ≈ 1,19	0,07526	$\sqrt{8}$	2,828427	0,45154
$\sqrt[6]{2}$	1,1225 ≈ 1,12	0,05017	$\sqrt[3]{9}$	2,080084	0,31808
$\sqrt[12]{2}$	1,0595 ≈ 1,06	0,02509	$\sqrt{10}$	3,162278	0,50000
$\sqrt{3}$	1,732051	0,23856	$\sqrt[3]{10}$	2,154435	0,33333
$\sqrt[3]{3}$	1,442250	0,15904	$\sqrt[4]{10}$	1,7783 ≈ 1,78	0,25000
$\sqrt[4]{3}$	1,316074	0,11928	$\sqrt[5]{10}$	1,5849 ≈ 1,58	0,20000
$\sqrt[3]{4}$	1,587401	0,20069	$\sqrt[10]{10}$	1,2589 ≈ 1,26	0,10000
$\sqrt{5}$	2,236068	0,34949	$\sqrt[20]{10}$	1,1220 ≈ 1,12	0,05000
$\sqrt[3]{5}$	1,709976	0,23299	$\sqrt[40]{10}$	1,0593 ≈ 1,06	0,02500
$\sqrt{6}$	2,449490	0,38908	$\sqrt[3]{100}$	4,641589	0,66667
$\sqrt[3]{6}$	1,817121	0,25938			

ТАБЛИЦА II. НАИМЕНЬШИЕ ДЕЛИТЕЛИ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 9000

	00	03	06	09	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87
01	—	7	—	17	—	19	—	11	7	37	—	—	13	47	—	7	—	—	11	—	17	—	7	67	19	13	29	—	31	7
07	—	—	—	—	17	11	13	7	29	—	31	—	—	—	7	—	11	—	—	13	—	7	—	—	—	—	37	11	7	—
11	—	—	13	—	7	—	—	—	—	—	—	7	23	—	—	13	17	19	7	—	—	—	11	—	—	7	73	—	13	31
13	—	—	—	11	—	17	7	—	19	—	23	—	—	7	11	—	—	—	—	29	7	59	17	31	—	11	13	7	47	—
17	—	—	—	7	—	37	23	29	—	11	7	31	—	—	—	—	—	7	—	—	11	—	13	—	7	—	—	—	19	23
19	—	11	—	—	23	7	17	13	41	—	—	—	7	—	—	—	61	—	—	7	13	71	—	11	—	73	7	23	—	—
23	—	17	7	13	—	—	—	11	—	7	—	—	—	—	41	—	7	47	11	59	19	—	37	7	31	—	—	—	—	11
29	—	7	17	—	—	11	31	—	7	—	13	—	19	—	—	7	11	23	61	17	—	—	7	13	—	—	—	11	—	7
31	—	—	—	7	—	—	—	—	11	—	7	—	—	—	—	23	—	7	—	11	37	13	19	29	7	17	41	47	—	—
37	—	—	7	—	—	29	11	—	—	7	—	47	—	31	19	13	7	11	—	—	—	—	—	7	—	—	17	79	11	—
41	—	11	—	—	17	23	7	—	—	—	—	13	11	7	—	19	47	53	—	—	7	17	29	11	13	—	—	7	23	—
43	—	7	—	23	11	—	19	—	7	13	17	—	—	—	—	7	29	37	—	—	—	—	7	53	—	19	11	17	—	7
47	—	—	—	—	29	7	—	19	—	41	11	—	7	—	31	—	37	—	13	7	—	11	17	—	—	—	7	—	—	—
49	7	—	11	13	—	—	43	7	31	—	—	17	41	11	7	—	13	19	—	—	23	7	61	—	11	—	47	29	7	13
53	—	—	—	—	7	—	17	—	11	—	43	7	13	59	—	29	23	—	7	11	—	—	—	17	—	7	—	31	79	—
59	—	—	—	7	—	—	11	17	—	31	7	—	—	37	—	47	43	7	53	13	73	—	—	—	7	—	29	41	11	19
61	—	19	—	31	13	7	—	—	23	11	—	—	7	17	—	—	—	13	43	7	11	—	—	—	53	—	7	—	—	—
67	—	—	23	—	7	—	—	11	—	—	—	7	19	—	17	—	31	—	7	73	—	—	59	—	13	7	—	—	—	11
71	—	7	11	—	31	—	—	13	7	17	37	—	—	11	—	7	—	—	—	29	13	23	7	—	11	67	17	—	43	7
73	—	—	—	7	19	11	—	41	—	47	7	—	—	29	—	17	11	7	13	23	—	—	—	19	7	—	—	11	37	31
77	7	13	—	—	—	19	—	7	—	—	17	11	—	41	7	23	—	31	—	53	59	7	11	—	19	—	—	13	7	67
79	—	—	7	11	—	—	—	—	37	7	—	31	13	23	11	19	7	—	—	—	—	—	—	7	29	11	—	—	61	—
83	—	—	—	—	—	—	7	37	13	11	—	17	29	7	—	—	19	71	—	—	7	13	41	—	—	—	—	7	17	—
89	—	—	13	23	—	7	—	11	19	—	—	—	7	—	—	13	—	—	11	7	—	—	—	29	37	—	7	19	13	11
91	7	17	—	—	—	37	31	7	47	—	11	—	—	13	7	—	67	29	17	—	—	7	—	—	23	—	13	—	7	59
97	—	—	17	—	—	—	7	13	11	—	19	43	—	7	—	—	59	—	23	11	7	—	37	—	—	71	53	7	29	19

Примечания: 1. В таблицу не включены числа, кратные 2 (четные), 3 и 5. Поэтому, прежде чем пользоваться табл. II, следует заданное число, если оно кратно 2, 3 или 5, разделить соответственно на эти простые множители.

2. Вверху таблицы по горизонтали помещены две первые цифры числа (цифры тысяч и сотен), а слева по вертикали — две последние цифры (цифры десятков и единиц). Поэтому, например, число 4859 найдется на стр. 9 в графе, обозначенной сверху „48", и в строке, обозначенной слева „59". Число „43", проставленное в соответствующей клетке таблицы, означает, что наименьший делитель числа 4859 равен 43; черта (тире), проставленная в соответствующей клетке, означает, что данное число — простое.

3. Для чисел, больших 9000 и не превышающих 108 000, см. литературу на стр. 351 [146].

Продолжение табл. II

	01	04	07	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88
01	—	—	—	7	—	—	—	31	41	—	7	19	—	—	11	43	13	7	—	—	—	37	—	—	7	11	—	59	—	13
03	—	13	19	17	—	7	11	—	—	—	29	41	7	—	13	—	—	11	—	7	17	19	—	47	67	—	7	13	11	—
07	—	11	7	19	—	—	—	—	23	7	13	—	11	—	59	17	7	41	—	—	31	43	19	7	—	—	—	29	47	—
09	—	—	—	—	7	—	23	47	13	53	—	7	—	19	31	11	—	—	7	37	41	13	—	43	—	7	11	—	67	23
13	—	7	23	—	13	—	—	—	7	29	11	—	47	—	19	7	17	13	37	—	—	11	7	—	71	23	41	43	—	7
19	7	—	—	—	—	—	19	7	11	—	—	13	—	—	7	31	—	17	—	11	29	7	—	—	13	19	—	—	7	—
21	11	—	7	—	—	—	17	—	—	7	—	11	61	—	29	—	7	23	—	—	—	—	11	7	—	—	89	—	—	—
27	—	7	—	13	—	—	41	17	7	11	53	23	—	—	—	7	13	—	—	—	11	—	7	—	17	29	—	19	—	7
31	—	—	17	—	11	7	—	23	—	19	31	47	7	29	61	11	—	—	—	7	—	59	53	79	—	13	7	—	19	—
33	7	—	—	—	31	23	—	7	17	—	13	—	—	37	7	41	—	—	11	19	—	7	—	13	—	17	—	—	7	11
37	—	19	11	17	7	—	13	—	43	—	—	7	37	11	—	—	—	—	7	13	17	41	—	31	11	7	—	—	—	—
39	—	—	—	—	13	11	7	—	—	17	43	19	—	7	—	—	11	13	29	—	7	47	23	—	41	—	17	7	—	—
43	11	—	—	7	17	31	29	—	—	—	7	11	19	13	43	—	—	7	23	—	—	17	11	—	7	—	13	—	—	37
49	—	—	7	—	19	17	—	13	—	7	47	—	23	—	—	—	7	29	31	—	11	—	17	7	—	—	—	73	83	—
51	—	11	—	—	7	13	—	—	—	—	23	7	11	—	19	—	—	59	7	—	—	—	43	11	—	7	—	37	17	53
57	—	—	—	7	23	—	19	37	—	—	7	—	13	—	—	—	—	7	—	—	47	11	29	—	7	13	73	23	43	17
61	7	—	—	—	—	11	37	7	13	—	29	—	—	31	7	59	11	—	67	—	61	7	—	23	17	47	19	11	7	—
63	—	—	7	—	29	—	13	31	11	7	—	—	53	17	—	—	7	19	—	11	—	23	—	7	37	79	—	—	—	—
67	—	—	13	11	—	—	7	—	17	47	—	—	—	7	11	13	—	23	19	—	7	29	67	37	53	11	31	7	13	—
69	13	7	—	—	37	—	11	—	7	19	—	—	—	13	17	7	—	11	—	—	31	—	7	—	—	—	13	—	11	7
73	—	11	—	29	—	7	—	—	31	13	19	23	7	—	—	—	—	—	—	7	—	—	13	11	73	—	7	—	—	19
79	—	—	19	13	7	23	—	43	—	—	11	7	—	—	29	—	13	—	7	—	37	11	—	—	47	7	79	17	23	13
81	—	13	11	23	—	41	7	—	29	43	—	59	19	7	13	31	17	—	—	—	7	—	—	73	11	—	23	7	—	83
87	11	—	—	—	19	7	—	—	13	—	—	11	7	61	41	43	—	17	37	7	23	13	11	19	83	—	7	—	31	—
91	—	—	7	—	13	19	11	29	—	7	—	—	17	—	—	—	7	11	—	43	41	—	—	7	19	—	61	—	11	17
93	—	17	13	—	7	—	—	—	—	11	31	7	—	—	23	13	—	67	7	71	11	43	—	41	—	7	—	—	13	—
97	—	7	—	—	11	—	—	—	7	—	23	13	—	17	—	7	19	—	29	—	—	73	7	47	13	43	11	—	—	7
99	—	—	17	7	—	—	—	11	23	13	7	—	29	—	53	37	—	7	11	17	—	67	13	31	7	—	19	43	—	11

Примеры применения табл. II для разложения чисел на простые множители:

1. Число 7266. В таблице это число отсутствует, так как делится и на 2, и на 3. Разделив на 6, получим: $7266 : 6 = 1211$. На стр. 9 на пересечении вертикали „12" с горизонталью „11" находим наименьший делитель „7". Далее: $1211 : 7 = 173$. На стр. 10 в пересечении вертикали „01" с горизонталью „73" проставлена черта, т. е. 173 — простое число. Следовательно, $7266 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 173$.

2. Число 3553. На стр. 11 на пересечении графы „35" со строкой „53" находим делитель 11; $3553 : 11 = 323$. На стр. 9 („03" и „23") находим 17; $323 : 17 = 19$. Следовательно, $3553 = 11 \cdot 17 \cdot 19$.

	02	05	08	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89
03	7	—	11	—	23	13	—	7	19	—	—	31	—	11	7	—	—	—	13	—	—	7	—	—	11	—	53	19	7	29
09	11	—	—	—	—	—	7	—	—	—	—	11	13	7	—	17	—	—	71	19	7	23	11	—	31	13	—	7	—	59
11	—	7	—	11	17	29	—	—	7	41	13	—	37	—	11	7	—	47	31	23	—	17	7	13	—	11	—	—	79	7
17	7	11	19	—	13	17	—	7	—	—	—	—	11	23	7	53	29	13	41	61	—	7	17	11	—	—	—	—	7	37
21	13	—	—	19	7	—	43	11	—	23	—	7	—	13	—	—	—	17	7	31	—	—	19	—	41	7	13	53	37	11
23	—	—	—	—	—	—	7	23	43	37	11	13	—	7	—	—	—	—	—	—	7	11	—	17	13	—	71	7	—	—
27	—	17	—	7	—	11	—	13	37	—	7	—	43	—	19	29	11	7	17	—	13	61	—	—	7	—	23	11	—	79
29	—	23	—	—	—	7	—	17	11	29	—	—	7	—	43	—	47	73	13	7	—	—	—	—	17	59	7	—	—	—
33	—	13	7	11	—	—	19	—	—	7	53	—	—	—	11	—	7	—	43	17	23	47	—	7	—	11	29	13	89	—
39	—	7	—	17	—	37	—	—	7	—	41	—	11	—	23	7	—	19	—	—	17	13	7	11	43	71	—	31	53	7
41	—	—	29	7	11	—	13	—	19	17	7	—	23	41	—	11	71	7	—	13	79	31	—	37	7	—	11	19	—	—
47	13	—	7	31	—	—	23	—	—	7	17	—	—	11	—	47	7	—	—	19	—	—	41	7	11	61	13	17	—	23
51	—	19	23	—	—	17	7	—	11	13	—	53	—	7	—	—	—	—	—	11	7	—	13	—	—	23	83	7	41	—
53	11	7	—	—	—	—	—	13	7	—	—	11	—	—	61	7	31	53	—	—	13	—	7	23	29	—	—	—	17	7
57	—	—	—	13	31	7	11	—	—	—	—	—	7	—	—	67	13	11	—	7	—	79	—	17	—	—	7	61	11	13
59	7	13	—	19	—	—	29	7	—	11	—	—	17	—	7	—	—	23	—	59	11	7	19	—	—	—	—	13	7	17
63	—	—	—	—	7	41	—	17	—	—	13	7	—	23	—	11	61	31	7	67	—	—	—	13	17	7	11	—	—	—
69	—	—	11	7	13	29	—	23	17	—	7	43	53	11	41	19	37	7	—	47	—	—	—	67	7	17	—	—	—	—
71	—	—	13	—	—	7	19	—	—	—	—	—	7	43	17	13	11	41	53	7	—	—	—	71	31	19	7	11	13	—
77	—	—	—	11	7	—	31	—	—	13	29	7	—	—	11	17	—	19	7	43	—	—	13	—	—	7	41	—	—	47
81	—	7	—	—	—	13	—	—	7	11	17	—	—	37	—	7	—	—	13	—	11	—	7	43	—	31	—	17	—	7
83	—	11	—	7	—	—	—	—	—	19	7	—	11	47	—	—	13	7	—	31	61	29	—	11	7	43	59	83	19	13
87	7	—	—	—	—	—	—	7	—	29	19	17	13	53	7	—	—	—	11	—	—	7	71	—	—	13	—	—	7	11
89	17	19	7	29	—	—	—	—	—	7	11	37	—	59	67	—	7	17	—	53	19	11	83	7	—	—	—	—	—	89
93	—	—	19	—	—	11	7	—	—	41	37	—	17	7	—	—	11	—	—	13	7	19	61	—	59	—	—	7	—	17
99	13	—	29	11	—	7	—	—	—	—	—	59	7	13	11	—	—	—	41	7	—	—	—	23	—	11	7	37	—	—

3. Число 4321. На стр. 10 (графа „43“, строка „21“) находим 29; $4321 : 29 = 149$. На стр. 9 („01“ и „49“) 149 — простое число. Следовательно, $4321 = 29 \cdot 149$.

4. Число 6853. На стр. 11 (графа „68“, строка „53“) находим наименьший делитель 7; $6853 : 7 = 979$. На стр. 9 („09“ и „79“) находим 11; $979 : 11 = 89$. На той же странице („00“ и „89“) 89 — простое число. Следовательно, $6853 = 7 \cdot 11 \cdot 89$.

ТАБЛИЦА III. КВАДРАТЫ, КУБЫ, КОРНИ КВАДРАТНЫЕ И КУБИЧЕСКИЕ, ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ, ОБРАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТЕЙ, ПЛОЩАДИ КРУГОВ ДЛЯ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 1000

1—50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
1	1	1	1,0000	1,0000	0,00000	1000,000	3,142	0,7854	1
2	4	8	1,4142	1,2599	0,30103	500,000	6,283	3,1416	2
3	9	27	1,7321	1,4422	0,47712	333,333	9,425	7,0686	3
4	16	64	2,0000	1,5874	0,60206	250,000	12,566	12,5664	4
5	25	125	2,2361	1,7100	0,69897	200,000	15,708	19,6350	5
6	36	216	2,4495	1,8171	0,77815	166,667	18,850	28,2743	6
7	49	343	2,6458	1,9129	0,84510	142,857	21,991	38,4845	7
8	64	512	2,8284	2,0000	0,90309	125,000	25,133	50,2655	8
9	81	729	3,0000	2,0801	0,95424	111,111	28,274	63,6173	9
10	100	1000	3,1623	2,1544	1,00000	100,000	31,416	78,5398	10
11	121	1 331	3,3166	2,2240	1,04139	90,9091	34,558	95,0332	11
12	144	1 728	3,4641	2,2894	1,07918	83,3333	37,699	113,097	12
13	169	2 197	3,6056	2,3513	1,11394	76,9231	40,841	132,732	13
14	196	2 744	3,7417	2,4101	1,14613	71,4286	43,982	153,938	14
15	225	3 375	3,8730	2,4662	1,17609	66,6667	47,124	176,715	15
16	256	4 096	4,0000	2,5198	1,20412	62,5000	50,265	201,062	16
17	289	4 913	4,1231	2,5713	1,23045	58,8235	53,407	226,980	17
18	324	5 832	4,2426	2,6207	1,25527	55,5556	56,549	254,469	18
19	361	6 859	4,3589	2,6684	1,27875	52,6316	59,690	283,529	19
20	400	8000	4,4721	2,7141	1,30103	50,0000	62,832	314,159	20
21	441	9 261	4,5826	2,7589	1,32222	47,6190	65,973	346,361	21
22	484	10 648	4,6904	2,8020	1,34242	45,4545	69,115	380,133	22
23	529	12 167	4,7958	2,8439	1,36173	43,4783	72,257	415,476	23
24	576	13 824	4,8990	2,8845	1,38021	41,6667	75,398	452,389	24
25	625	15 625	5,0000	2,9240	1,39794	40,0000	78,540	490,874	25
26	676	17 576	5,0990	2,9625	1,41497	38,4615	81,681	530,929	26
27	729	19 683	5,1962	3,0000	1,43136	37,0370	84,823	572,555	27
28	784	21 952	5,2915	3,0366	1,44716	35,7143	87,965	615,752	28
29	841	24 389	5,3852	3,0723	1,46240	34,4828	91,106	660,520	29
30	900	27 000	5,4772	3,1072	1,47712	33,3333	94,248	706,858	30
31	961	29 791	5,5678	3,1414	1,49136	32,2581	97,389	754,768	31
32	1 024	32 768	5,6569	3,1748	1,50515	31,2500	100,531	804,248	32
33	1 089	35 937	5,7446	3,2075	1,51851	30,3030	103,673	855,299	33
34	1 156	39 304	5,8310	3,2396	1,53148	29,4118	106,814	907,920	34
35	1 225	42 875	5,9161	3,2711	1,54407	28,5714	109,956	962,113	35
36	1 296	46 656	6,0000	3,3019	1,55630	27,7778	113,097	1017,88	36
37	1 369	50 653	6,0828	3,3322	1,56820	27,0270	116,239	1075,21	37
38	1 444	54 872	6,1644	3,3620	1,57978	26,3158	119,381	1134,11	38
39	1 521	59 319	6,2450	3,3912	1,59106	25,6410	122,522	1194,59	39
40	1600	64 000	6,3246	3,4200	1,60206	25,0000	125,66	1256,64	40
41	1 681	68 921	6,4031	3,4482	1,61278	24,3902	128,81	1320,25	41
42	1 764	74 088	6,4807	3,4760	1,62325	23,8095	131,95	1385,44	42
43	1 849	79 507	6,5574	3,5034	1,63347	23,2558	135,09	1452,20	43
44	1 936	85 184	6,6332	3,5303	1,64345	22,7273	138,23	1520,53	44
45	2 025	91 125	6,7082	3,5569	1,65321	22,2222	141,37	1590,43	45
46	2 116	97 336	6,7823	3,5830	1,66276	21,7391	144,51	1661,90	46
47	2 209	10 3823	6,8557	3,6088	1,67210	21,2766	147,65	1734,94	47
48	2 304	11 0592	6,9282	3,6342	1,68124	20,8333	150,80	1809,56	48
49	2 401	11 7649	7,0000	3,6593	1,69020	20,4082	153,94	1885,74	49
50	2 500	125 000	7,0711	3,6840	1,69897	20,0000	157,08	1963,50	50

51—100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
51	2 601	132 651	7,1414	3,7084	1,70757	19,6078	160,22	2042,82	51
52	2 704	140 608	7,2111	3,7325	1,71600	19,2308	163,36	2123,72	52
53	2 809	148 877	7,2801	3,7563	1,72428	18,8679	166,50	2206,18	53
54	2 916	157 464	7,3485	3,7793	1,73239	18,5185	169,65	2290,22	54
55	3 025	166 375	7,4162	3,8030	1,74036	18,1818	172,79	2375,83	55
56	3 136	175 616	7,4833	3,8259	1,74819	17,8571	175,93	2463,01	56
57	3 249	185 193	7,5498	3,8485	1,75587	17,5439	179,07	2551,76	57
58	3 364	195 112	7,6158	3,8709	1,76343	17,2414	182,21	2642,08	58
59	3 481	205 379	7,6811	3,8930	1,77085	16,9492	185,35	2733,97	59
60	3 600	216 000	7,7460	3,9149	1,77815	16,6667	188,50	2827,43	60
61	3 721	226 981	7,8102	3,9365	1,78533	16,3934	191,64	2922,47	61
62	3 844	238 328	7,8740	3,9579	1,79239	16,1290	194,78	3019,07	62
63	3 969	250 047	7,9373	3,9791	1,79934	15,8730	197,92	3117,25	63
64	4 096	262 144	8,0000	4,0000	1,80618	15,6250	201,06	3216,99	64
65	4 225	274 625	8,0623	4,0207	1,81291	15,3846	204,20	3318,31	65
66	4 356	287 496	8,1240	4,0412	1,81954	15,1515	207,35	3421,19	66
67	4 489	300 763	8,1854	4,0615	1,82607	14,9254	210,49	3525,65	67
68	4 624	314 432	8,2462	4,0817	1,83251	14,7059	213,63	3631,68	68
69	4 761	328 509	8,3066	4,1016	1,83885	14,4928	216,77	3739,28	69
70	4 900	343 000	8,3666	4,1213	1,84510	14,2857	219,91	3848,45	70
71	5 041	357 911	8,4261	4,1408	1,85126	14,0845	223,05	3959,19	71
72	5 184	373 248	8,4853	4,1602	1,85733	13,8889	226,19	4071,50	72
73	5 329	389 017	8,5440	4,1793	1,86332	13,6986	229,34	4185,39	73
74	5 476	405 224	8,6023	4,1983	1,86923	13,5135	232,48	4300,84	74
75	5 625	421 875	8,6603	4,2172	1,87506	13,3333	235,62	4417,86	75
76	5 776	438 976	8,7178	4,2358	1,88081	13,1579	238,76	4536,46	76
77	5 929	456 533	8,7750	4,2543	1,88649	12,9870	241,90	4656,63	77
78	6 084	474 552	8,8318	4,2727	1,89209	12,8205	245,04	4778,36	78
79	6 241	493 039	8,8882	4,2908	1,89763	12,6582	248,19	4901,67	79
80	6 400	512 000	8,9443	4,3089	1,90309	12,5000	251,33	5026,55	80
81	6 561	531 441	9,0000	4,3267	1,90849	12,3457	254,47	5153,00	81
82	6 724	551 368	9,0554	4,3445	1,91381	12,1951	257,61	5281,02	82
83	6 889	571 787	9,1104	4,3621	1,91908	12,0482	260,75	5410,61	83
84	7 056	592 704	9,1652	4,3795	1,92428	11,9048	263,89	5541,77	84
85	7 225	614 125	9,2195	4,3968	1,92942	11,7647	267,04	5674,50	85
86	7 396	636 056	9,2736	4,4140	1,93450	11,6279	270,18	5808,80	86
87	7 569	658 503	9,3274	4,4310	1,93952	11,4943	273,32	5944,68	87
88	7 744	681 472	9,3808	4,4480	1,94448	11,3636	276,46	6082,12	88
89	7 921	704 969	9,4340	4,4647	1,94939	11,2360	279,60	6221,14	89
90	8 100	729 000	9,4868	4,4814	1,95424	11,1111	282,74	6361,73	90
91	8 281	753 571	9,5394	4,4979	1,95904	10,9890	285,88	6503,88	91
92	8 464	778 688	9,5917	4,5144	1,96379	10,8696	289,03	6647,61	92
93	8 649	804 357	9,6437	4,5307	1,96848	10,7527	292,17	6792,91	93
94	8 836	830 584	9,6954	4,5468	1,97313	10,6383	295,31	6939,78	94
95	9 025	857 375	9,7468	4,5629	1,97772	10,5263	298,45	7088,22	95
96	9 216	884 736	9,7980	4,5789	1,98227	10,4167	301,59	7238,23	96
97	9 409	912 673	9,8489	4,5947	1,98677	10,3093	304,73	7389,81	97
98	9 604	941 192	9,8995	4,6104	1,99123	10,2041	307,88	7542,96	98
99	9 801	970 299	9,9499	4,6261	1,99564	10,1010	311,02	7697,69	99
100	10 000	1000 000	10,0000	4,6416	2,00000	10,0000	314,16	7853,98	100

101—150

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
101	10 201	1 030 301	10,0499	4,6570	2,00432	9,90099	317,30	8 011,85	101
102	10 404	1 061 208	10,0995	4,6723	2,00860	9,80392	320,44	8 171,28	102
103	10 609	1 092 727	10,1489	4,6875	2,01284	9,70874	323,58	8 332,29	103
104	10 816	1 124 864	10,1980	4,7027	2,01703	9,61538	326,73	8 494,87	104
105	11 025	1 157 625	10,2470	4,7177	2,02119	9,52381	329,87	8 659,01	105
106	11 236	1 191 016	10,2956	4,7326	2,02531	9,43396	333,01	8 824,73	106
107	11 449	1 225 043	10,3441	4,7475	2,02938	9,34579	336,15	8 992,02	107
108	11 664	1 259 712	10,3923	4,7622	2,03342	9,25926	339,29	9 160,88	108
109	11 881	1 295 029	10,4403	4,7769	2,03743	9,17431	342,43	9 331,32	109
110	12 100	1 331 000	10,4881	4,7914	2,04139	9,09091	345,58	9 503,32	110
111	12 321	1 367 631	10,5357	4,8059	2,04532	9,00901	348,72	9 676,89	111
112	12 544	1 404 928	10,5830	4,8203	2,04922	8,92857	351,86	9 852,03	112
113	12 769	1 442 897	10,6301	4,8346	2,05308	8,84956	355,00	10 028,7	113
114	12 996	1 481 544	10,6771	4,8488	2,05690	8,77193	358,14	10 207,0	114
115	13 225	1 520 875	10,7238	4,8629	2,06070	8,69565	361,28	10 386,9	115
116	13 456	1 560 896	10,7703	4,8770	2,06446	8,62069	364,42	10 568,3	116
117	13 689	1 601 613	10,8167	4,8910	2,06819	8,54701	367,57	10 751,3	117
118	13 924	1 643 032	10,8628	4,9049	2,07188	8,47458	370,71	10 935,9	118
119	14 161	1 685 159	10,9087	4,9187	2,07555	8,40336	373,85	11 122,0	119
120	14 400	1 728 000	10,9545	4,9324	2,07918	8,33333	376,99	11 309,7	120
121	14 641	1 771 561	11,0000	4,9461	2,08279	8,26446	380,13	11 499,0	121
122	14 884	1 815 848	11,0454	4,9597	2,08636	8,19672	383,27	11 689,9	122
123	15 129	1 860 867	11,0905	4,9732	2,08991	8,13008	386,42	11 882,3	123
124	15 376	1 906 624	11,1355	4,9866	2,09342	8,06452	389,56	12 076,3	124
125	15 625	1 953 125	11,1803	5,0000	2,09691	8,00000	392,70	12 271,8	125
126	15 876	2 000 376	11,2250	5,0133	2,10037	7,93651	395,84	12 469,0	126
127	16 129	2 048 383	11,2694	5,0265	2,10380	7,87402	398,98	12 667,7	127
128	16 384	2 097 152	11,3137	5,0397	2,10721	7,81250	402,12	12 868,0	128
129	16 641	2 146 689	11,3578	5,0528	2,11059	7,75194	405,27	13 069,8	129
130	16 900	2 197 000	11,4018	5,0658	2,11394	7,69231	408,41	13 273,2	130
131	17 161	2 248 091	11,4455	5,0788	2,11727	7,63359	411,55	13 478,2	131
132	17 424	2 299 968	11,4891	5,0916	2,12057	7,57576	414,69	13 684,8	132
133	17 689	2 352 637	11,5326	5,1045	2,12385	7,51880	417,83	13 892,9	133
134	17 956	2 406 104	11,5758	5,1172	2,12710	7,46269	420,97	14 102,6	134
135	18 225	2 460 375	11,6190	5,1299	2,13033	7,40741	424,12	14 313,9	135
136	18 496	2 515 456	11,6619	5,1426	2,13354	7,35294	427,26	14 526,7	136
137	18 769	2 571 353	11,7047	5,1551	2,13672	7,29927	430,40	14 741,1	137
138	19 044	2 628 072	11,7473	5,1676	2,13988	7,24638	433,54	14 957,1	138
139	19 321	2 685 619	11,7898	5,1801	2,14301	7,19424	436,68	15 174,7	139
140	19 600	2 744 000	11,8322	5,1925	2,14613	7,14286	439,82	15 393,8	140
141	19 881	2 803 221	11,8743	5,2048	2,14922	7,09220	442,96	15 614,5	141
142	20 164	2 863 288	11,9164	5,2171	2,15229	7,04225	446,11	15 836,8	142
143	20 449	2 924 207	11,9583	5,2293	2,15534	6,99301	449,25	16 060,6	143
144	20 736	2 985 984	12,0000	5,2415	2,15836	6,94444	452,39	16 286,0	144
145	21 025	3 048 625	12,0416	5,2536	2,16137	6,89655	455,53	16 513,0	145
146	21 316	3 112 136	12,0830	5,2656	2,16435	6,84932	458,67	16 741,5	146
147	21 609	3 176 523	12,1244	5,2776	2,16732	6,80272	461,81	16 971,7	147
148	21 904	3 241 792	12,1655	5,2896	2,17026	6,75676	464,96	17 203,4	148
149	22 201	3 307 949	12,2066	5,3015	2,17319	6,71141	468,10	17 436,6	149
150	22 500	3 375 000	12,2474	5,3133	2,17609	6,66667	471,24	17 671,5	150

151—200

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
151	22 801	3 442 951	12,2882	5,3251	2,17893	6,62252	474,38	17 907,9	151
152	23 104	3 511 808	12,3288	5,3368	2,18184	6,57895	477,52	18 145,8	152
153	23 409	3 581 577	12,3693	5,3485	2,18469	6,53595	480,66	18 385,4	153
154	23 716	3 652 264	12,4097	5,3601	2,18752	6,49351	483,81	18 626,5	154
155	24 025	3 723 875	12,4499	5,3717	2,19033	6,45161	486,95	18 869,2	155
156	24 336	3 796 416	12,4900	5,3832	2,19312	6,41026	490,09	19 113,4	156
157	24 649	3 869 893	12,5300	5,3947	2,19590	6,36943	493,23	19 359,3	157
158	24 964	3 944 312	12,5698	5,4061	2,19866	6,32911	496,37	19 606,7	158
159	25 281	4 019 679	12,6095	5,4175	2,20140	6,28931	499,51	19 855,7	159
160	25 600	4 096 000	12,6491	5,4288	2,20412	6,25000	502,65	20 106,2	160
161	25 921	4 173 281	12,6886	5,4401	2,20683	6,21118	505,80	20 358,3	161
162	26 244	4 251 528	12,7279	5,4514	2,20952	6,17284	508,94	20 612,0	162
163	26 569	4 330 747	12,7671	5,4626	2,21219	6,13497	512,08	20 867,2	163
164	26 896	4 410 944	12,8062	5,4737	2,21484	6,09756	515,22	21 124,1	164
165	27 225	4 492 125	12,8452	5,4848	2,21748	6,06061	518,36	21 382,5	165
166	27 556	4 574 296	12,8841	5,4959	2,22011	6,02410	521,50	21 642,4	166
167	27 889	4 657 463	12,9228	5,5069	2,22272	5,98802	524,65	21 904,0	167
168	28 224	4 741 632	12,9615	5,5178	2,22531	5,95238	527,79	22 167,1	168
169	28 561	4 826 809	13,0000	5,5288	2,22789	5,91716	530,93	22 431,8	169
170	28 900	4 913 000	13,0384	5,5397	2,23045	5,88235	534,07	22 698,0	170
171	29 241	5 000 211	13,0767	5,5505	2,23300	5,84795	537,21	22 965,8	171
172	29 584	5 088 448	13,1149	5,5613	2,23553	5,81395	540,35	23 235,2	172
173	29 929	5 177 717	13,1529	5,5721	2,23805	5,78035	543,50	23 506,2	173
174	30 276	5 268 024	13,1909	5,5828	2,24055	5,74713	546,64	23 778,7	174
175	30 625	5 359 375	13,2288	5,5934	2,24304	5,71429	549,78	24 052,8	175
176	30 976	5 451 776	13,2665	5,6041	2,24551	5,68182	552,92	24 328,5	176
177	31 329	5 545 233	13,3041	5,6147	2,24797	5,64972	556,06	24 605,7	177
178	31 684	5 639 752	13,3417	5,6252	2,25042	5,61798	559,20	24 884,6	178
179	32 041	5 735 339	13,3791	5,6357	2,25285	5,58659	562,35	25 164,9	179
180	32 400	5 832 000	13,4164	5,6462	2,25527	5,55556	565,49	25 446,9	180
181	32 761	5 929 741	13,4536	5,6567	2,25768	5,52486	568,63	25 730,4	181
182	33 124	6 028 568	13,4907	5,6671	2,26007	5,49451	571,77	26 015,5	182
183	33 489	6 128 487	13,5277	5,6774	2,26245	5,46448	574,91	26 302,2	183
184	33 856	6 229 504	13,5647	5,6877	2,26482	5,43478	578,05	26 590,4	184
185	34 225	6 331 625	13,6015	5,6980	2,26717	5,40541	581,19	26 880,3	185
186	34 596	6 434 856	13,6382	5,7083	2,26951	5,37634	584,34	27 171,6	186
187	34 969	6 539 203	13,6748	5,7185	2,27184	5,34759	587,48	27 464,6	187
188	35 344	6 644 672	13,7113	5,7287	2,27416	5,31915	590,62	27 759,1	188
189	35 721	6 751 269	13,7477	5,7388	2,27646	5,29101	593,76	28 055,2	189
190	36 100	6 859 000	13,7840	5,7489	2,27875	5,26316	596,90	28 352,9	190
191	36 481	6 967 871	13,8203	5,7590	2,28103	5,23560	600,04	28 652,1	191
192	36 864	7 077 888	13,8564	5,7690	2,28330	5,20833	603,19	28 952,9	192
193	37 249	7 189 057	13,8924	5,7790	2,28556	5,18135	606,33	29 255,3	193
194	37 636	7 301 384	13,9284	5,7890	2,28780	5,15464	609,47	29 559,2	194
195	38 025	7 414 875	13,9642	5,7989	2,29003	5,12821	612,61	29 864,8	195
196	38 416	7 529 536	14,0000	5,8088	2,29226	5,10204	615,75	30 171,9	196
197	38 809	7 645 373	14,0357	5,8186	2,29447	5,07614	618,89	30 480,5	197
198	39 204	7 762 392	14,0712	5,8285	2,29667	5,05051	622,04	30 790,7	198
199	39 601	7 880 599	14,1067	5,8383	2,29885	5,02513	625,18	31 102,6	199
200	40 000	8 000 000	14,1421	5,8480	2,30103	5,00000	628,32	31 415,9	200

201—250

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
201	40 401	8 120 601	14,1774	5,8578	2,30320	4,97512	631,46	31 730,9	201
202	40 804	8 242 408	14,2127	5,8675	2,30535	4,95050	634,60	32 047,4	202
203	41 209	8 365 427	14,2478	5,8771	2,30750	4,92611	637,74	32 365,5	203
204	41 616	8 489 664	14,2829	5,8868	2,30963	4,90196	640,88	32 685,1	204
205	42 025	8 615 125	14,3178	5,8964	2,31175	4,87805	644,03	33 006,4	205
206	42 436	8 741 816	14,3527	5,9059	2,31387	4,85437	647,17	33 329,2	206
207	42 849	8 869 743	14,3875	5,9155	2,31597	4,83092	650,31	33 653,5	207
208	43 264	8 998 912	14,4222	5,9250	2,31806	4,80769	653,45	33 979,5	208
209	43 681	9 129 329	14,4568	5,9345	2,32015	4,78469	656,59	34 307,0	209
210	44 100	9 261 000	14,4914	5,9439	2,32222	4,76190	659,73	34 636,1	210
211	44 521	9 393 931	14,5258	5,9533	2,32428	4,73934	662,88	34 966,7	211
212	44 944	9 528 128	14,5602	5,9627	2,32634	4,71698	666,02	35 298,9	212
213	45 369	9 663 597	14,5945	5,9721	2,32838	4,69484	669,16	35 632,7	213
214	45 796	9 800 344	14,6287	5,9814	2,33041	4,67290	672,30	35 968,1	214
215	46 225	9 938 375	14,6629	5,9907	2,33244	4,65116	675,44	36 305,0	215
216	46 656	10 077 696	14,6969	6,0000	2,33445	4,62963	678,58	36 643,5	216
217	47 089	10 218 313	14,7309	6,0092	2,33646	4,60829	681,73	36 983,6	217
218	47 524	10 360 232	14,7648	6,0185	2,33846	4,58716	684,87	37 325,3	218
219	47 961	10 503 459	14,7986	6,0277	2,34044	4,56621	688,01	37 668,5	219
220	48 400	10 648 000	14,8324	6,0368	2,34242	4,54545	691,15	38 013,3	220
221	48 841	10 793 861	14,8661	6,0459	2,34439	4,52489	694,29	38 359,6	221
222	49 284	10 941 048	14,8997	6,0550	2,34635	4,50450	697,43	38 707,6	222
223	49 729	11 089 567	14,9332	6,0641	2,34830	4,48430	700,58	39 057,1	223
224	50 176	11 239 424	14,9666	6,0732	2,35025	4,46429	703,72	39 408,1	224
225	50 625	11 390 625	15,0000	6,0822	2,35218	4,44444	706,86	39 760,8	225
226	51 076	11 543 176	15,0333	6,0912	2,35411	4,42478	710,00	40 115,0	226
227	51 529	11 697 083	15,0665	6,1002	2,35603	4,40529	713,14	40 470,8	227
228	51 984	11 852 352	15,0997	6,1091	2,35793	4,38596	716,28	40 828,1	228
229	52 441	12 008 989	15,1327	6,1180	2,35984	4,36681	719,42	41 187,1	229
230	52 900	12 167 000	15,1658	6,1269	2,36173	4,34783	722,57	41 547,6	230
231	53 361	12 326 391	15,1987	6,1358	2,36361	4,32900	725,71	41 909,6	231
232	53 824	12 487 168	15,2315	6,1446	2,36549	4,31034	728,85	42 273,3	232
233	54 289	12 649 337	15,2643	6,1534	2,36736	4,29185	731,99	42 638,5	233
234	54 756	12 812 904	15,2971	6,1622	2,36922	4,27350	735,13	43 005,3	234
235	55 225	12 977 875	15,3297	6,1710	2,37107	4,25532	738,27	43 373,6	235
236	55 696	13 144 256	15,3623	6,1797	2,37291	4,23729	741,42	43 743,5	236
237	56 169	13 312 053	15,3948	6,1885	2,37475	4,21941	744,56	44 115,0	237
238	56 644	13 481 272	15,4272	6,1972	2,37658	4,20168	747,70	44 488,1	238
239	57 121	13 651 919	15,4596	6,2058	2,37840	4,18410	750,84	44 862,7	239
240	57 600	13 824 000	15,4919	6,2145	2,38021	4,16667	753,98	45 238,9	240
241	58 081	13 997 521	15,5242	6,2231	2,38202	4,14938	757,12	45 616,7	241
242	58 564	14 172 488	15,5563	6,2317	2,38382	4,13223	760,27	45 996,1	242
243	59 049	14 348 907	15,5885	6,2403	2,38561	4,11523	763,41	46 377,0	243
244	59 536	14 526 784	15,6205	6,2488	2,38739	4,09836	766,55	46 759,5	244
245	60 025	14 706 125	15,6525	6,2573	2,38917	4,08163	769,69	47 143,5	245
246	60 516	14 886 936	15,6844	6,2658	2,39094	4,06504	772,83	47 529,2	246
247	61 009	15 069 223	15,7162	6,2743	2,39270	4,04858	775,97	47 916,4	247
248	61 504	15 252 992	15,7480	6,2828	2,39445	4,03226	779,11	48 305,1	248
249	62 001	15 438 249	15,7797	6,2912	2,39620	4,01606	782,26	48 695,5	249
250	62 500	15 625 000	15,8114	6,2996	2,39794	4,00000	785,40	49 087,4	250

251 — 300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
251	63 001	15 813 251	15,8430	6,3080	2,39967	3,98406	788,54	49 480,9	251
252	63 504	16 003 008	15,8745	6,3164	2,40140	3,96825	791,68	49 875,9	252
253	64 009	16 194 277	15,9060	6,3247	2,40312	3,95257	794,82	50 272,6	253
254	64 516	16 387 064	15,9374	6,3330	2,40483	3,93701	797,96	50 670,7	254
255	65 025	16 581 375	15,9687	6,3413	2,40654	3,92157	801,11	51 070,5	255
256	65 536	16 777 216	16,0000	6,3496	2,40824	3,90625	804,25	51 471,9	256
257	66 049	16 974 593	16,0312	6,3579	2,40993	3,89105	807,39	51 874,8	257
258	66 564	17 173 512	16,0624	6,3661	2,41162	3,87597	810,53	52 279,2	258
259	67 081	17 373 979	16,0935	6,3743	2,41330	3,86100	813,67	52 685,3	259
260	67 600	17 576 000	16,1245	6,3825	2,41497	3,84615	816,81	53 092,9	260
261	68 121	17 779 581	16,1555	6,3907	2,41664	3,83142	819,96	53 502,1	261
262	68 644	17 984 728	16,1864	6,3988	2,41830	3,81679	823,10	53 912,9	262
263	69 169	18 191 447	16,2173	6,4070	2,41996	3,80228	826,24	54 325,2	263
264	69 696	18 399 744	16,2481	6,4151	2,42160	3,78788	829,38	54 739,1	264
265	70 225	18 609 625	16,2788	6,4232	2,42325	3,77358	832,52	55 154,6	265
266	70 756	18 821 096	16,3095	6,4312	2,42488	3,75940	835,66	55 571,6	266
267	71 289	19 034 163	16,3401	6,4393	2,42651	3,74532	838,81	55 990,2	267
268	71 824	19 248 832	16,3707	6,4473	2,42813	3,73134	841,95	56 410,4	268
269	72 361	19 465 109	16,4012	6,4553	2,42975	3,71747	845,09	56 832,2	269
270	72 900	19 683 000	16,4317	6,4633	2,43136	3,70370	848,23	57 255,5	270
271	73 441	19 902 511	16,4621	6,4713	2,43297	3,69004	851,37	57 680,4	271
272	73 984	20 123 648	16,4924	6,4792	2,43457	3,67647	854,51	58 106,9	272
273	74 529	20 346 417	16,5227	6,4872	2,43616	3,66300	857,65	58 534,9	273
274	75 076	20 570 824	16,5529	6,4951	2,43775	3,64964	860,80	58 964,6	274
275	75 625	20 796 875	16,5831	6,5030	2,43933	3,63636	863,94	59 395,7	275
276	76 176	21 024 576	16,6132	6,5108	2,44091	3,62319	867,08	59 828,5	276
277	76 729	21 253 933	16,6433	6,5187	2,44248	3,61011	870,22	60 262,8	277
278	77 284	21 484 952	16,6733	6,5265	2,44404	3,59712	873,36	60 698,7	278
279	77 841	21 717 639	16,7033	6,5343	2 44560	3,58423	876,50	61 136,2	279
280	78 400	21 952 000	16,7332	6,5421	2,44716	3,57143	879,65	61 575,2	280
281	78 961	22 188 041	16,7631	6,5499	2,44871	3,55872	882,79	62 015,8	281
282	79 524	22 425 768	16,7929	6,5577	2,45025	3,54610	885,93	62 458,0	282
283	80 089	22 665 187	16,8226	6,5654	2,45179	3,53357	889,07	62 901,8	283
284	80 656	22 906 304	16,8523	6,5731	2,45332	3,52113	892,21	63 347,1	284
285	81 225	23 149 125	16,8819	6,5808	2,45484	3,50877	895,35	63 794,0	285
286	81 796	23 393 656	16,9115	6,5885	2,45637	3,49650	898,50	64 242,4	286
287	82 369	23 639 903	16,9411	6,5962	2,45788	3,48432	901,64	64 692,5	287
288	82 944	23 887 872	16,9706	6,6039	2,45939	3,47222	904,78	65 144,1	288
289	83 521	24 137 569	17,0000	6,6115	2,46090	3,46021	907,92	65 597,2	289
290	84 100	24 389 000	17,0294	6,6191	2,46240	3,44828	911,05	66 052,0	290
291	84 681	24 642 171	17,0587	6,6267	2,46389	3,43643	914,20	66 508,3	291
292	85 264	24 897 088	17,0880	6,6343	2,46538	3,42466	917,35	66 966,2	292
293	85 849	25 153 757	17,1172	6,6419	2,46687	3,41297	920,49	67 425,6	293
294	86 436	25 412 184	17,1464	6,6494	2,46835	3,40136	923,63	67 886,7	294
295	87 025	25 672 375	17,1756	6,6569	2,46982	3,38983	926,77	68 349,3	295
296	87 616	25 934 336	17,2047	6,6644	2,47129	3,37838	929,91	68 813,4	296
297	88 209	26 198 073	17,2337	6,6719	2,47276	3,36700	933,05	69 279,2	297
298	88 804	26 463 592	17,2627	6,6794	2,47422	3,35570	936,19	69 746,5	298
299	89 401	26 730 899	17,2916	6,6869	2,47567	3,34448	939,34	70 215,4	299
300	90 000	27 000 000	17,3205	6,6943	2,47712	3,33333	942,48	70 685,8	300

43673

301—350

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
301	90 601	27 270 901	17,3494	6,7018	2,47857	3,32226	945,62	71 157,9	301
302	91 204	27 543 608	17,3781	6,7092	2,48001	3,31126	948,76	71 631,5	302
303	91 809	27 818 127	17,4069	6,7166	2,48144	3,30033	951,90	72 105,6	303
304	92 416	28 094 464	17,4356	6,7240	2,48287	3,28947	955,04	72 583,4	304
305	93 025	28 372 625	17,4642	6,7313	2,48430	3,27869	958,19	73 061,7	305
306	93 636	28 652 616	17,4929	6,7387	2,48572	3,26797	961,33	73 541,5	306
307	94 249	28 934 443	17,5214	6,7460	2,48714	3,25733	964,47	74 023,0	307
308	94 864	29 218 112	17,5499	6,7533	2,48855	3,24675	967,61	74 506,0	308
309	95 481	29 503 629	17,5784	6,7606	2,48996	3,23625	970,75	74 990,6	309
310	96 100	29 791 000	17,6068	6,7679	2,49136	3,22581	973,89	75 476,8	310
311	96 721	30 080 231	17,6352	6,7752	2,49276	3,21543	977,04	75 964,5	311
312	97 344	30 371 328	17,6635	6,7824	2,49415	3,20513	980,18	76 453,8	312
313	97 969	30 664 297	17,6918	6,7897	2,49554	3,19489	983,32	76 944,7	313
314	98 596	30 959 144	17,7200	6,7969	2,49693	3,18471	986,46	77 437,1	314
315	99 225	31 255 875	17,7482	6,8041	2,49831	3,17460	989,60	77 931,1	315
316	99 856	31 554 496	17,7764	6,8113	2,49969	3,16456	992,74	78 426,7	316
317	100 489	31 855 013	17,8045	6,8185	2,50106	3,15457	995,88	78 923,9	317
318	101 124	32 157 432	17,8326	6,8256	2,50243	3,14465	999,03	79 422,6	318
319	101 761	32 461 759	17,8606	6,8328	2,50379	3,13480	1002,2	79 922,9	319
320	102 400	32 768 000	17,8885	6,8399	2,50515	3,12500	1005,3	80 424,8	320
321	103 041	33 076 161	17,9165	6,8470	2,50651	3,11526	1008,5	80 928,2	321
322	103 684	33 386 248	17,9444	6,8541	2,50786	3,10559	1011,6	81 433,2	322
323	104 329	33 698 267	17,9722	6,8612	2,50920	3,09593	1014,7	81 939,8	323
324	104 976	34 012 224	18,0000	6,8683	2,51055	3,08642	1017,9	82 448,0	324
325	105 625	34 328 125	18,0278	6,8753	2,51188	3,07692	1021,0	82 957,7	325
326	106 276	34 645 976	18,0555	6,8824	2,51322	3,06748	1024,2	83 469,0	326
327	106 929	34 965 783	18,0831	6,8894	2,51455	3,05810	1027,3	83 981,8	327
328	107 584	35 287 552	18,1108	6,8964	2,51587	3,04878	1030,4	84 496,3	328
329	108 241	35 611 289	18,1384	6,9034	2,51720	3,03951	1033,6	85 012,3	329
330	108 900	35 937 000	18,1659	6,9104	2,51851	3,03030	1036,7	85 529,9	330
331	109 561	36 264 691	18,1934	6,9174	2,51983	3,02115	1039,9	86 049,0	331
332	110 224	36 594 368	18,2209	6,9244	2,52114	3,01205	1043,0	86 569,7	332
333	110 889	36 926 037	18,2483	6,9313	2,52244	3,00300	1046,2	87 092,0	333
334	111 556	37 259 704	18,2757	6,9382	2,52375	2,99401	1049,3	87 615,9	334
335	112 225	37 595 375	18,3030	6,9451	2,52504	2,98507	1052,4	88 141,3	335
336	112 896	37 933 056	18,3303	6,9521	2,52634	2,97619	1055,6	88 668,3	336
337	113 569	38 272 753	18,3576	6,9589	2,52763	2,96736	1058,7	89 196,9	337
338	114 244	38 614 472	18,3848	6,9658	2,52892	2,95858	1061,9	89 727,0	338
339	114 921	38 958 219	18,4120	6,9727	2,53020	2,94985	1065,0	90 258,7	339
340	115 600	39 304 000	18,4391	6,9795	2,53148	2,94118	1068,1	90 792,0	340
341	116 281	39 651 821	18,4662	6,9864	2,53275	2,93255	1071,3	91 326,9	341
342	116 964	40 001 688	18,4932	6,9932	2,53403	2,92398	1074,4	91 863,3	342
343	117 649	40 353 607	18,5203	7,0000	2,53529	2,91545	1077,6	92 401,3	343
344	118 336	40 707 584	18,5472	7,0068	2,53656	2,90698	1080,7	92 940,9	344
345	119 025	41 063 625	18,5742	7,0136	2,53782	2,89855	1033,8	93 482,0	345
346	119 716	41 421 736	18,6011	7,0203	2,53903	2,89017	1087,0	94 024,7	346
347	120 409	41 781 923	18,6279	7,0271	2,54033	2,88184	1090,1	94 569,0	347
348	121 104	42 144 192	18,6548	7,0338	2,54158	2,87356	1093,3	95 114,9	348
349	121 801	42 508 549	18,6815	7,0406	2,54283	2,86533	1096,4	95 662,3	349
350	122 500	42 875 000	18,7083	7,0473	2,54407	2,85714	1099,6	96 211,3	350

351—400

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
351	123 201	43 243 551	18,7350	7,0540	2,54531	2,84900	1102,7	96 761,8	351
352	123 904	43 614 208	18,7617	7,0607	2,54654	2,84091	1105,8	97 314,0	352
353	124 609	43 986 977	18,7883	7,0674	2,54777	2,83286	1109,0	97 867,7	353
354	125 316	44 361 864	18,8149	7,0740	2,54900	2,82486	1112,1	98 423,0	354
355	126 025	44 738 875	18,8414	7,0807	2,55023	2,81690	1115,3	98 979,8	355
356	126 736	45 118 016	18,8680	7,0873	2,55145	2,80899	1118,4	99 538,2	356
357	127 449	45 499 293	18,8944	7,0940	2,55267	2,80112	1121,5	100 098	357
358	128 164	45 882 712	18,9209	7,1006	2,55388	2,79330	1124,7	100 660	358
359	128 881	46 268 279	18,9473	7,1072	2,55509	2,78552	1127,8	101 223	359
360	129 600	46 656 000	18,9737	7,1138	2,55630	2,77778	1131,0	101 788	360
361	130 321	47 045 881	19,0000	7,1204	2,55751	2,77008	1134,1	102 354	361
362	131 044	47 437 928	19,0263	7,1269	2,55871	2,76243	1137,3	102 922	362
363	131 769	47 832 147	19,0526	7,1335	2,55991	2,75482	1140,4	103 491	363
364	132 496	48 228 544	19,0788	7,1400	2,56110	2,74725	1143,5	104 062	364
365	133 225	48 627 125	19,1050	7,1466	2,56229	2,73973	1146,7	104 635	365
366	133 956	49 027 896	19,1311	7,1531	2,56348	2,73224	1149,8	105 209	366
367	134 689	49 430 863	19,1572	7,1596	2,56467	2,72480	1153,0	105 785	367
368	135 424	49 836 032	19,1833	7,1661	2,56585	2,71739	1156,1	106 362	368
369	136 161	50 243 409	19,2094	7,1726	2,56703	2,71003	1159,2	106 941	369
370	136 900	50 653 000	19,2354	7,1791	2,56820	2,70270	1162,4	107 521	370
371	137 641	51 064 811	19,2614	7,1855	2,56937	2,69542	1165,5	108 103	371
372	138 384	51 478 848	19,2873	7,1920	2,57054	2,68817	1168,7	108 687	372
373	139 129	51 895 117	19,3132	7,1984	2,57171	2,68097	1171,8	109 272	373
374	139 876	52 313 624	19,3391	7,2048	2,57287	2,67380	1175,0	109 858	374
375	140 625	52 734 375	19,3649	7,2112	2,57403	2,66667	1178,1	110 447	375
376	141 376	53 157 376	19,3907	7,2177	2,57519	2,65957	1181,2	111 036	376
377	142 129	53 582 633	19,4165	7,2240	2,57634	2,65252	1184,4	111 628	377
378	142 884	54 010 152	19,4422	7,2304	2,57749	2,64550	1187,5	112 221	378
379	143 641	54 439 939	19,4679	7,2368	2,57864	2,63852	1190,7	112 815	379
380	144 400	54 872 000	19,4936	7,2432	2,57978	2,63158	1193,8	113 411	380
381	145 161	55 306 341	19,5192	7,2495	2,58092	2,62467	1196,9	114 009	381
382	145 924	55 742 968	19,5448	7,2558	2,58206	2,61780	1200,1	114 608	382
383	146 689	56 181 887	19,5704	7,2622	2,58320	2,61097	1203,2	115 209	383
384	147 456	56 623 104	19,5959	7,2685	2,58433	2,60417	1206,4	115 812	384
385	148 225	57 066 625	19,6214	7,2748	2,58546	2,59740	1209,5	116 416	385
386	148 996	57 512 456	19,6469	7,2811	2,58659	2,59067	1212,7	117 021	386
387	149 769	57 960 603	19,6723	7,2874	2,58771	2,58398	1215,8	117 628	387
388	150 544	58 411 072	19,6977	7,2936	2,58883	2,57732	1218,9	118 237	388
389	151 321	58 863 869	19,7231	7,2999	2,58995	2,57069	1222,1	118 847	389
390	152 100	59 319 000	19,7484	7,3061	2,59106	2,56410	1225,2	119 459	390
391	152 881	59 776 471	19,7737	7,3124	2,59218	2,55754	1228,4	120 072	391
392	153 664	60 236 288	19,7990	7,3186	2,59329	2,55102	1231,5	120 687	392
393	154 449	60 698 457	19,8242	7,3248	2,59439	2,54453	1234,6	121 304	393
394	155 236	61 162 984	19,8494	7,3310	2,59550	2,53807	1237,8	121 922	394
395	156 025	61 629 875	19,8746	7,3372	2,59660	2,53165	1240,9	122 542	395
396	156 816	62 099 136	19,8997	7,3434	2,59770	2,52525	1244,1	123 163	396
397	157 609	62 570 773	19,9249	7,3496	2,59879	2,51889	1247,2	123 786	397
398	158 404	63 044 792	19,9499	7,3558	2,59988	2,51256	1250,4	124 410	398
399	159 201	63 521 199	19,9750	7,3619	2,60097	2,50627	1253,5	125 036	399
400	160 000	64 000 000	20,0000	7,3681	2,60206	2,50000	1256,6	125 664	400

401—450

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
401	160 801	64 481 201	20,0250	7,3742	2,60314	2,49377	1259,8	126 293	401
402	161 604	64 964 808	20,0499	7,3803	2,60423	2,48756	1262,9	126 923	402
403	162 409	65 450 827	20,0749	7,3864	2,60531	2,48139	1266,1	127 556	403
404	163 216	65 939 264	20,0998	7,3925	2,60638	2,47525	1269,2	128 190	404
405	164 025	66 430 125	20,1246	7,3986	2,60746	2,46914	1272,3	128 825	405
406	164 836	66 923 416	20,1494	7,4047	2,60853	2,46305	1275,5	129 462	406
407	165 649	67 419 143	20,1742	7,4108	2,60959	2,45700	1278,6	130 100	407
408	166 464	67 917 312	20,1990	7,4169	2,61066	2,45098	1281,8	130 741	408
409	167 281	68 417 929	20,2237	7,4229	2,61172	2,44499	1284,9	131 382	409
410	168 100	68 921 000	20,2485	7,4290	2,61278	2,43902	1288,1	132 025	410
411	168 921	69 426 531	20,2731	7,4350	2,61384	2,43309	1291,2	132 670	411
412	169 744	69 934 528	20,2978	7,4410	2,61490	2,42718	1294,3	133 317	412
413	170 569	70 444 997	20,3224	7,4470	2,61595	2,42131	1297,5	133 965	413
414	171 396	70 957 944	20,3470	7,4530	2,61700	2,41546	1300,6	134 614	414
415	172 225	71 473 375	20,3715	7,4590	2,61805	2,40964	1303,8	135 265	415
416	173 056	71 991 296	20,3961	7,4650	2,61909	2,40385	1306,9	135 918	416
417	173 889	72 511 713	20,4206	7,4710	2,62014	2,39808	1310,0	136 572	417
418	174 724	73 034 632	20,4450	7,4770	2,62118	2,39234	1313,2	137 228	418
419	175 561	73 560 059	20,4695	7,4829	2,62221	2,38663	1316,3	137 885	419
420	176 400	74 088 000	20,4939	7,4889	2,62325	2,38095	1319,5	138 544	420
421	177 241	74 618 461	20,5183	7,4948	2,62428	2,37530	1322,6	139 205	421
422	178 084	75 151 448	20,5426	7,5007	2,62531	2,36967	1325,8	139 867	422
423	178 929	75 686 967	20,5670	7,5067	2,62634	2,36407	1328,9	140 531	423
424	179 776	76 225 024	20,5913	7,5126	2,62737	2,35849	1332,0	141 196	424
425	180 625	76 765 625	20,6155	7,5185	2,62839	2,35294	1335,2	141 863	425
426	181 476	77 308 776	20,6398	7,5244	2,62941	2,34742	1338,3	142 531	426
427	182 329	77 854 483	20,6640	7,5302	2,63043	2,34192	1341,5	143 201	427
428	183 184	78 402 752	20,6882	7,5361	2,63144	2,33645	1344,6	143 872	428
429	184 041	78 953 589	20,7123	7,5420	2,63246	2,33100	1347,7	144 545	429
430	184 900	79 507 000	20,7364	7,5478	2,63347	2,32558	1350,9	145 220	430
431	185 761	80 062 991	20,7605	7,5537	2,63448	2,32019	1354,0	145 896	431
432	186 624	80 621 568	20,7846	7,5595	2,63548	2,31481	1357,2	146 574	432
433	187 489	81 182 737	20,8087	7,5654	2,63649	2,30947	1360,3	147 254	433
434	188 356	81 746 504	20,8327	7,5712	2,63749	2,30415	1363,5	147 934	434
435	189 225	82 312 875	20,8567	7,5770	2,63849	2,29885	1366,6	148 617	435
436	190 096	82 881 856	20,8806	7,5828	2,63949	2,29358	1369,7	149 301	436
437	190 969	83 453 453	20,9045	7,5886	2,64048	2,28833	1372,9	149 987	437
438	191 844	84 027 672	20,9284	7,5944	2,64147	2,28311	1376,0	150 674	438
439	192 721	84 604 519	20,9523	7,6001	2,64246	2,27790	1379,2	151 363	439
440	193 600	85 184 000	20,9762	7,6059	2,64345	2,27273	1382,3	152 053	440
441	194 481	85 766 121	21,0000	76,117	2,64444	2,26757	1385,4	152 745	441
442	195 364	86 350 888	21,0238	76,174	2,64542	2,26244	1388,6	153 439	442
443	196 249	86 938 307	21,0476	7,6232	2,64640	2,25734	1391,7	154 134	443
444	197 136	87 528 384	21,0713	7,6289	2,64738	2,25225	1394,9	154 830	444
445	198 025	88 121 125	21,0950	7,6346	2,64836	2,24719	1398,0	155 528	445
446	198 916	88 716 536	21,1187	7,6403	2,64933	2,24215	1401,2	156 228	446
447	199 809	89 314 623	21,1424	7,6460	2,65031	2,23714	1404,3	156 930	447
448	200 704	89 915 392	21,1660	7,6517	2,65128	2,23214	1407,4	157 633	448
449	201 601	90 518 849	21,1896	7,6574	2,65225	2,22717	1410,6	158 337	449
450	202 500	91 125 000	21,2132	7,6631	2,65321	2,22222	1413,7	159 043	450

451—500

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
451	203 401	91 733 851	21,2368	7,6688	2,65418	2,21729	1416,9	159 751	451
452	204 304	92 345 408	21,2603	7,6744	2,65514	2,21239	1420,0	160 460	452
453	205 209	92 959 677	21,2838	7,6801	2,65610	2,20751	1423,1	161 171	453
454	206 116	93 576 664	21,3073	7,6857	2,65706	2,20264	1426,3	161 883	454
455	207 025	94 196 375	21,3307	7,6914	2,65801	2,19780	1429,4	162 597	455
456	207 936	94 818 816	21,3542	7,6970	2,65896	2,19298	1432,6	163 313	456
457	208 849	95 443 993	21,3776	7,7026	2,65992	2,18818	1435,7	164 030	457
458	209 764	96 071 912	21,4009	7,7082	2,66087	2,18341	1438,8	164 748	458
459	210 681	96 702 579	21,4243	7,7138	2,66181	2,17865	1442,0	165 463	459
460	211 600	97 336 000	21,4476	7,7194	2,66276	2,17391	1445,1	166 190	460
461	212 521	97 972 181	21,4709	7,7250	2,66370	2,16920	1448,3	166 914	461
462	213 444	98 611 128	21,4942	7,7306	2,66464	2,16450	1451,4	167 639	462
463	214 369	99 252 847	21,5174	7,7362	2,66558	2,15983	1454,6	168 365	463
464	215 296	99 897 344	21,5407	7,7418	2,66652	2,15517	1457,7	169 093	464
465	216 225	100 544 625	21,5639	7,7473	2,66745	2,15054	1460,8	169 823	465
466	217 156	101 194 696	21,5870	7,7529	2,66839	2,14592	1464,0	170 554	466
467	218 089	101 847 563	21,6102	7,7584	2,66932	2,14133	1467,1	171 287	467
468	219 024	102 503 232	21,6333	7,7639	2,67025	2,13675	1470,3	172 021	468
469	219 961	103 161 709	21,6564	7,7695	2,67117	2,13220	1473,4	172 757	469
470	220 900	103 823 000	21,6795	7,7750	2,67210	2,12766	1476,5	173 494	470
471	221 841	104 487 111	21,7025	7,7805	2,67302	2,12314	1479,7	174 234	471
472	222 784	105 154 048	21,7256	7,7860	2,67394	2,11864	1482,8	174 974	472
473	223 729	105 823 817	21,7486	7,7915	2,67486	2,11416	1486,0	175 716	473
474	224 676	106 496 424	21,7715	7,7970	2,67578	2,10970	1489,1	176 460	474
475	225 625	107 171 875	21,7945	7,8025	2,67669	2,10526	1492,3	177 205	475
476	226 576	107 850 176	21,8174	7,8079	2,67761	2,10084	1495,4	177 952	476
477	227 529	108 531 333	21,8403	7,8134	2,67852	2,09644	1498,5	178 701	477
478	228 484	109 215 352	21,8632	7,8188	2,67943	2,09205	1501,7	179 451	478
479	229 441	109 902 239	21,8861	7,8243	2,68034	2,08768	1504,8	180 203	479
480	230 400	110 592 000	21,9089	7,8297	2,68124	2,08333	1508,0	180 956	480
481	231 361	111 284 641	21,9317	7,8352	2,68215	2,07900	1511,1	181 711	481
482	232 324	111 980 168	21,9545	7,8406	2,68305	2,07469	1514,2	182 467	482
483	233 289	112 678 587	21,9773	7,8460	2,68395	2,07039	1517,4	183 225	483
484	234 256	113 379 904	22,0000	7,8514	2,68485	2,06612	1520,5	183 984	484
485	235 225	114 084 125	22,0227	7,8568	2,68574	2,06186	1523,7	184 745	485
486	236 196	114 791 256	22,0454	7,8622	2,68664	2,05761	1526,8	185 508	486
487	237 169	115 501 303	22,0681	7,8676	2,68753	2,05339	1530,0	186 272	487
488	238 144	116 214 272	22,0907	7,8730	2,68842	2,04918	1533,1	187 038	488
489	239 121	116 930 169	22,1133	7,8784	2,68931	2,04499	1536,2	187 805	489
490	240 100	117 649 000	22,1359	7,8837	2,69020	2,04082	1539,4	188 574	490
491	241 081	118 370 771	22,1585	7,8891	2,69108	2,03666	1542,5	189 345	491
492	242 064	119 095 488	22,1811	7,8944	2,69197	2,03252	1545,7	190 117	492
493	243 049	119 823 157	22,2036	7,8998	2,69285	2,02840	1548,8	190 890	493
494	244 036	120 553 784	22,2261	7,9051	2,69373	2,02429	1551,9	191 665	494
495	245 025	121 287 375	22,2486	7,9105	2,69461	2,02020	1555,1	192 442	495
496	246 016	122 023 936	22,2711	7,9158	2,69548	2,01613	1558,2	193 221	496
497	247 009	122 763 473	22,2935	7,9211	2,69636	2,01207	1561,4	194 000	497
498	248 004	123 505 992	22,3159	7,9264	2,69723	2,00803	1564,5	194 782	498
499	249 001	124 251 499	22,3383	7,9317	2,69810	2,00401	1567,7	195 565	499
500	250 000	125 000 000	22,3607	7,9370	2,69897	2,00000	1570,8	196 350	500

501 — 550

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
501	251 001	125 751 501	22,3830	7,9423	2,69984	1,99601	1573,9	197 136	501
502	252 004	126 506 008	22,4054	7,9476	2,70070	1,99203	1577,1	197 923	502
503	253 009	127 263 527	22,4277	7,9528	2,70157	1,98807	1580,2	198 713	503
504	254 016	128 024 064	22,4499	7,9581	2,70243	1,98413	1583,4	199 504	504
505	255 025	128 787 625	22,4722	7,9634	2,70329	1,98020	1586,5	200 296	605
506	256 036	129 554 216	22,4944	7,9686	2,70415	1,97628	1589,6	201 090	506
507	257 049	130 323 843	22,5167	7,9739	2,70501	1,97239	1592,8	201 886	507
508	258 064	131 096 512	22,5389	7,9791	2,70586	1,96850	1595,9	202 683	508
509	259 081	131 872 229	22,5610	7,9843	2,70672	1,96464	1599,1	203 482	509
510	260 100	132 651 000	22,5832	7,9896	2,70757	1,96078	1602,2	204 282	510
511	261 121	133 432 831	22,6053	7,9948	2,70842	1,95695	1605,4	205 084	511
512	262 144	134 217 728	22,6274	8,0000	2,70927	1,95312	1608,5	205 887	512
513	263 169	135 005 697	22,6495	8,0052	2,71012	1,94932	1611,6	206 692	513
514	264 196	135 796 744	22,6716	8,0104	2,71096	1,94553	1614,8	207 499	514
515	265 225	136 590 875	22,6936	8,0156	2,71181	1,94175	1617,9	208 307	515
516	266 256	137 388 096	22,7156	8,0208	2,71265	1,93793	1621,1	209 117	516
517	267 289	138 188 413	22,7376	8,0260	2,71349	1,93424	1624,2	209 923	517
518	268 324	138 991 832	22,7596	8,0311	2,71433	1,93050	1627,3	210 741	518
519	269 361	139 798 359	22,7816	8,0363	2,71517	1,92678	1630,5	211 556	519
520	270 400	140 608 000	22,8035	8,0415	2,71600	1,92308	1633,6	212 372	520
521	271 441	141 420 761	22,8254	8,0466	2,71684	1,91939	1636,8	213 189	521
522	272 484	142 236 648	22,8473	8,0517	2,71767	1,91571	1639,9	214 008	522
523	273 529	143 055 667	22,8692	8,0569	2,71850	1,91205	1643,1	214 829	523
524	274 576	143 877 824	22,8910	8,0620	2,71933	1,90840	1646,2	215 651	524
525	275 625	144 703 125	22,9129	8,0671	2,72016	1,90476	1649,3	216 475	525
526	276 676	145 531 576	22,9347	8,0723	2,72099	1,90114	1652,5	217 301	526
527	277 729	146 363 183	22,9565	8,0774	2,72181	1,89753	1655,6	218 128	527
528	278 784	147 197 952	22,9783	8,0825	2,72263	1,89394	1658,8	218 956	528
529	279 841	148 035 889	23,0000	8,0876	2,72346	1,89036	1661,9	219 787	529
530	280 900	148 877 000	23,0217	8,0927	2,72428	1,88679	1665,0	220 618	530
531	281 961	149 721 291	23,0434	8,0978	2,72509	1,88324	1668,2	221 452	531
532	283 024	150 568 768	23,0651	8,1028	2,72591	1,87970	1671,3	222 287	532
533	284 089	151 419 437	23,0868	8,1079	2,72673	1,87617	1674,5	223 123	533
534	285 156	152 273 304	23,1084	8,1130	2,72754	1,87266	1677,6	223 961	534
535	286 225	153 130 375	23,1301	8,1180	2,72835	1,86916	1680,8	224 801	535
536	287 296	153 990 656	23,1517	8,1231	2,72916	1,86567	1683,9	225 642	536
537	288 369	154 854 153	23,1733	8,1281	2,72997	1,86220	1687,0	226 484	537
538	289 444	155 720 872	23,1948	8,1332	2,73078	1,85874	1690,2	227 329	538
539	290 521	156 590 819	23,2164	8,1382	2,73159	1,85529	1693,3	228 175	539
540	291 600	157 464 000	23,2379	8,1433	2,73239	1,85185	1696,5	229 022	540
541	292 681	158 340 421	23,2594	8,1483	2,73320	1,84843	1699,6	229 871	541
542	293 764	159 220 088	23,2809	8,1533	2,73400	1,84502	1702,7	230 722	542
543	294 849	160 103 007	23,3024	8,1583	2,73480	1,84162	1705,9	231 574	543
544	295 936	160 989 184	23,3238	8,1633	2,73560	1,83824	1709,0	232 428	544
545	297 025	161 878 625	23,3452	8,1683	2,73640	1,83486	1712,2	233 283	545
546	298 116	162 771 336	23,3666	8,1733	2,73719	1,83150	1715,3	234 140	546
547	299 209	163 667 323	23,3880	8,1783	2,73799	1,82815	1718,5	234 998	547
548	300 304	164 566 592	23,4094	8,1833	2,73878	1,82482	1721,6	235 858	543
549	301 401	165 469 149	23,4307	8,1882	2,73957	1,82149	1724,7	236 720	549
550	302 500	166 375 000	23,4521	8,1932	2,74036	1,81818	1727,9	237 583	550

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
551	303 601	167 284 151	23,4734	8,1982	2,74115	1,81488	1731,0	238 448	551
552	304 704	168 196 608	23,4947	8,2031	2,74194	1,81159	1734,2	239 314	552
553	305 809	169 112 377	23,5160	8,2081	2,74273	1,80832	1737,3	240 182	553
554	306 916	170 031 464	23,5372	8,2130	2,74351	1,80505	1740,4	241 051	554
555	308 025	170 953 875	23,5584	8,2180	2,74429	1,80180	1743,6	241 922	555
556	309 136	171 879 616	23,5797	8,2229	2,74507	1,79856	1746,7	242 795	556
557	310 249	172 808 693	23,6008	8,2278	2,74586	1,79533	1749,9	243 669	557
558	311 364	173 741 112	23,6220	8,2327	2,74663	1,79211	1753,0	244 545	558
559	312 481	174 676 879	23,6432	8,2377	2,74741	1,78891	1756,2	245 422	559
560	313 600	175 616 000	23,6643	8,2426	2,74819	1,78571	1759,3	246 301	560
561	314 721	176 558 481	23,6854	8,2475	2,74896	1,78253	1762,4	247 181	561
562	315 844	177 504 328	23,7065	8,2524	2,74974	1,77936	1765,6	248 063	562
563	316 969	178 453 547	23,7276	8,2573	2,75051	1,77620	1768,7	248 947	563
564	318 096	179 406 144	23,7487	8,2621	2,75128	1,77305	1771,9	249 832	564
565	319 225	180 362 125	23,7697	8,2670	2,75205	1,76991	1775,0	250 719	565
566	320 356	181 321 496	23,7908	8,2719	2,75282	1,76678	1778,1	251 607	566
567	321 489	182 284 263	23,8118	8,2768	2,75358	1,76367	1781,3	252 497	567
568	322 624	183 250 432	23,8328	8,2816	2,75435	1,76056	1784,4	253 388	568
569	323 761	184 220 009	23,8537	8,2865	2,75511	1,75747	1787,6	254 281	569
570	324 900	185 193 000	23,8747	8,2913	2,75587	1,75439	1790,7	255 176	570
571	326 041	186 169 411	23,8956	8,2962	2,75664	1,75131	1793,8	256 072	571
572	327 184	187 149 248	23,9165	8,3010	2,75740	1,74825	1797,0	256 970	572
573	328 329	188 132 517	23,9374	8,3059	2,75815	1,74520	1800,1	257 869	573
574	329 476	189 119 224	23,9583	8,3107	2,75891	1,74216	1803,3	258 770	574
575	330 625	190 109 375	23,9792	8,3155	2,75967	1,73913	1806,4	259 672	575
576	331 776	191 102 976	24,0000	8,3203	2,76042	1,73611	1809,6	260 576	576
577	332 929	192 100 033	24,0208	8,3251	2,76118	1,73310	1812,7	261 482	577
578	334 084	193 100 552	24,0416	8,3300	2,76193	1,73010	1815,8	262 389	578
579	335 241	194 104 539	24,0624	8,3348	2,76268	1,72712	1819,0	263 298	579
580	336 400	195 112 000	24,0832	8,3395	2,76343	1,72414	1822,1	264 208	580
581	337 561	196 122 941	24,1039	8,3443	2,76418	1,72117	1825,3	265 120	581
582	338 724	197 137 368	24,1247	8,3491	2,76492	1,71821	1828,4	266 033	582
583	339 889	193 155 287	24,1454	8,3539	2,76567	1,71527	1831,6	266 948	583
584	341 056	199 176 704	24,1661	8,3587	2,76641	1,71233	1834,7	267 865	584
585	342 225	200 201 625	24,1868	8,3634	2,76716	1,70940	1837,8	268 783	585
586	343 396	201 230 056	24,2074	8,3682	2,76790	1,70648	1841,0	269 703	586
587	344 569	202 262 003	24,2281	8,3730	2,76864	1,70358	1844,1	270 624	587
588	345 744	203 297 472	24,2487	8,3777	2,76933	1,70068	1847,3	271 547	588
589	346 921	204 336 469	24,2693	8,3825	2,77012	1,69779	1850,4	272 471	589
590	348 100	205 379 000	24,2899	8,3872	2,77085	1,69492	1853,5	273 397	590
591	349 281	206 425 071	24,3105	8,3919	2,77159	1,69205	1856,7	274 325	591
592	350 464	207 474 688	24,3311	8,3967	2,77232	1,68919	1859,8	275 254	592
593	351 649	208 527 857	24,3516	8,4014	2,77305	1,68634	1863,0	276 184	593
594	352 836	209 584 584	24,3721	8,4061	2,77379	1,68350	1866,1	277 117	594
595	354 025	210 644 875	24,3926	8,4108	2,77452	1,68067	1869,2	278 051	595
596	355 216	211 708 736	24,4131	8,4155	2,77525	1,67785	1872,4	278 986	596
597	356 409	212 776 173	24,4336	8,4202	2,77597	1,67504	1875,5	279 923	597
598	357 604	213 847 192	24,4540	8,4249	2,77670	1,67224	1878,7	280 862	598
599	358 801	214 921 799	24,4745	8,4296	2,77743	1,66945	1881,8	281 802	599
600	360 000	216 000 000	24,4949	8,4343	2,77815	1,66667	1885,0	282 743	600

601 — 650

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
601	361 201	217 081 801	24,5153	8,4390	2,77887	1,66389	1888,1	283 687	601
602	362 404	218 167 208	24,5357	8,4437	2,77960	1,66113	1891,2	284 631	602
603	363 609	219 256 227	24,5561	8,4484	2,78032	1,65837	1894,4	285 578	603
604	364 816	220 348 864	24,5764	8,4530	2,78104	1,65563	1897,5	286 526	604
605	366 025	221 445 125	24,5967	8,4577	2,78176	1,65289	1900,7	287 475	605
606	367 236	222 545 016	24,6171	8,4623	2,78247	1,65017	1903,8	288 426	606
607	368 449	223 648 543	24,6374	8,4670	2,78319	1,64745	1906,9	289 379	607
608	369 664	224 755 712	24,6577	8,4716	2,78390	1,64474	1910,1	290 333	608
609	370 881	225 866 529	24,6779	8,4763	2,78462	1,64204	1913,2	291 289	609
610	372 100	226 981 000	24,6982	8,4809	2,78533	1,63934	1916,4	292 247	610
611	373 321	228 099 131	24,7184	8,4856	2,78604	1,63666	1919,5	293 206	611
612	374 544	229 220 928	24,7386	8,4902	2,78675	1,63399	1922,7	294 166	612
613	375 769	230 346 397	24,7588	8,4948	2,78746	1,63132	1925,8	295 128	613
614	376 996	231 475 544	24,7790	8,4994	2,78817	1,62866	1928,9	296 092	614
615	378 225	232 608 375	24,7992	8,5040	2,78888	1,62602	1932,1	297 057	615
616	379 456	233 744 896	24,8193	8,5086	2,78958	1,62338	1935,2	298 024	616
617	380 689	234 885 113	24,8395	8,5132	2,79029	1,62075	1938,4	298 992	617
618	381 924	236 029 032	24,8596	8,5178	2,79099	1,61812	1941,5	299 962	618
619	383 161	237 176 659	24,8797	8,5224	2,79169	1,61551	1944,6	300 934	619
620	384 400	238 328 000	24,8998	8,5270	2,79239	1,61290	1947,8	301 907	620
621	385 641	239 483 061	24,9199	8,5316	2,79309	1,61031	1950,9	302 882	621
622	386 884	240 641 848	24,9399	8,5362	2,79379	1,60772	1954,1	303 858	622
623	388 129	241 804 367	24,9600	8,5408	2,79449	1,60514	1957,2	304 836	623
624	389 376	242 970 624	24,9800	8,5453	2,79518	1,60256	1960,4	305 815	624
625	390 625	244 140 625	25,0000	8,5499	2,79588	1,60000	1963,5	306 796	625
626	391 876	245 314 376	25,0200	8,5544	2,79657	1,59744	1966,6	307 779	626
627	393 129	246 491 883	25,0400	8,5590	2,79727	1,59490	1969,8	308 763	627
628	394 384	247 673 152	25,0599	8,5635	2,79796	1,59236	1972,9	309 748	628
629	395 641	248 858 189	25,0799	8,5681	2,79865	1,58983	1976,1	310 736	629
630	396 900	250 047 000	25,0998	8,5726	2,79934	1,58730	1979,2	311 725	630
631	398 161	251 239 591	25,1197	8,5772	2,80003	1,58479	1982,3	312 715	631
632	399 424	252 435 968	25,1396	8,5817	2,80072	1,58228	1985,5	313 707	632
633	400 689	253 636 137	25,1595	8,5862	2,80140	1,57978	1988,6	314 700	633
634	401 956	254 840 104	25,1794	8,5907	2,80209	1,57729	1991,8	315 696	634
635	403 225	256 047 875	25,1992	8,5952	2,80277	1,57480	1994,9	316 692	635
636	404 496	257 259 456	25,2190	8,5997	2,80346	1,57233	1998,1	317 690	636
637	405 769	258 474 853	25,2389	8,6043	2,80414	1,56986	2001,2	318 690	637
638	407 044	259 694 072	25,2587	8,6088	2,80482	1,56740	2004,3	319 692	638
639	408 321	260 917 119	25,2784	8,6132	2,80550	1,56495	2007,5	320 695	639
640	409 600	262 144 000	25,2982	8,6177	2,80618	1,56250	2010,6	321 699	640
641	410 881	263 374 721	25,3180	8,6222	2,80686	1,56006	2013,8	322 705	641
642	412 164	264 609 288	25,3377	8,6267	2,80754	1,55763	2016,9	323 713	642
643	413 449	265 847 707	25,3574	8,6312	2,80821	1,55521	2020,0	324 722	643
644	414 736	267 089 984	25,3772	8,6357	2,80889	1,55280	2023,2	325 733	644
645	416 025	268 336 125	25,3969	8,6401	2,80956	1,55039	2026,3	326 745	645
646	417 316	269 586 136	25,4165	8,6446	2,81023	1,54799	2029,5	327 759	646
647	418 609	270 840 023	25,4362	8,6490	2,81090	1,54560	2032,6	328 775	647
648	419 904	272 097 792	25,4558	8,6535	2,81458	1,54321	2035,8	329 792	648
649	421 201	273 359 449	25,4755	8,6579	2,81224	1,54083	2038,9	330 810	649
650	422 500	274 625 000	25,4951	8,6624	2,81291	1,53846	2042,0	331 831	650

651—700

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
651	423 801	275 894 451	25,5147	8,6668	2,81358	1,53610	2045,2	332 853	651
652	425 104	277 167 808	25,5343	8,6713	2,81425	1,53374	2048,3	333 876	652
653	426 409	278 445 077	25,5539	8,6757	2,81491	1,53139	2051,5	334 901	653
654	427 716	279 726 264	25,5734	8,6801	2,81558	1,52905	2054,6	335 927	654
655	429 025	281 011 375	25,5930	8,6845	2,81624	1,52672	2057,7	336 955	655
656	430 336	282 300 416	25,6125	8,6890	2,81690	1,52439	2060,9	337 985	656
657	431 649	283 593 393	25,6320	8,6934	2,81757	1,52207	2064,0	339 016	657
658	432 964	284 890 312	25,6515	8,6978	2,81823	1,51976	2067,2	340 049	658
659	434 281	286 191 179	25,6710	8,7022	2,81889	1,51745	2070,3	341 084	659
660	435 600	287 496 000	25,6905	8,7066	2,81954	1,51515	2073,5	342 119	660
661	436 921	288 804 781	25,7099	8,7110	2,82020	1,51286	2076,6	343 157	661
662	438 244	290 117 528	25,7294	8,7154	2,82086	1,51057	2079,7	344 196	662
663	439 569	291 434 247	25,7488	8,7198	2,82151	1,50830	2082,9	345 237	663
664	440 896	292 754 944	25,7682	8,7241	2,82217	1,50602	2086,0	346 279	664
665	442 225	294 079 625	25,7876	8,7285	2,82282	1,50376	2089,2	347 323	665
666	443 556	295 408 296	25,8070	8,7329	2,82347	1,50150	2092,3	348 368	666
667	444 889	296 740 963	25,8263	8,7373	2,82413	1,49925	2095,4	349 415	667
668	446 224	298 077 632	25,8457	8,7416	2,82478	1,49701	2098,6	350 464	668
669	447 561	299 418 309	25,8650	8,7460	2,82543	1,49477	2101,7	351 514	669
670	448 900	300 763 000	25,8844	8,7503	2,82607	1,49254	2104,9	352 565	670
671	450 241	302 111 711	25,9037	8,7547	2,82672	1,49031	2108,0	353 618	671
672	451 584	303 464 448	25,9230	8,7590	2,82737	1,48810	2111,2	354 673	672
673	452 929	304 821 217	25,9422	8,7634	2,82802	1,48588	2114,3	355 730	673
674	454 276	306 182 024	25,9615	8,7677	2,82866	1,48368	2117,4	356 788	674
675	455 625	307 546 875	25,9808	8,7721	2,82930	1,48148	2120,6	357 847	675
676	456 976	308 915 776	26,0000	8,7764	2,82995	1,47929	2123,7	358 908	676
677	458 329	310 288 733	26,0192	8,7807	2,83059	1,47710	2126,9	359 971	677
678	459 684	311 665 752	26,0384	8,7850	2,83123	1,47493	2130,0	361 035	678
679	461 041	313 046 839	26,0576	8,7893	2,83187	1,47275	2133,1	362 101	679
680	462 400	314 432 000	26,0768	8,7937	2,83251	1,47059	2136,3	363 168	680
681	463 761	315 821 241	26,0960	8,7980	2,83315	1,46843	2139,4	364 237	681
682	465 124	317 214 568	26,1151	8,8023	2,83378	1,46628	2142,6	365 308	682
683	466 489	318 611 987	26,1343	8,8066	2,83442	1,46413	2145,7	366 380	683
684	467 856	320 013 504	26,1534	8,8109	2,83506	1,46199	2148,8	367 453	684
685	469 225	321 419 125	26,1725	8,8152	2,83569	1,45985	2152,0	368 528	685
686	470 596	322 828 856	26,1916	8,8194	2,83632	1,45773	2155,1	369 605	686
687	471 969	324 242 703	26,2107	8,8237	2,83696	1,45560	2158,3	370 684	687
688	473 344	325 660 672	26,2298	8,8280	2,83759	1,45349	2161,4	371 764	688
689	474 721	327 082 769	26,2488	8,8323	2,83922	1,45138	2164,6	372 845	689
690	476 100	328 509 000	26,2679	8,8366	2,83885	1,44928	2167,7	373 928	690
691	477 481	329 939 371	26,2869	8,8408	2,83948	1,44718	2170,8	375 013	691
692	478 864	331 373 888	26,3059	8,8451	2,84011	1,44509	2174,0	376 099	692
693	480 249	332 812 557	26,3249	8,8493	2,84073	1,44300	2177,1	377 187	693
694	481 636	334 255 384	26,3439	8,8536	2,84136	1,44092	2180,3	378 276	694
695	483 025	335 702 375	26,3629	8,8578	2,84198	1,43885	2183,4	379 367	695
696	484 416	337 153 536	26,3818	8,8621	2,84261	1,43678	2186,5	380 459	696
697	485 809	338 608 873	26,4008	8,8663	2,84323	1,43472	2189,7	381 553	697
698	487 204	340 068 392	26,4197	8,8706	2,84386	1,43266	2192,8	382 649	698
699	488 601	341 532 099	26,4386	8,8748	2,84448	1,43062	2196,0	383 746	699
700	490 000	343 000 000	26,4575	8,8790	2,84510	1,42857	2199,1	384 845	700

701—750

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
701	491 401	344 472 101	26,4764	8,8833	2,84572	1,42653	2202,3	385 945	701
702	492 804	345 948 408	26,4953	8,8875	2,84634	1,42450	2205,4	387 047	702
703	494 209	347 428 927	26,5141	8,8917	2,84695	1,42248	2208,5	388 151	703
704	495 616	348 913 664	26,5330	8,8959	2,84757	1,42045	2211,7	389 256	704
705	497 025	350 402 625	26,5518	8,9001	2,84819	1,41744	2214,8	390 363	705
706	498 436	351 895 816	26,5707	8,9043	2,84880	1,41643	2218,0	391 471	706
707	499 849	353 393 243	26,5895	8,9085	2,84942	1,41443	2221,1	392 580	707
708	501 264	354 894 912	26,6083	8,9127	2,85003	1,41243	2224,2	393 692	708
709	502 681	356 400 829	26,6271	8,9169	2,85065	1,41044	2227,4	394 805	709
710	504 100	357 911 000	26,6458	8,9211	2,85126	1,40845	2230,5	395 919	710
711	505 521	359 425 431	26,6646	8,9253	2,85187	1,40647	2233,7	397 035	711
712	506 944	360 944 128	26,6833	8,9295	2,85248	1,40449	2236,8	398 153	712
713	508 369	362 467 097	26,7021	8,9337	2,85309	1,40252	2240,0	399 272	713
714	509 796	363 994 344	26,7208	8,9378	2,85370	1,40056	2243,1	400 393	714
715	511 225	365 525 875	26,7395	8,9420	2,85431	1,39860	2246,2	401 515	715
716	512 656	367 061 696	26,7582	8,9462	2,85491	1,39665	2249,4	402 639	716
717	514 089	368 601 813	26,7769	8,9503	2,85552	1,39470	2252,5	403 765	717
718	515 524	370 146 232	26,7955	8,9545	2,85612	1,39276	2255,7	404 892	718
719	516 961	371 694 959	26,8142	8,9587	2,85673	1,39082	2258,8	406 020	719
720	518 400	373 248 000	26,8328	8,9628	2,85733	1,38889	2261,9	407 150	720
721	519 841	374 805 361	26,8514	8,9670	2,85794	1,38696	2265,1	408 282	721
722	521 284	376 367 048	26,8701	8,9711	2,85854	1,38504	2268,2	409 415	722
723	522 729	377 933 067	26,8887	8,9752	2,85914	1,38313	2271,4	410 550	723
724	524 176	379 503 424	26,9072	8,9794	2,85974	1,38122	2274,5	411 687	724
725	525 625	381 078 125	26,9258	8,9835	2,86034	1,37931	2277,7	412 825	725
726	527 076	382 657 176	26,9444	8,9876	2,86094	1,37741	2280,8	413 965	726
727	528 529	384 240 583	26,9629	8,9918	2,86153	1,37552	2283,9	415 106	727
728	529 984	385 828 352	26,9815	8,9959	2,86213	1,37363	2287,1	416 243	728
729	531 441	387 420 489	27,0000	9,0000	2,86273	1,37174	2290,2	417 393	729
730	532 900	389 017 000	27,0185	9,0041	2,86332	1,36986	2293,4	418 539	730
731	534 361	390 617 891	27,0370	9,0082	2,86392	1,36799	2296,5	419 686	731
732	535 824	392 223 163	27,0555	9,0123	2,86451	1,36612	2299,6	420 835	732
733	537 289	393 832 837	27,0740	9,0164	2,86510	1,36426	2302,8	421 986	733
734	538 756	395 446 904	27,0924	9,0205	2,86570	1,36240	2305,9	423 138	734
735	540 225	397 065 375	27,1109	9,0246	2,86629	1,36054	2309,1	424 293	735
736	541 696	398 688 256	27,1293	9,0287	2,86688	1,35870	2312,2	425 447	736
737	543 169	400 315 553	27,1477	9,0328	2,86747	1,35685	2315,4	426 604	737
738	544 644	401 947 272	27,1662	9,0369	2,86806	1,35501	2318,5	427 762	738
739	546 121	403 583 419	27,1846	9,0410	2,86864	1,35318	2321,6	428 922	739
740	547 600	405 224 000	27,2029	9,0450	2,86923	1,35135	2324,8	430 084	740
741	549 081	406 869 021	27,2213	9,0491	2,86982	1,34953	2327,9	431 247	741
742	550 564	408 518 488	27,2397	9,0532	2,87040	1,34771	2331,1	432 412	742
743	552 049	410 172 407	27,2580	9,0572	2,87099	1,34590	2334,2	433 578	743
744	553 536	411 830 784	27,2764	9,0613	2,87157	1,34409	2337,3	434 746	744
745	555 025	413 493 625	27,2947	9,0654	2,87216	1,34228	2340,5	435 917	745
746	556 516	415 160 936	27,3130	9,0694	2,87274	1,34048	2343,6	437 087	746
747	558 009	416 832 723	27,3313	9,0735	2,87332	1,33869	2346,8	438 259	747
748	559 504	418 508 992	27,3496	9,0775	2,87390	1,33690	2349,9	439 433	748
749	561 001	420 189 749	27,3679	9,0816	2,87448	1,33511	2353,1	440 609	749
750	562 500	421 875 000	27,3861	9,0856	2,87506	1,33333	2356,2	441 786	750

751—800

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
751	564 001	423 564 751	27,4044	9,0896	2,87564	1,33156	2359,3	442 965	751
752	565 504	425 259 008	27,4226	9,0937	2,87622	1,32979	2362,5	444 146	752
753	567 009	426 957 777	27,4408	9,0977	2,87679	1,32802	2365,6	445 328	753
754	568 516	428 661 064	27,4591	9,1017	2,87737	1,32626	2368,8	446 511	754
755	570 025	430 368 875	27,4773	9,1057	2,87795	1,32450	2371,9	447 697	755
756	571 536	432 081 216	27,4955	9,1098	2,87852	1,32275	2375,0	448 883	756
757	573 049	433 798 093	27,5136	9,1138	2,87910	1,32100	2378,2	450 072	757
758	574 564	435 519 512	27,5318	9,1178	2,87967	1,31926	2381,3	451 262	758
759	576 081	437 245 479	27,5500	9,1218	2,88024	1,31752	2384,5	452 453	759
760	577 600	438 976 000	27,5681	9,1258	2,88031	1,31579	2387,6	453 646	760
761	579 121	440 711 081	27,5862	9,1298	2,88138	1,31406	2390,8	454 841	761
762	580 644	442 450 728	27,6043	9,1338	2,88195	1,31234	2393,9	456 037	762
763	582 169	444 194 947	27,6225	9,1378	2,88252	1,31062	2397,0	457 234	763
764	583 696	445 943 744	27,6405	9,1418	2,88309	1,30890	2400,2	458 434	764
765	585 225	447 697 125	27,6586	9,1458	2,88366	1,30719	2403,3	459 635	765
766	586 756	449 455 096	27,6767	9,1498	2,88423	1,30548	2406,5	460 837	766
767	588 289	451 217 663	27,6948	9,1537	2,88480	1,30378	2409,6	462 031	767
768	589 824	452 984 832	27,7128	9,1577	2,88536	1,30208	2412,7	463 247	768
769	591 361	454 756 609	27,7308	9,1617	2,88593	1,30039	2415,9	464 454	769
770	592 900	456 533 000	27,7489	9,1657	2,88649	1,29870	2419,0	465 663	770
771	594 441	458 314 011	27,7669	9,1696	2,88705	1,29702	2422,2	466 873	771
772	595 984	460 099 648	27,7849	9,1736	2,88762	1,29534	2425,3	468 085	772
773	597 529	461 889 917	27,8029	9,1775	2,88818	1,29366	2428,5	469 298	773
774	599 076	463 684 824	27,8209	9,1815	2,88874	1,29199	2431,6	470 513	774
775	600 625	465 484 375	27,8388	9,1855	2,88930	1,29032	2434,7	471 730	775
776	602 176	467 288 576	27,8568	9,1894	2,88986	1,28866	2437,9	472 948	776
777	603 729	469 097 433	27,8747	9,1933	2,89042	1,28700	2441,0	474 168	777
778	605 284	470 910 952	27,8927	9,1973	2,89098	1,28535	2444,2	475 389	778
779	606 841	472 729 139	27,9106	9,2012	2,89154	1,28370	2447,3	476 612	779
780	608 400	474 552 000	27,9285	9,2052	2,89209	1,28205	2450,4	477 836	780
781	609 961	476 379 541	27,9464	9,2091	2,89265	1,28041	2453,6	479 062	781
782	611 524	478 211 768	27,9643	9,2130	2,89321	1,27877	2456,7	480 290	782
783	613 039	480 048 687	27,9821	9,2170	2,89376	1,27714	2459,9	481 519	783
784	614 656	481 890 304	28,0000	9,2209	2,89432	1,27551	2463,0	482 750	784
785	616 225	483 736 625	28,0179	9,2248	2,89487	1,27389	2466,2	483 982	785
786	617 796	485 587 656	28,0357	9,2287	2,89542	1,27226	2469,3	485 216	786
787	619 369	487 443 403	28,0535	9,2326	2,89597	1,27065	2472,4	486 451	787
788	620 944	489 303 872	28,0713	9,2365	2,89653	1,26904	2475,6	487 688	788
789	622 521	491 169 069	28,0891	9,2404	2,89708	1,26743	2478,7	488 927	789
790	624 100	493 039 000	28,1069	9,2443	2,89763	1,26582	2481,9	490 167	790
791	625 681	494 913 671	28,1247	9,2482	2,89818	1,26422	2485,0	491 409	791
792	627 264	496 793 088	28,1425	9,2521	2,89873	1,26263	2488,1	492 652	792
793	628 849	498 677 257	28,1603	9,2560	2,89927	1,26103	2491,3	493 897	793
794	630 436	500 566 184	28,1780	9,2599	2,89982	1,25945	2494,4	495 143	794
795	632 025	502 459 875	28,1957	9,2638	2,90037	1,25786	2497,6	496 391	795
796	633 616	504 358 336	28,2135	9,2677	2,90091	1,25628	2500,7	497 641	796
797	635 209	506 261 573	28,2312	9,2716	2,90146	1,25471	2503,8	498 892	797
798	636 804	508 169 592	28,2489	9,2754	2,90200	1,25313	2507,0	500 145	798
799	638 401	510 082 399	28,2666	9,2793	2,90255	1,25156	2510,1	501 399	799
800	640 000	512 000 000	28,2843	9,2832	2,90309	1,25000	2513,3	502 655	800

801—850

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
801	641 601	513 922 401	28,3019	9,2870	2,90363	1,24844	2516,4	503 912	801
802	643 204	515 849 608	28,3196	9,2909	2,90417	1,24688	2519,6	505 171	802
803	644 809	517 781 627	28,3373	9,2948	2,90472	1,24533	2522,7	506 432	803
804	646 416	519 718 464	28,3549	9,2986	2,90526	1,24378	2525,8	507 694	804
805	648 025	521 660 125	28,3725	9,3025	2,90580	1,24224	2529,0	508 958	805
806	649 636	523 606 616	28,3901	9,3063	2,90634	1,24069	2532,1	510 223	806
807	651 249	525 557 943	28,4077	9,3102	2,90687	1,23916	2535,3	511 490	807
808	652 864	527 514 112	28,4253	9,3140	2,90741	1,23762	2538,4	512 758	808
809	654 481	529 475 129	28,4429	9,3179	2,90795	1,23609	2541,5	514 028	809
810	656 100	531 441 000	28,4605	9,3217	2,90849	1,23457	2544,7	515 300	810
811	657 721	533 411 731	28,4781	9,3255	2,90902	1,23305	2547,8	516 573	811
812	659 344	535 387 328	28,4956	9,3294	2,90956	1,23153	2551,0	517 848	812
813	660 969	537 367 797	28,5132	9,3332	2,91009	1,23001	2554,1	519 124	813
814	662 596	539 353 144	28,5307	9,3370	2,91062	1,22850	2557,3	520 402	814
815	664 225	541 343 375	28,5482	9,3408	2,91116	1,22699	2560,4	521 681	815
816	665 856	543 338 496	28,5657	9,3447	2,91169	1,22549	2563,5	522 962	816
817	667 489	545 338 513	28,5832	9,3485	2,91222	1,22399	2566,7	524 245	817
818	669 124	547 343 432	28,6007	9,3523	2,91275	1,22249	2569,8	525 529	818
819	670 761	549 353 259	28,6182	9,3561	2,91328	1,22100	2573,0	526 814	819
820	672 400	551 368 000	28,6356	9,3599	2,91381	1,21951	2576,1	528 102	820
821	674 041	553 387 661	28,6531	9,3637	2,91434	1,21803	2579,2	529 391	821
822	675 684	555 412 248	28,6705	9,3675	2,91487	1,21655	2582,4	530 681	822
823	677 329	557 441 767	28,6880	9,3713	2,91540	1,21507	2585,5	531 973	823
824	678 976	559 476 224	28,7054	9,3751	2,91593	1,21359	2588,7	533 267	824
825	680 625	561 515 625	28,7228	9,3789	2,91645	1,21212	2591,8	534 562	825
826	682 276	563 559 976	28,7402	9,3827	2,91698	1,21065	2595,0	535 858	826
827	683 929	565 609 283	28,7576	9,3865	2,91751	1,20919	2598,1	537 157	827
828	685 584	567 663 552	28,7750	9,3902	2,91803	1,20773	2601,2	538 456	828
829	687 241	569 722 789	28,7924	9,3940	2,91855	1,20627	2604,4	539 758	829
830	688 900	571 787 000	28,8097	9,3978	2,91908	1,20482	2607,5	541 061	830
831	690 561	573 856 191	28,8271	9,4016	2,91960	1,20337	2610,7	542 365	831
832	692 224	575 930 368	28,8444	9,4053	2,92012	1,20192	2613,8	543 671	832
833	693 889	578 009 537	28,8617	9,4091	2,92065	1,20048	2616,9	544 979	833
834	695 556	580 093 704	28,8791	9,4129	2,92117	1,19904	2620,1	546 288	834
835	697 225	582 182 875	28,8964	9,4166	2,92169	1,19760	2623,2	547 599	835
836	698 896	584 277 056	28,9137	9,4204	2,92221	1,19617	2626,4	548 912	836
837	700 569	586 376 253	28,9310	9,4241	2,92273	1,19474	2629,5	550 226	837
838	702 244	588 480 472	28,9482	9,4279	2,92324	1,19332	2632,7	551 541	838
839	703 921	590 589 719	28,9655	9,4316	2,92376	1,19190	2635,8	552 858	839
840	705 600	592 704 000	28,9828	9,4354	2,92428	1,19048	2638,9	554 177	840
841	707 281	594 823 321	29,0000	9,4391	2,92480	1,18906	2642,1	555 497	841
842	708 964	596 947 688	29,0172	9,4429	2,92531	1,18765	2645,2	556 819	842
843	710 649	599 077 107	29,0345	9,4466	2,92583	1,18624	2648,4	558 142	843
844	712 336	601 211 584	29,0517	9,4503	2,92634	1,18483	2651,5	559 467	844
845	714 025	603 351 125	29,0689	9,4541	2,92686	1,18343	2654,6	560 794	845
846	715 716	605 495 736	29,0861	9,4578	2,92737	1,18203	2657,8	562 122	846
847	717 409	607 645 423	29,1033	9,4615	2,92788	1,18064	2660,9	563 452	847
848	719 104	609 800 192	29,1204	9,4652	2,92840	1,17925	2664,1	564 783	848
849	720 801	611 960 049	29,1376	9,4690	2,92891	1,17786	2667,2	566 116	849
850	722 500	614 125 000	29,1548	9,4727	2,92942	1,17647	2670,4	567 450	850

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
851	724 201	616 295 051	29,1719	9,4764	2,92993	1,17509	2673,5	568 786	851
852	725 904	618 470 208	29,1890	9,4801	2,93044	1,17371	2676,6	570 124	852
853	727 609	620 650 477	29,2062	9,4838	2,93095	1,17233	2679,8	571 463	853
854	729 316	622 835 864	29,2233	9,4875	2,93146	1,17096	2682,9	572 803	854
855	731 025	625 026 375	29,2404	9,4912	2,93197	1,16959	2686,1	574 146	855
856	732 736	627 222 016	29,2575	9,4949	2,93247	1,16822	2689,2	575 490	856
857	734 449	629 422 793	29,2746	9,4986	2,93298	1,16686	2692,3	576 835	857
858	736 164	631 628 712	29,2916	9,5023	2,93349	1,16550	2695,5	578 182	858
859	737 881	633 839 779	29,3087	9,5060	2,93399	1,16414	2698,6	579 530	859
860	739 600	636 056 000	29,3258	9,5097	2,93450	1,16279	2701,8	580 880	860
861	741 321	638 277 381	29,3428	9,5134	2,93500	1,16144	2704,9	582 232	861
862	743 044	640 503 928	29,3598	9,5171	2,93551	1,16009	2708,1	583 585	862
863	744 769	642 735 647	29,3769	9,5207	2,93601	1,15875	2711,2	584 940	863
864	746 496	644 972 544	29,3939	9,5244	2,93651	1,15741	2714,3	586 297	864
865	748 225	647 214 625	29,4109	9,5281	2,93702	1,15607	2717,5	587 655	865
866	749 956	649 461 896	29,4279	9,5317	2,93752	1,15473	2720,6	589 014	866
867	751 689	651 714 363	29,4449	9,5354	2,93802	1,15340	2723,8	590 375	867
868	753 424	653 972 032	29,4618	9,5391	2,93852	1,15207	2726,9	591 738	868
869	755 161	656 234 909	29,4788	9,5427	2,93902	1,15075	2730,0	593 102	869
870	756 900	658 503 000	29,4958	9,5464	2,93952	1,14943	2733,2	594 468	870
871	758 641	660 776 311	29,5127	9,5501	2,94002	1,14811	2736,3	595 835	871
872	760 384	663 054 848	29,5296	9,5537	2,94052	1,14679	2739,5	597 204	872
873	762 129	665 338 617	29,5466	9,5574	2,94101	1,14548	2742,6	598 575	873
874	763 876	667 627 624	29,5635	9,5610	2,94151	1,14416	2745,8	599 947	874
875	765 625	669 921 875	29,5804	9,5647	2,94201	1,14286	2748,9	601 320	875
876	767 376	672 221 376	29,5973	9,5683	2,94250	1,14155	2752,0	602 696	876
877	769 129	674 526 133	29,6142	9,5719	2,94300	1,14025	2755,2	604 073	877
878	770 884	676 836 152	29,6311	9,5756	2,94349	1,13895	2758,3	605 451	878
879	772 641	679 151 439	29,6479	9,5792	2,94399	1,13766	2761,5	606 831	879
880	774 400	631 472 000	29,6648	9,5828	2,94448	1,13636	2764,6	608 212	880
881	776 161	683 797 841	29,6816	9,5865	2,94498	1,13507	2767,7	609 595	881
882	777 924	686 128 968	29,6985	9,5901	2,94547	1,13379	2770,9	610 980	882
883	779 689	688 465 387	29,7153	9,5937	2,94596	1,13250	2774,0	612 366	883
884	781 456	690 807 104	29,7321	9,5973	2,94645	1,13122	2777,2	613 754	884
885	783 225	693 154 125	29,7489	9,6010	2,94694	1,12994	2780,3	615 143	885
886	784 996	695 506 456	29,7658	9,6046	2,94743	1,12867	2783,5	616 534	886
887	786 769	697 864 103	29,7825	9,6082	2,94792	1,12740	2786,6	617 927	887
888	788 544	700 227 072	29,7993	9,6118	2,94841	1,12613	2789,7	619 321	888
889	790 321	702 595 369	29,8161	9,6154	2,94890	1,12486	2792,9	620 717	889
890	792 100	704 969 000	29,8329	9,6190	2,94939	1,12360	2796,0	622 114	890
891	793 881	707 347 971	29,8496	9,6226	2,94988	1,12233	2799,2	623 513	891
892	795 664	709 732 288	29,8664	9,6262	2,95036	1,12108	2802,3	624 913	892
893	797 449	712 121 957	29,8831	9,6298	2,95085	1,11982	2805,4	626 315	893
894	799 236	714 516 984	29,8998	9,6334	2,95134	1,11857	2808,6	627 718	894
895	801 025	716 917 375	29,9166	9,6370	2,95182	1,11732	2811,7	629 124	895
896	802 816	719 323 136	29,9333	9,6406	2,95231	1,11607	2814,9	630 530	896
897	804 609	721 734 273	29,9500	9,6442	2,95279	1,11483	2818,0	631 938	897
898	806 404	724 150 792	29,9666	9,6477	2,95328	1,11359	2821,2	633 348	898
899	808 201	726 572 699	29,9833	9,6513	2,95376	1,11235	2824,3	634 760	899
900	810 000	729 000 000	30,0000	9,6549	2,95424	1,11111	2827,4	636 173	900

901—950

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
901	811 801	731 432 701	30,0167	9,6585	2,95472	1,10988	2830,6	637 587	901
902	813 604	733 870 808	30,0333	9,6620	2,95521	1,10865	2833,7	639 003	902
903	815 409	736 314 327	30,0500	9,6656	2,95569	1,10742	2836,9	640 421	903
904	817 216	738 763 264	30,0666	9,6692	2,95617	1,10619	2840,0	641 840	904
905	819 025	741 217 625	30,0832	9,6727	2,95665	1,10497	2843,1	643 261	905
906	820 836	743 677 416	30,0998	9,6763	2,95713	1,10375	2846,3	644 683	906
907	822 649	746 142 643	30,1164	9,6799	2,95761	1,10254	2849,4	646 107	907
908	824 464	748 613 312	30,1330	9,6834	2,95809	1,10132	2852,6	647 533	908
909	826 281	751 089 429	30,1496	9,6870	2,95856	1,10011	2855,7	648 960	909
910	828 100	753 571 000	30,1662	9,6905	2,95904	1,09890	2858,8	650 388	910
911	829 921	756 058 031	30,1828	9,6941	2,95952	1,09769	2862,0	651 818	911
912	831 744	758 550 528	30,1993	9,6976	2,95999	1,09649	2865,1	653 250	912
913	833 569	761 048 497	30,2159	9,7012	2,96047	1,09529	2868,3	654 684	913
914	835 396	763 551 944	30,2324	9,7047	2,96095	1,09409	2871,4	656 118	914
915	837 225	766 060 875	30,2490	9,7082	2,96142	1,09290	2874,6	657 555	915
916	839 056	768 575 296	30,2655	9,7118	2,96190	1,09170	2877,7	658 993	916
917	840 889	771 095 213	30,2820	9,7153	2,96237	1,09051	2880,8	660 433	917
918	842 724	773 620 632	30,2985	9,7188	2,96284	1,08932	2884,0	661 874	918
919	844 561	776 151 559	30,3150	9,7224	2,96332	1,08814	2887,1	663 317	919
920	846 400	778 688 000	30,3315	9,7259	2,96379	1,08696	2890,3	664 761	920
921	848 241	781 229 961	30,3480	9,7294	2,96426	1,08578	2893,4	666 207	921
922	850 081	783 777 448	30,3645	9,7329	2,96473	1,08460	2896,5	667 654	922
923	851 929	786 330 467	30,3809	9,7361	2,96520	1,08342	2899,7	669 103	923
924	853 776	788 889 024	30,3974	9,7400	2,96567	1,08225	2902,8	670 554	924
925	855 625	791 453 125	30,4138	9,7435	2,96614	1,08108	2906,0	672 006	925
926	857 476	794 022 776	30,4302	9,7470	2,96661	1,07991	2909,1	673 460	926
927	859 329	796 597 983	30,4467	9,7505	2,96708	1,07875	2912,3	674 915	927
928	861 184	799 178 752	30,4631	9,7540	2,96755	1,07759	2915,4	676 372	928
929	863 041	801 765 089	30,4795	9,7575	2,96802	1,07643	2918,5	677 831	929
930	864 900	804 357 000	30,4959	9,7610	2,96848	1,07527	2921,7	679 291	930
931	866 761	806 954 491	30,5123	9,7645	2,96895	1,07411	2924,8	680 752	931
932	868 624	809 557 568	30,5287	9,7680	2,96942	1,07296	2928,0	682 216	932
933	870 489	812 166 237	30,5450	9,7715	2,96988	1,07181	2931,1	683 680	933
934	872 356	814 780 504	30,5614	9,7750	2,97035	1,07066	2934,2	685 147	934
935	874 225	817 400 375	30,5778	9,7785	2,97081	1,06952	2937,4	686 615	935
936	876 096	820 025 856	30,5941	9,7819	2,97128	1,06838	2940,5	688 084	936
937	877 969	822 656 953	30,6105	9,7854	2,97174	1,06724	2943,7	689 555	937
938	879 844	825 293 672	30,6268	9,7889	2,97220	1,06610	2946,8	691 028	938
939	881 721	827 936 019	30,6431	9,7924	2,97267	1,06496	2950,0	692 502	939
940	883 600	830 584 000	30,6594	9,7959	2,97313	1,06383	2953,1	693 978	940
941	885 481	833 237 621	30,6757	9,7993	2,97359	1,06270	2956,2	695 455	941
942	887 364	835 896 888	30,6920	9,8028	2,97405	1,06157	2959,4	696 934	942
943	889 249	838 561 807	30,7083	9,8063	2,97451	1,06045	2962,5	698 415	943
944	891 136	841 232 384	30,7246	9,8097	2,97497	1,05932	2965,7	699 897	944
945	893 025	843 908 625	30,7409	9,8132	2,97543	1,05820	2968,8	701 380	945
946	894 916	846 590 536	30,7571	9,8167	2,97589	1,05708	2971,9	702 865	946
947	896 809	849 278 123	30,7734	9,8201	2,97635	1,05597	2975,1	704 352	947
948	898 704	851 971 392	30,7896	9,8236	2,97681	1,05485	2978,2	705 840	948
949	900 601	854 670 349	30,8058	9,8270	2,97727	1,05374	2981,4	707 330	949
950	902 500	857 375 000	30,8221	9,8305	2,97772	1,05263	2984,5	708 822	950

951—1000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\lg n$	$\frac{1000}{n}$	πn	$\frac{n\pi^2}{4}$	n
951	904 401	860 085 351	30,8383	9,8339	2,97818	1,05152	2987,7	710 315	951
952	906 304	862 801 408	30,8545	9,8374	2,97864	1,05042	2990,8	711 809	952
953	908 209	865 523 177	30,8707	9,8408	2,97909	1,04932	2993,9	713 306	953
954	910 116	868 250 664	30,8869	9,8443	2,97955	1,04822	2997,1	714 803	954
955	912 025	870 933 875	30,9031	9,8477	2,98000	1,04712	3000,2	716 303	955
956	913 936	873 722 816	30,9192	9,8511	2,98046	1,04603	3003,4	717 804	956
957	915 849	876 467 493	30,9354	9,8546	2,98091	1,04493	3006,5	719 306	957
958	917 764	879 217 912	30,9516	9,8580	2,93137	1,04384	3009,6	720 810	958
959	919 681	881 974 079	30,9677	9,8614	2,98182	1,04275	3012,8	722 316	959
960	921 600	884 736 000	30,9339	9,8648	2,93227	1,04167	3015,9	723 823	960
961	923 521	887 503 681	31,0000	9,8683	2,98272	1,04058	3019,1	725 332	961
962	925 444	890 277 128	31,0161	9,8717	2,98318	1,03950	3022,2	726 842	962
963	927 369	893 056 347	31,0322	9,8751	2,93363	1,03842	3025,4	728 354	963
964	929 296	895 841 344	31,0483	9,8785	2,98408	1,03734	3028,5	729 867	964
965	931 225	898 632 125	31,0644	9,8819	2,98453	1,03627	3031,6	731 382	965
966	933 156	901 428 696	31,0805	9,8854	2,98498	1,03520	3034,8	732 899	966
967	935 089	904 231 063	31,0966	9,8888	2,98543	1,03413	3037,9	734 417	967
968	937 024	907 039 232	31,1127	9,8922	2,98588	1,03306	3041,1	735 937	968
969	938 961	909 853 209	31,1288	9,8956	2,98632	1,03199	3044,2	737 458	969
970	940 900	912 673 000	31,1448	9,8990	2,98677	1,03093	3047,3	738 981	970
971	942 841	915 498 611	31,1609	9,9024	2,98722	1,02987	3050,5	740 506	971
972	944 784	918 330 048	31,1769	9,9058	2,98767	1,02881	3053,6	742 032	972
973	946 729	921 167 317	31,1929	9,9092	2,98811	1,02775	3056,8	743 559	973
974	948 676	924 010 424	31,2090	9,9126	2,93856	1,02669	3059,9	745 088	974
975	950 625	926 859 375	31,2250	9,9160	2,98900	1,02564	3063,1	746 619	975
976	952 576	929 714 176	31,2410	9,9194	2,93945	1,02459	3066,2	748 151	976
977	954 529	932 574 833	31,2570	9,9227	2,98989	1,02354	3069,3	749 685	977
978	956 484	935 441 352	31,2730	9,9261	2,99034	1,02249	3072,5	751 221	978
979	958 441	938 313 739	31,2890	9,9295	2,99078	1,02145	3075,6	752 758	979
980	960 400	941 192 000	31,3050	9,9329	2,99123	1,02041	3078,8	754 296	980
981	962 361	944 076 141	31,3209	9,9363	2,99167	1,01937	3081,9	755 837	981
982	964 324	946 966 168	31,3369	9,9395	2,99211	1,01833	3085,0	757 378	982
983	966 289	949 862 087	31,3528	9,9430	2,99255	1,01729	3088,2	758 922	983
984	968 256	952 763 904	31,3688	9,9464	2,99300	1,01626	3091,3	760 466	984
985	970 225	955 671 625	31,3847	9,9497	2,99344	1,01523	3094,5	762 013	935
986	972 196	958 585 256	31,4006	9,9531	2,99388	1,01420	3097,6	763 561	986
987	974 169	961 504 803	31,4166	9,9565	2,99432	1,01317	3100,8	765 111	937
988	976 144	964 430 272	31,4325	9,9598	2,99476	1,01215	3103,9	766 662	988
989	978 121	967 361 669	31,4484	9,9632	2,99520	1,01112	3107,0	768 214	989
990	980 100	970 299 000	31,4643	9,9666	2,99564	1,01010	3110,2	769 769	990
991	982 081	973 242 271	31,4802	9,9699	2,99607	1,00908	3113,3	771 325	991
992	984 064	976 191 488	31,4960	9,9733	2,99651	1,00806	3116,5	772 882	992
993	986 049	979 146 657	31,5119	9,9766	2,99695	1,00705	3119,6	774 441	993
994	988 036	982 107 784	31,5278	9,9800	2,99739	1,00604	3122,7	776 002	994
995	990 025	985 074 875	31,5436	9,9833	2,99782	1,00503	3125,9	777 564	995
996	992 016	988 047 936	31,5595	9,9866	2,99826	1,00402	3129,0	779 128	996
997	994 009	991 026 973	31,5753	9,9900	2,99870	1,00301	3132,2	780 693	997
998	996 004	994 011 992	31,5911	9,9933	2,99913	1,00200	3135,3	782 260	998
999	998 001	997 002 999	31,6070	9,9967	2,99957	1,00100	3138,5	783 828	999
1000	1000 000	1000 000 000	31,6228	10,0000	3,00000	1,00000	3141,6	785 393	1000

Примечание. Табл. III позволяет для целых n от 1 до 1000 находить квадраты, кубы, квадратные и кубические корни, десятичные логарифмы, обратные величины, длину окружности и площадь круга диаметром n.

Если данное число x, над которым требуется произвести одну из указанных операций, находится в первой или последней графе, то ответ получается непосредственно в соответствующей графе.

Если же $1 < x < 1000$ и x не равен целому n, то $n < x < n+1$, и тогда необходимо прибегнуть к интерполяции (см. интерполяционные формулы, стр. 303). Обычно употребляется *линейная интерполяция*.

Если x_0, $x_1 = x_0 + h$ (в табл. III h равно единице) — два значения аргумента, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1) = y_1 + \Delta y_0$ (Δy_0 — разность первого порядка), то при линейной интерполяции принимают

$$f(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\,\Delta y_0.$$

Интерполяционную поправку $\frac{x - x_0}{h}\,\Delta y_0 = k\Delta y_0$, где $k = \frac{x - x_0}{h}$, можно вычислять по табл. IV (стр. 35), дающей произведения Δy_0 (от 11 до 90) на 0,1, 0,2, . . . 0,9.

Погрешность линейной интерполяции не превышает единицы разряда последней значащей цифры, если только разности второго порядка $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ меньше по абсолютному значению 5 единиц последнего знака. В противном случае следует взять следующий член интерполяционной формулы.

В табл. III везде можно брать линейную интерполяцию, кроме вычисления $f(x) = x^3$, где следует пользоваться *квадратической интерполяцией* по формуле

$$f(x) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}\right)$$

или

$$f(x) = y_0 + k\Delta y_0 - k_1(\Delta y_1 - \Delta y_{-1}),$$

где $k_1 = \frac{k(1-k)}{4}$; $\Delta y_{-1} = y_0 - y_{-1}$; таким образом, для нахождения $f(x)$ для значения x, лежащего между x_0 и x_1, следует использовать предшествующее значение аргумента $x_{-1} = x_0 - h$ и соответствующее в таблице значение y_{-1}.

Величина k_1 находится из табл. V на стр. 36.

Возведение в квадрат для $n < x < n+1$.

Примеры: 1) $y = (506{,}8)^2$; $x_0 = n = 506$;

$$\begin{aligned} y_0 &= 506^2 = 256\,036; & \Delta y_0 &= 1013;\\ y_1 &= 507^2 = 257\,049; & \Delta y_1 &= 1015;\\ y_2 &= 508^2 = 258\,064. \end{aligned}$$

Разность Δy_0 и интерполяционную поправку обычно выражают в единицах разряда последней значащей цифры табличного значения функции, не выписывая нулей и запятой впереди. $\Delta^2 y_0 = 1015 - 1013 = 2 < 5$; применяется линейная интерполяция: $\Delta y_0 = 10 \cdot 100 + 13$; $0{,}8 \cdot 10 \cdot 100 = 800$; из табл. IV: $0{,}8 \cdot 13 = 10{,}4$; поправка $k\Delta y_0 = 800 + 10{,}4 = 810{,}4$; $y = 506^2 + 810{,}4 = 256\,846{,}4$ или $y = 256\,846$ с точностью до 1.

2) $y = 0{,}0456^2$; по таблице $456^2 = 207\,936$; y должен содержать 8 десятичных знаков, следовательно, $y = 0{,}00207936$.

Возведение в куб для $n < x < n+1$.

Пример. $y = 20{,}04^3$. Так как в таблице аргумент n — трехзначное число, то можно искать $200{,}4^3$, а затем, уменьшив результат в 10^3 раз, найдем ответ:

$$\begin{aligned} y_{-1} &= 199^3 = 7\,880\,599;\\ y_0 &= 200^3 = 8\,000\,000; & \Delta y_{-1} &= 119\,401; & \Delta^2 y_{-1} &= 1200;\\ & & \Delta y_0 &= 120\,601; & \Delta^2 y_0 &= 1206.\\ y_1 &= 201^3 = 8\,120\,601; & \Delta y_1 &= 121\,807;\\ y_2 &= 202^3 = 8\,242\,408; \end{aligned}$$

Чтобы применить квадратическую интерполяцию, находим:

$$\Delta y_0 = 12 \cdot 10\,000 + 60 \cdot 10 + 1; \quad 0{,}4 \cdot 12 \cdot 10\,000 = 48\,000;$$
$$0{,}4 \cdot 60 \cdot 10 = 240; \quad 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4; \quad k\Delta y_0 = 48\,000 + 240 + 0{,}4 = 48\,240{,}4;$$
$$k = 0{,}4; \quad k_1 = 0{,}060 \text{ (по табл. V)};$$
$$200{,}4^3 \approx 200^3 + 48\,240{,}4 - 0{,}06\,(121\,807 - 119\,401) = 200^3 + 48\,240{,}4 - 144{,}36 = 8\,048\,096{,}04,$$

что отличается от точного результата $(200{,}4)^3 = 8048096{,}064$ на 0,024, т. е. ошибка меньше 0,1.

Ответ: $y \approx 8048{,}0960$ со всеми верными значащими цифрами.

Извлечение квадратного корня.

Примеры: 1) $\sqrt{672} = 25{,}9230$;

2) $\sqrt{67{,}2}$ находится с применением линейной интерполяции:

$$\begin{aligned} y_0 &= \sqrt{67} = 8{,}1854; & \Delta y_0 &= 608;\\ y_1 &= \sqrt{68} = 8{,}2462; & \Delta^2 y_0 &= -4.\\ & & \Delta y_1 &= 604;\\ y_2 &= \sqrt{69} = 8{,}3066. \end{aligned}$$

Поправка: $0{,}2 \cdot 608 = 120 + 1{,}6 = 121{,}6$;

$$\sqrt{67{,}2} = 8{,}1854 + 0{,}01216 = 8{,}19756 \approx 8{,}1976.$$

3) $\sqrt{0{,}0732} = \frac{1}{100}\sqrt{732} = \frac{1}{100} \cdot 27{,}0555 = 0{,}270555$ со всеми верными знаками.

4) $\sqrt{0{,}00732} = \frac{1}{100}\sqrt{73{,}2}$ и следует вычислить $\sqrt{73{,}2}$ с линейной интерполяцией, но можно использовать графу n как квадратный корень из чисел, находящихся в графе n^2.

Из таблицы находим

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{731025} &= 855\\ \sqrt{732736} &= 856\end{aligned}\right\} \quad \sqrt{73{,}2} = \frac{\sqrt{732000}}{100} \approx 8{,}55;$$

$$\sqrt{0{,}00732} = 0{,}0855.$$

Применение обратной линейной интерполяции уточнит результат. В данном примере достаточно из таблицы выписать первые четыре знака:

$$y_0 = 7310; \quad \Delta y_0 = 17;$$
$$y_1 = 7327$$

и мы находим

7310 855	(по табл. III)
10 6	(„ „ IV)
7320 8556	

$$\sqrt{732000} = 855{,}6;$$

$$\sqrt{0{,}00732} = 0{,}08556.$$

Поправка 6 по табл. IV находится так: в колонке под разностью 17 ищем число, ближайшее к числу 10, и в первой (последней) колонке находим соответствующее ей число 6.

Извлечение кубического корня.

Примеры:

1) $\sqrt[3]{645} = 8{,}6401$;

2) $\sqrt[3]{0{,}000731} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{731} = \frac{1}{100} \cdot 9{,}0082 = 0{,}090082$;

3) $\sqrt[3]{64{,}5}$ находится применением линейной интерполяции:

$$y_0 = \sqrt[3]{64} = 4{,}0000; \quad \Delta y_0 = 207;$$
$$y_1 = \sqrt[3]{65} = 4{,}0207; \quad \Delta^2 y_0 = -2; \quad \Delta y_1 = 205;$$
$$y_2 = \sqrt[3]{66} = 4{,}0412.$$

Поправка: $k\Delta y_0 = 0{,}5 \cdot 207 = 103{,}5$;

$$\sqrt[3]{64{,}5} \approx 4{,}0104.$$

Как и в предыдущем случае, можно использовать графу n как кубический корень из чисел, находящихся в графе n^3:

$\sqrt[3]{64{,}5} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{64500}$; ищем ближайшие к 64 500 числа, кубические корни из которых отличаются на 1; находим по таблице $\sqrt[3]{64000} = 40$, $\sqrt[3]{68\,921} = 41$, таким образом, $\sqrt[3]{64{,}5} \approx 4{,}0$.

Но можно подкоренное число увеличить в 100^3 раз:

$$\sqrt[3]{64{,}5} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{64{,}5 \cdot 100^3} = \frac{1}{100}\sqrt[3]{64500000}$$

и по таблице находим:

$$\sqrt[3]{64481201} = 401; \quad \sqrt[3]{64964808} = 402; \quad \sqrt[3]{64{,}5} \approx 4{,}01.$$

Применение обратной линейной интерполяции дает

$$\begin{array}{rl} y_0 = 6448\ldots\ldots\ldots 401 & \text{(разность } \Delta y_0 = 48\text{)} \\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ 04 & \text{(по табл. IV)} \\ \hline 6450\ldots\ldots\ldots\ 401\,04 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{64{,}5} = 4{,}0104.$$

Нахождение логарифма (десятичного) трехзначного числа производится непосредственно по таблице, а для числа с тремя значащими цифрами из таблицы берется мантисса, характеристика же устанавливается по правилам алгебры. Например

$$\lg 0{,}0731 = \bar{2}{,}86392.$$

Для числа с четырьмя и более значащими цифрами мантиссу следует искать с применением линейной интерполяции (как обычно в пятизначных логарифмических таблицах), если $n > 100$, а если $n < 100$, — искать мантиссу в 10 раз большего числа.

Примеры: 1) lg 731,5 находится с применением линейной интерполяции:

$$y_0 = \lg 731 = 2{,}86392;$$

$$\Delta y_0 = 0{,}00059;$$

$$y_1 = \lg 732 = 2{,}86451.$$

Поправка $k\Delta y_0 = 0{,}5 \cdot 0{,}00059 = 0{,}00030$;

$$\lg 731{,}5 = 2{,}86392 + 0{,}00030 = 2{,}86422.$$

2) lg 73,15 искать не в графе, где $n = 73$ и $n + 1 = 74$, а в графе, где $n = 731$, $n + 1 = 732$; мантисса логарифма числа 731,5 равна 86 422, следовательно, lg 73,15 = 1,86422.

Нахождение обратных величин дается графой $\frac{1000}{n}$. Для чисел с тремя значащими цифрами обратная величина находится из таблицы; следует только привести данное число умножением или делением на степень десяти (10^k) к целому трехзначному числу и полученный по таблице результат соответственным образом исправить. Для четырехзначных чисел применяется линейная интерполяция (поправку вычитать, а не прибавлять).

Примеры: 1) $x = 0{,}341$. Найти $\frac{1}{x}$; находим

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0{,}341} = \frac{1000}{341} = 2{,}93255.$$

2) Найти $\frac{1}{0{,}0341} = \frac{10000}{341} = 10 \cdot \frac{1000}{341} = 10 \cdot 2{,}93255 = 29{,}3255.$

3) $\frac{1}{34{,}1} = \frac{10}{341} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1000}{341} = \frac{1}{100} \cdot 2{,}93255 = 0{,}0293255.$

4) $\frac{1}{34{,}15} = \frac{10}{341{,}5} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1000}{341{,}5}.$

Применяем линейную интерполяцию:

$$y_0 = \frac{1000}{341} = 2{,}93255;$$

$$\Delta y_0 = -0{,}00857;$$

$$y_1 = \frac{1000}{342} = 2{,}92398;$$

$k = 0{,}5$; поправка $0{,}5 \cdot 0{,}00857 = 0{,}00428$;

$$\frac{1000}{341{,}5} = 2{,}93255 - 0{,}00428 = 2{,}92827;$$

$$\frac{1}{34{,}15} = 0{,}0292827.$$

Нахождение длины окружности и площади круга для диаметра d, равного целому числу n от 1 до 1000, производится непосредственно по таблице. В случае $d < 1$ или $d > 1000$, но с тремя значащими цифрами следует находить длину окружности (площадь круга) для диаметра, в 10^k раз большего или меньшего, чем заданный, и помнить, что при увеличении (уменьшении) диаметра в 10^k раз длина окружности увеличивается (уменьшается) в 10^k раз, а площадь круга увеличивается (уменьшается) в 10^{2k} раз.

Пример. $d = 34{,}1$; $10d = 341$; длина окружности равна $\frac{1071{,}3}{10} = 107{,}13$, а площадь круга равна $\frac{91326{,}9}{100} = 913{,}269$.

Если d имеет значащих цифр больше трех, то следует применить интерполяцию.

Эта же таблица позволяет находить диаметр окружности и круга по заданной длине окружности или площади круга.

Пример. Найти диаметр окружности, длина которой 144,3 *см*. По таблице находим $\frac{141{,}37}{\pi} = 45$; $\frac{144{,}51}{\pi} = 46$; $d = \frac{144{,}3}{\pi} \sim 46$. Но так как в графе πn можно искать $10 \cdot 144{,}3_1$, то получим $\frac{1449{,}0}{\pi} = 459$; $\frac{1445{,}1}{\pi} = 460$; поэтому $\frac{1443}{\pi} \sim 459$, а следовательно, $d = \frac{144{,}3}{\pi} \sim 45{,}9$.

ТАБЛИЦА IV. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЧАСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,	25,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	23,2	28,8	29,4	30,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	32,8	33,6	31,4	35,2	35,0	36,8	37,6	33,4	39,2	40,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	36,9	37,8	33,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	9,0	29,5	30,0	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

Примечание. О линейной интерполяции см. стр. 32.

ТАБЛИЦА V. ПОПРАВКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0,002		0,998	0,071		0,929	0,153		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0,006		0,994	0,075		0,925	0,159		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,165		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0,018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,700
	0,005			0,021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0,006			0,022			0,038			0,054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0,039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0,040			0,056	
0,035		0,965	0,110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0,041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0,011			0,027			0,043			0,059	
0,048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0,028			0,044			0,060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

Примечания: 1. О квадратическом интерполировании см. стр. 32.

2. Всем значениям k, заключенным между смежными числами графы k (как правой, так и левой), соответствует одно и то же значение k_1, помещенное между этими смежными значениями k. Критическим (табличным) значениям k соответствует вышележащее k_1.

Примеры. 1) Для $k = 0{,}8$ $k_1 = 0{,}040$ (так же как и для всех других k, заключенных между 0,797 и 0,804 или между 0,196 и 0,203). 2) Для $k = 0{,}3$ (или для $k = 0{,}7$) $k_1 = 0{,}052$.

ТАБЛИЦА VI. ЭЛЕМЕНТЫ КРУГА: ДЛИНА ДУГИ, СТРЕЛКА, ДЛИНА ХОРДЫ И ПЛОЩАДЬ СЕГМЕНТА КРУГА ДЛЯ РАДИУСА $r = \frac{d}{2} = 1$

Центральный угол $\varphi°$	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды s	Площадь сегмента S	Центральный угол $\varphi°$	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды s	Площадь сегмента S
1	0,0175	0,0000	0,0175	0,00000	51	0,8901	0,0974	0,8610	0,05649
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,00000	52	0,9076	0,1012	0,8767	0,05978
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,00001	53	0,9250	0,1051	0,8924	0,06319
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,00003	54	0,9425	0,1090	0,9080	0,06673
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,00010	56	0,9774	0,1171	0,9389	0,07417
7	0,1222	0,0019	0,1221	0,00015	57	0,9948	0,1212	0,9543	0,07808
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,00023	58	1,0123	0,1254	0,9696	0,08212
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,00032	59	1,0297	0,1295	0,9848	0,08629
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	60	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,00059	61	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,00076	62	1,0821	0,1428	1,0301	0,09958
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,00097	63	1,0996	0,1474	1,0450	0,10428
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,00121	64	1,1170	0,1520	1,0598	0,10911
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,00181	66	1,1519	0,1613	1,0893	0,11919
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,00217	67	1,1694	0,1661	1,1039	0,12443
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,00257	68	1,1868	0,1710	1,1184	0,12982
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,00302	69	1,2043	0,1759	1,1328	0,13535
20	0,3491	0,0152	0,3473	0,00352	70	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102
21	0,3665	0,0167	0,3645	0,00408	71	1,2392	0,1859	1,1614	0,14683
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,00468	72	1,2566	0,1910	1,1756	0,15279
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,00535	73	1,2741	0,1961	1,1896	0,15889
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,00607	74	1,2915	0,2014	1,2036	0,16514
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154
26	0,4538	0,0256	0,4499	0,00771	76	1,3265	0,2120	1,2313	0,17808
27	0,4712	0,0276	0,4669	0,00862	77	1,3439	0,2174	1,2450	0,18477
28	0,4887	0,0297	0,4833	0,00961	78	1,3614	0,2229	1,2586	0,19160
29	0,5061	0,0319	0,5003	0,01067	79	1,3788	0,2284	1,2722	0,19859
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	80	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573
31	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301	81	1,4137	0,2396	1,2989	0,21301
32	0,5585	0,0387	0,5513	0,01429	82	1,4312	0,2453	1,3121	0,22045
33	0,5760	0,0412	0,5680	0,01566	83	1,4486	0,2510	1,3252	0,22804
34	0,5934	0,0437	0,5847	0 01711	84	1,4661	0,2569	1,3383	0,23578
35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864	85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367
36	0,6283	0,0489	0,6180	0,02027	86	1,5010	0,2686	1,3640	0,25171
37	0,6458	0,0517	0,6346	0,02198	87	1,5184	0,2746	1,3767	0,25990
38	0,6632	0,0545	0,6511	0,02378	88	1,5359	0,2807	1,3893	0,26825
39	0,6807	0,0574	0,6676	0,02568	89	1,5533	0,2867	1,4018	0,27675
40	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767	90	1,5708	0,2929	1,4142	0,28540
41	0,7156	0,0633	0,7004	0,02976	91	1,5882	0,2991	1,4265	0,29420
42	0,7330	0,0664	0,7167	0,03195	92	1,6057	0,3053	1,4387	0,30316
43	0,7505	0,0695	0,7330	0,03425	93	1,6232	0,3116	1,4507	0,31226
44	0,7679	0,0728	0,7492	0,03664	94	1,6406	0,3180	1,4627	0,32152
45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915	95	1,6580	0,3244	1,4746	0,33093
46	0,8029	0,0795	0,7815	0,04176	96	1,6755	0,3309	1,4863	0,34050
47	0,8203	0,0829	0,7975	0,04448	97	1,6930	0,3374	1,4979	0,35021
48	0,8378	0,0865	0,8135	0,04731	98	1,7104	0,3439	1,5094	0,36008
49	0,8552	0,0900	0,8294	0,05025	99	1,7279	0,3506	1,5208	0,37009
50	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331	100	1,7453	0,3572	1,5321	0,38026

Продолжение табл. VI

Центральный угол φ°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды s	Площадь сегмента S	Центральный угол φ°	Длина дуги l	Стрелка h	Длина хорды s	Площадь сегмента S
101	1,7628	0,3639	1,5432	0,39058	141	2,4609	0,6662	1,8853	0,91580
102	1,7802	0,3707	1,5543	0,40104	142	2,4784	0,6744	1,8910	0,93135
103	1,7977	0,3775	1,5652	0,41166	143	2,4958	0,6827	1,8966	0,94700
104	1,8151	0,3843	1,5760	0,42242	144	2,5133	0,6910	1,9021	0,96274
105	1,8326	0,3912	1,5867	0,43333	145	2,5307	0,6993	1,9074	0,97858
106	1,8500	0,3982	1,5973	0,44439	146	2,5482	0,7076	1,9126	0,99449
107	1,8675	0,4052	1,6077	0,45560	147	2,5656	0,7160	1,9176	1,01050
108	1,8850	0,4122	1,6180	0,46695	148	2,5831	0,7244	1,9225	1,02658
109	1,9024	0,4193	1,6282	0,47844	149	2,6005	0,7328	1,9273	1,04275
110	1,9199	0,4264	1,6383	0,49008	150	2,6180	0,7412	1,9319	1,05900
111	1,9373	0,4336	1,6483	0,50187	151	2,6354	0,7496	1,9363	1,07532
112	1,9548	0,4408	1,6581	0,51379	152	2,6529	0,7581	1,9406	1,09171
113	1,9722	0,4481	1,6678	0,52586	153	2,6704	0,7666	1,9447	1,10818
114	1,9897	0,4554	1,6773	0,53807	154	2,6878	0,7750	1,9487	1,12472
115	2,0071	0,4627	1,6868	0,55041	155	2,7053	0,7836	1,9526	1,14132
116	2,0246	0,4701	1,6961	0,56289	156	2,7227	0,7921	1,9563	1,15799
117	2,0420	0,4775	1,7053	0,57551	157	2,7402	0,8006	1,9598	1,17472
118	2,0595	0,4850	1,7143	0,58827	158	2,7576	0,8092	1,9633	1,19151
119	2,0769	0,4925	1,7233	0,60116	159	2,7751	0,8178	1,9665	1,20835
120	2,0944	0,5000	1,7321	0,61418	160	2,7925	0,8264	1,9696	1,22525
121	2,1118	0,5076	1,7407	0,62734	161	2,8100	0,8350	1,9726	1,24221
122	2,1293	0,5152	1,7492	0,64063	162	2,8274	0,8436	1,9754	1,25921
123	2,1463	0,5228	1,7576	0,65404	163	2,8449	0,8522	1,9780	1,27626
124	2,1642	0,5305	1,7659	0,66759	164	2,8623	0,8608	1,9805	1,29335
125	2,1817	0,5383	1,7740	0,68125	165	2,8798	0,8695	1,9829	1,31049
126	2,1991	0,5460	1,7820	0,69505	166	2,8972	0,8781	1,9851	1,32766
127	2,2166	0,5538	1,7899	0,70897	167	2,9147	0,8868	1,9871	1,34487
128	2,2340	0,5616	1,7976	0,72301	168	2,9322	0,8955	1,9890	1,36212
129	2,2515	0,5695	1,8052	0,73716	169	2,9496	0,9042	1,9908	1,37940
130	2,2689	0,5774	1,8126	0,75144	170	2,9671	0,9128	1,9924	1,39671
131	2,2864	0,5853	1,8199	0,76584	171	2,9845	0,9215	1,9938	1,41404
132	2,3038	0,5933	1,8271	0,78034	172	3,0020	0,9302	1,9951	1,43140
133	2,3213	0,6013	1,8341	0,79497	173	3,0194	0,9390	1,9963	1,44878
134	2,3387	0,6093	1,8410	0,80970	174	3,0369	0,9477	1,9973	1,46617
135	2,3562	0,6173	1,8478	0,82454	175	3,0543	0,9564	1,9981	1,48359
136	2,3736	0,6254	1,8544	0,83949	176	3,0718	0,9651	1,9988	1,50101
137	2,3911	0,6335	1,8608	0,85455	177	3,0892	0,9738	1,9993	1,51845
138	2,4086	0,6416	1,8672	0,86971	178	3,1067	0,9825	1,9997	1,53589
139	2,4260	0,6498	1,8733	0,88497	179	3,1241	0,9913	1,9999	1,55334
140	2,4435	0,6580	1,8794	0,90034	180	3,1416	1,0000	2,0000	1,57080

Примечание. Если $d = 2r$ — диаметр окружности, то при принятых в таблице обозначениях:

1) длина дуги $l = \pi d \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = 0{,}008727d \cdot \varphi \approx \sqrt{s^2 + \frac{16}{3} h^2}$;

2) стрелка $h = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = d \sin^2 \frac{\varphi}{4} = \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}$;

3) длина хорды $s = d \sin \frac{\varphi}{2}$;

4) площадь сегмента $S = \frac{d^2}{8}\left(\frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ - \sin\varphi\right)$;

5) площадь сектора равна $\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} = 0{,}002182a^2 \cdot \varphi$.

Для более точных вычислений служат значения $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$; $\lg \frac{\pi}{180} = \bar{2}{,}2418774$; $\frac{\pi}{360} = 0{,}00872665$; $\lg \frac{\pi}{360} = \bar{3}{,}9408474$.

Таблица содержит данные, относящиеся к различным сегментам одной и той же окружности радиуса, равного единице. Если диаметр равен d, то табличные значения l, h и s умножаются на $\frac{d}{2}$, а площадь сегмента — на $\frac{d^2}{4}$.

Если центральный угол не находится в таблице, то прибегают к интерполяции (см. примечание к табл. III), обратив предварительно минуты и секунды в доли градуса.

Пример. Найти длину дуги, стрелки и хорды, а также площадь сегмента с центральным углом 67°31′12″, если диаметр окружности $d = 3$ *см*.

Находим по таблице (для случая $r = 1$) l, h, s, пользуясь линейной интерполяцией:

$$31'12'' = 1872'' = \frac{1872}{60 \cdot 60} = 0°{,}52;$$

$\varphi°$	l	Δ	h	Δ	s	Δ
67	1,1694	174	0,1661	49	1,1039	145
0,52	90		25		75	
67°,52	1,1784		0,1636		1,1114	

Для отыскания площади сегмента пользуемся квадратической интерполяцией, так как две соседние разности $\Delta_0 = 12\,982 - 12\,443 = 539$ и $\Delta_1 = 13\,535 - 12\,982 = 553$ отличаются друг от друга больше чем на 4 единицы последнего знака: $\Delta_1 - \Delta_0 = 553 - 539 = 14 > 4$.

Пользуясь указаниями примечания к табл. III, имеем

$x_0 - h = 66°$	$y_{-1} = 0{,}11919$	$\Delta_{-1} = 524$
$x_0 = 67°$	$y_0 = 0{,}12443$	$\Delta_0 = 539$
$x_0 + h = 68°$	$y_1 = 0{,}12982$	$\Delta_1 = 553$
$x_0 + 2h = 69°$	$y_2 = 0{,}13535$	

$k = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0{,}52}{1} = 0{,}52$; $k_1 = \frac{k(1-k)}{4} = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{4} = 0{,}0624 \approx 0{,}062$, а потому поправка равна

$$k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}) = 0{,}52 \cdot 539 - 0{,}062 \cdot 29 = 280{,}28 - 1{,}798 = 278{,}482 \approx 278.$$

Следовательно,

$$S = 0{,}12443 + 0{,}00278 = 0{,}12721 \text{ } см^2.$$

Окончательно имеем

$$\bar{l} = l\frac{d}{2} = 1{,}1784 \cdot 1{,}5 = 1{,}7676 \text{ } см; \quad \bar{h} = h\frac{a}{2} = 0{,}1686 \cdot 1{,}5 = 0{,}2529 \text{ } см; \quad \bar{s} = s\frac{d}{2} = 1{,}1114 \cdot 1{,}5 = 1{,}6671 \text{ } см$$

$$\bar{S} = S\frac{d^2}{4} = 0{,}12721 \cdot 2{,}25 = 0{,}28622 \text{ } см^2.$$

ТАБЛИЦА VII. ПЕРЕВОД ГРАДУСНОЙ МЕРЫ В РАДИАННУЮ

Длина дуг окружности радиуса, равного 1

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1″	0,000005	1′	0,000291	1°	0,017453	16°	0,279253	31°	0,541052	70°	1,221730
2	0,000010	2	0,000582	2	0,034907	17	0,296706	32	0,558505	75	1,308997
3	0,000015	3	0,000873	3	0,052360	18	0,314159	33	0,575959	80	1,396263
4	0,000019	4	0,001164	4	0,069813	19	0,331613	34	0,593412	85	1,483530
5	0,000024	5	0,001454	5	0,087266	20	0,349066	35	0,610865	90	1,570796
6	0,000029	6	0,001745	6	0,104720	21	0,366519	36	0,628319	100	1,745329
7	0,000034	7	0,002036	7	0,122173	22	0,383972	37	0,645772	120	2,094395
8	0,000039	8	0,002327	8	0,139626	23	0,401426	38	0,663225	150	2,617994
9	0,000044	9	0,002618	9	0,157080	24	0,418879	39	0,680678	180	3,141593
10	0,000048	10	0,002909	10	0,174533	25	0,436332	40	0,698132	200	3,490659
20	0,000097	20	0,005818	11	0,191986	26	0,453785	45	0,785398	250	4,363323
30	0,000145	30	0,008727	12	0,209440	27	0,471239	50	0,872665	270	4,712389
40	0,000194	40	0,011636	13	0,226893	28	0,488692	55	0,959931	300	5,235988
50	0,000242	50	0,014544	14	0,244346	29	0,506145	60	1,047198	360	6,283185
				15	0,261799	30	0,523599	65	1,134464	400	6,981317

Примечание. 1 радиан (дуга, равная радиусу) равен 57°17′44″,8

Примеры:

1) Выразить в радианах 52°37′23″. Вычисления располагаем так:

50°	= 0,872665
2°	= 0,031907
30′	= 0,008727
7′	= 0,002036
20″	= 0,000097
3″	= 0,000015

52°37′23″ = 0,918447 ≈ 0,91845 радиана (сложение удобно выполнять на счетах).

2) Выразить в градусной мере 5,645 радиана. Вычисления располагаем так:

5,645 радиана	
5,235988	= 300°
0,409012	
0,401426	= 23°
0,007586	
0,005818	= 20′
0,001768	
0,001745	= 6′
0,000023	5″
5,645 радиана	= 323°26′5″

ТАБЛИЦА VIII. БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ $\binom{n}{m} = C_n^m = C_n^{n-m} = \binom{n}{n-m}$

n \ $\binom{n}{m}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Примечания: 1. Для больших значений n биномиальные коэффициенты вычисляются по общей формуле для C_n^m (см. стр. 79), причем следует пользоваться тем, что $C_n^{n-m} = C_n^m$, т. е. при четных значениях n нужно вычислять коэффициенты лишь до $m = \frac{n}{2}$, а при нечетных n — до $m = \frac{n+1}{2}$.

2. При вычислении удобно пользоваться зависимостью $\binom{n}{m+1} = \binom{n}{m}\frac{n-m}{m+1}$.

Пример. Биномиальные коэффициенты для $n = 15$:

$$\binom{15}{0} = 1;\quad \binom{15}{1} = \frac{15}{1} = 15;\quad \binom{15}{2} = \binom{15}{1}\cdot\frac{14}{2} = 15\cdot 7 = 105;$$

$$\binom{15}{3} = \binom{15}{2}\cdot\frac{13}{3} = 105\cdot\frac{13}{3} = 35\cdot 13 = 455;\quad \binom{15}{4} = 455\cdot\frac{12}{4} =$$

$$= 455\cdot 3 = 1365;\quad \binom{15}{5} = 1365\cdot\frac{11}{5} = 273\cdot 11 = 3003;$$

$$\binom{15}{6} = 3003\cdot\frac{10}{6} = 3003\cdot\frac{5}{3} = 5005;\quad \binom{15}{7} = 5005\cdot\frac{9}{7} = 715\cdot 9 = 6435;\quad \binom{15}{8} = \binom{15}{7} = 6435;$$

$$\binom{15}{9} = \binom{15}{6} = 5005$$

и т. д. Ряд биномиальных коэффициентов для данного случая: 1; 15; 105; 455; 1365; 3003; 5005, 6435; 6435; 5005; 3003; 1365; 455; 105; 15; 1.

3. Значения биномиальных коэффициентов для всех n от $n = 0$ до $n = 100$ см. [110], стр. 351.

ТАБЛИЦА IX. **ФАКТОРИАЛЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ОТ 1 ДО 20 И ЛОГАРИФМЫ ФАКТОРИАЛОВ**

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

n	$n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$\lg n!$
1	1	0,000000	11	$3{,}9916800 \cdot 10^{7}$	7,601156
2	2	0,301030	12	$4{,}7900160 \cdot 10^{8}$	8,680337
3	6	0,778151	13	$6{,}2270208 \cdot 10^{9}$	9,794280
4	$2{,}4 \cdot 10^{1}$	1,380211	14	$8{,}7178291 \cdot 10^{10}$	10,940408
5	$1{,}20 \cdot 10^{2}$	2,079181	15	$1{,}3076744 \cdot 10^{12}$	12,116500
6	$7{,}20 \cdot 10^{2}$	2,857332	16	$2{,}0922790 \cdot 10^{13}$	13,320620
7	$5{,}040 \cdot 10^{3}$	3,702431	17	$3{,}5568743 \cdot 10^{14}$	14,551069
8	$4{,}0320 \cdot 10^{4}$	4,605521	18	$6{,}4023737 \cdot 10^{15}$	15,806341
9	$3{,}62880 \cdot 10^{5}$	5,559763	19	$1{,}2164510 \cdot 10^{17}$	17,085095
10	$3{,}628800 \cdot 10^{6}$	6,559763	20	$2{,}4329020 \cdot 10^{18}$	18,386125

Примечание. Начиная с $n! = 14!$, значения факториалов округлены с достаточной для практических расчетов степенью точности. Значения факториалов для всех n от $n = 1$ до $n = 200$ и логарифмов факториалов для всех n от $n = 1$ до $n = 1200$ см. [110], стр. [351].

ТАБЛИЦА X. **ГАММА-ФУНКЦИЯ** (см. стр. 178)

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1,01	0,99433	1,26	90440	1,51	88659	1,76	92137
1,02	98884	1,27	90250	1,52	88704	1,77	92376
1,03	98355	1,28	90072	1,53	88757	1,78	92623
1,04	97844	1,29	89904	1,54	88818	1,79	92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
1,06	96874	1,31	89600	1,56	88964	1,81	93408
1,07	96415	1,32	89464	1,57	89049	1,82	93685
1,08	95973	1,33	89338	1,58	89142	1,83	93969
1,09	95546	1,34	89222	1,59	89243	1,84	94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
1,11	94740	1,36	89018	1,61	89468	1,86	94869
1,12	94359	1,37	88931	1,62	89592	1,87	95184
1,13	93993	1,38	88854	1,63	89724	1,88	95507
1,14	93642	1,39	88785	1,64	89864	1,89	95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
1,16	92980	1,41	88676	1,66	90167	1,91	96523
1,17	92670	1,42	88636	1,67	90330	1,92	96877
1,18	92373	1,43	88604	1,68	90500	1,93	97240
1,19	92089	1,44	88581	1,69	90678	1,94	97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1,21	91558	1,46	88560	1,71	91057	1,96	98374
1,22	91311	1,47	88563	1,72	91258	1,97	98768
1,23	91075	1,48	88575	1,73	91467	1,98	99171
1,24	90852	1,49	88595	1,74	91683	1,99	99581
1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

ТАБЛИЦА XI. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ ЧИСЕЛ

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,00000	0,00995	0,01980	0,02956	0,03922	0,04879	0,05827	0,06736	0,07696	0,08618
1,1	09531	10435	11333	12222	13103	13976	14842	15700	16551	17395
1,2	18232	19062	19885	20701	21511	22314	23111	23902	24686	25464
1,3	26235	27003	27763	28518	29267	30010	30748	31481	32208	32930
1,4	33647	34359	35066	35767	36464	37156	37844	38526	39204	39878
1,5	0,40547	0,41211	0,41871	0,42527	0,43178	0,43825	0,44469	0,45108	0,45742	0,46373
1,6	47000	47623	48243	48858	49470	50078	50682	51282	51879	52473
1,7	53063	53649	54232	54812	55389	55962	56531	57098	57661	58222
1,8	58779	59333	59884	60432	60977	61519	62058	62594	63127	63658
1,9	64185	64710	65233	65752	66269	66783	67294	67803	68310	68813
2,0	0,69315	0,69813	0,70310	0,70804	0,71295	0,71784	0,72271	0,72755	0,73237	0,73716
2,1	74194	74669	75142	75612	76081	76547	77011	77473	77932	78390
2,2	78846	79299	79751	80200	80648	81093	81536	81978	82418	82855
2,3	83291	83725	84157	84587	85015	85442	85866	86289	86710	87129
2,4	87547	87933	88377	88789	89200	89609	90016	90422	90826	91228
2,5	0,91629	0,92028	0,92426	0,92822	0,93216	0,93609	0,94001	0,94391	0,94779	0,95166
2,6	95551	95935	0,96317	0,96698	0,97078	0,97456	0,97833	0,98208	0,98582	0,98954
2,7	0,99325	0,99695	1,00063	1,00430	1,00796	1,01160	1,01523	1,01885	1,02245	1,02604
2,8	1,02962	1,03318	03674	04028	04380	04732	05082	05431	05779	06126
2,9	06471	06815	07158	07500	07841	08181	08519	08856	09192	09527
3,0	1,09861	1,10194	1,10526	1,10858	1,11186	1,11514	1,11841	1,12168	1,12493	1,12817
3,1	13140	13462	13783	14103	14422	14740	15057	15373	15688	16002
3,2	16315	16627	16938	17248	17557	17865	18173	18479	18784	19089
3,3	19392	19695	19996	20297	20597	20896	21194	21491	21788	22083
3,4	22378	22671	22964	23256	23547	23837	24127	24415	24703	24990
3,5	1,25276	1,25562	1,25846	1,26130	1,26413	1,26695	1,26976	1,27257	1,27536	1,27815
3,6	28093	28371	28647	28923	29198	29473	29746	30019	30291	30563
3,7	30833	31103	31372	31641	31909	32176	32442	32708	32972	33237
3,8	33500	33763	34025	34286	34547	34807	35067	35325	35584	35841
3,9	36098	36354	36609	36864	37118	37372	37624	37877	38128	38379
4,0	1,38629	1,38879	1,39128	1,39377	1,39624	1,39872	1,40118	1,40364	1,40610	1,40854
4,1	41099	41342	41585	41828	42070	42311	42552	42792	43031	43270
4,2	43508	43746	43984	44220	44456	44692	44927	45161	45395	45629
4,3	45862	46094	46326	46557	46787	47018	47247	47476	47705	47933
4,4	48160	48387	48614	48840	49065	49290	49515	49739	49962	50185
4,5	1,50408	1,50630	1,50851	1,51072	1,51293	1,51513	1,51732	1,51951	1,52170	1,52388
4,6	52606	52823	53039	53256	53471	53687	53902	54116	54330	54543
4,7	54756	54969	55181	55393	55604	55814	56025	56235	56444	56653
4,8	56862	57070	57277	57485	57691	57898	58104	58309	58515	58719
4,9	58924	59127	59331	59534	59737	59939	60141	60342	60543	60744
5,0	1,60944	1,61144	1,61343	1,61542	1,61741	1,61939	1,62137	1,62334	1,62531	1,62728
5,1	62924	63120	63315	63511	63705	63900	64094	64287	64481	64673
5,2	64866	65058	65250	65441	65632	65823	66013	66203	66391	66582
5,3	66771	66959	67147	67335	67523	67710	67896	68083	68269	68455
5,4	68640	68825	69010	69194	69378	69562	69745	69928	70111	70293
5,5	1,70475	1,70656	1,70838	1,71019	1,71199	1,71380	1,71560	1,71740	1,71919	1,72093
5,6	72277	72455	72633	72811	72988	73166	73342	73519	73395	73871
5,7	74047	74222	74397	74572	74746	74920	75094	75267	75440	75613
5,8	75786	75958	76130	76302	76473	76644	76815	76985	77156	77326
5,9	77495	77665	77834	78002	78171	78339	78507	78675	78842	79009
6,0	1,79176	1,79342	1,79509	1,79675	1,79840	1,80006	1,80171	1,80336	1,80500	1,80665
6,1	80829	80993	81156	81319	81482	81645	81808	81970	82132	82294
6,2	82455	82616	82777	82938	83098	83258	83418	83578	83737	83896
6,3	84055	84214	84372	84530	84688	84845	85003	85160	85317	85473
6,4	85630	85786	85942	86097	86253	86408	86563	86718	86872	87026
6,5	1,87180	1,87334	1,87487	1,87641	1,87794	1,87947	1,88099	1,88251	1,88403	1,88555
6,6	88707	88858	89010	89160	89311	89462	89612	89762	89912	90061
6,7	90211	90360	90509	90658	90806	90954	91102	91250	91398	91545
6,8	91692	91839	91986	92132	92279	92425	92571	92716	92862	93007
6,9	93152	93297	93442	93586	93730	93874	94018	94162	94305	94448
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Продолжение табл. XI

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	1,94591	1,94734	1,94876	1,95019	1,95161	1,95303	1,95445	1,95586	1,95727	1,95869
7,1	96009	96150	96291	96431	96571	96711	96851	96991	97130	97269
7,2	97408	97547	97685	97824	97962	98100	98238	98376	98513	1,98650
7,3	1,98787	1,98921	1,99061	1,99198	1,99334	1,99470	1,99606	1,99742	1,99877	2,00013
7,4	2,00148	2,00283	2,00418	2,00553	2,00687	2,00821	2,00956	2,01089	2,01223	2,01357
7,5	2,01490	2,01624	2,01757	2,01890	2,02022	2,02155	2,02287	2,02419	2,02551	2,02683
7,6	02815	02946	03078	03209	03340	03471	03601	03732	03862	03992
7,7	04122	04252	04381	04511	0 640	04769	04898	05027	05155	05284
7,8	05412	05540	05668	05796	05924	06051	06179	06306	06433	06560
7,9	06686	06813	06939	07065	07191	07317	07443	07568	07694	07819
8,0	2,07944	2,08069	2,08194	2,08318	2,08443	2,08567	2,08691	2,08815	2,08939	2,09063
8,1	09186	09310	09433	09556	09679	09802	09924	10047	10169	10291
8,2	10413	10535	10657	10779	10900	11021	11142	11263	11384	11505
8,3	11626	11746	11866	11986	12106	12226	12346	12465	12585	12704
8,4	12823	12942	13061	13180	13293	13417	13535	13653	13771	13889
8,5	2,14007	2,14124	2,14242	2,14359	2,14476	2,14593	2,14710	2,14827	2,14943	2,15060
8,6	15176	15292	15409	15524	15640	15756	15871	15987	16102	16217
8,7	16332	16447	16562	16677	16791	16905	17020	17134	17243	17361
8,8	17475	17589	17702	17816	17929	18042	18155	18267	18380	18493
8,9	18605	18717	18830	18942	19054	19165	19277	19389	19500	19611
9,0	2,19722	2,19834	2,19944	2,20055	2,20166	2,20276	2,20387	2,20497	2,20607	2,20717
9,1	20827	20937	21047	21157	21266	21375	21485	21594	21703	21812
9,2	21920	22029	22138	22246	22354	22462	22570	22678	22786	22894
9,3	23001	23109	23216	23324	23431	23538	23645	23751	23858	23965
9,4	24071	24177	24284	24390	24493	24601	24707	24813	24918	25024
9,5	2,25129	2,25234	2,25339	2,25444	2,25549	2,25654	2,25759	2,25863	2,25968	2,26072
9,6	26176	26280	26384	26488	26592	26693	26799	26903	27006	27109
9,7	27213	27316	27419	27521	27624	27727	27829	2 932	28034	28136
9,8	28238	28340	28442	28544	28646	28747	28849	28950	29051	29152
9,9	29253	29354	29455	29556	29657	29757	29858	29958	30058	30158

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$\ln 10^1 = 2{,}30258509$ $\ln 10^5 = 11{,}51293$ $\ln 10^9 = 20{,}72327$
$\ln 10^2 = 4{,}60517$ $\ln 10^6 = 13{,}81551$ $\ln 10^{10} = 23{,}02585$
$\ln 10^3 = 6{,}90776$ $\ln 10^7 = 16{,}11810$ $\ln 10^{11} = 25{,}32844$
$\ln 10^4 = 9{,}21034$ $\ln 10^8 = 18{,}42063$ $\ln 10^{12} = 27{,}63102$

Примечание. Таблица содержит пятизначные натуральные логарифмы чисел от 1 до 9,99. Поэтому для нахождения натурального логарифма числа N оно должно быть представлено в виде $N = N' \cdot 10^{\pm m}$, где $1 \leqslant N' \leqslant 10$; тогда $\ln N = \ln N' \pm \ln 10^m$; $\ln N'$ находится непосредственно из таблицы, а значение $\ln 10^m$ указано внизу неё для всех $m \leqslant 12$.

Примеры. $\ln 728{,}4 = ?$

$$728{,}4 = 7{,}284 \cdot 10^2; \qquad \ln 728{,}4 = \ln 7{,}284 + \ln 10^2.$$

Из таблицы

$\ln 7{,}28 \ldots 1{,}98513\ (\Delta = 137)$

$\ln 7{,}284 = 1{,}98668$
$\ln 10^2 = 4{,}60517$
$\ln 728{,}4 = 6{,}59085$

$\ln 0{,}00242 = ?$

$$0{,}00242 = 2{,}42 \cdot 10^{-3}; \qquad \ln 0{,}00242 = \ln 2{,}42 - \ln 10^3$$

$-\ln 10^3 = -6{,}90776$
$\ln 2{,}42 = 0{,}88377$
$\ln 0{,}00242 = -6{,}02399$

ТАБЛИЦА XII. ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Синусы

	0	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности				
											1′	2′	3′	4′	5′
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	0,1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	1736	1754	1771	1788	1806	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	0,1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	0,2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	0,3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	0,4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	0,5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	0,5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	0,6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10
45	7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10

Косинусы

$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$

Продолжение табл. XII

Синусы

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
46°	0,7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	0,7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	8
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	0,8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	0,8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	0,9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	0,9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	0,9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	0,9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	0	0	0

Косинусы

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

Продолжение табл. XII

Тангенсы

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	0875	0892	0910	0928	0945	0933	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	15 4	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	0,8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
45	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1,2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45

Котангенсы

$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$

Продолжение табл. XII

Тангенсы

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
56	1,4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1,8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1,8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9453	9542	14	27	41	55	68
63	1,9626	9711	9797	9883	9970	2,0057	2,0145	2,0233	2,0323	2,0413	15	29	44	58	73
64	2,0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2,1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2,2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2,9042	9208	9375	9544	9714	9887	3,0061	3,0237	3,0415	3,0595	29	58	87	116	145
72	3,0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3,2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3,4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3,7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′
76	4,0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972
77	4,3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646
78	4,7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	5,0045	5,0504	5,0970
79	5,1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140
80	5,6713	7297	7894	8502	9124	9758	6,0405	6,1066	6,1742	6,2432
81	6,3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	7,0264
82	7,1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	8,0285
83	8,1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	9,0579	9,2052	9,3572
84	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20
85	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95
86	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46
87	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27
88	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08
89	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0

Котангенсы

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Примечание. Таблицы позволяют находить натуральные значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов для всех острых углов, содержащих целое число градусов и минут, а также решать обратную задачу.

Если угол содержит число минут, не кратное шести, то для получения соответствующей поправки пользуются колонкой „Разности" в правой части таблиц. Для отыскания косинусов и котангенсов заменяют их соответственно синусами и тангенсами, пользуясь формулами приведения

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha);\ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

При отыскании тангенсов углов, превышающих 75° (и котангенсов углов, меньших 15°), если число минут не кратно 6, нужно пользоваться квадратической интерполяцией, так как в этой части таблицы точность разностей недостаточна.

Примеры: 1) Найти $\sin 32^\circ 15'$.

В таблице синусов находим	$\sin 32^\circ 12' = 0{,}5329$
В колонке „Разности" поправка на	$3' \quad 7$
Складывая, получаем	$\sin 32^\circ 15' = 0{,}5336$

2) Найти угол α, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}7285$.

В таблице тангенсов находим ближайшее меньшее число	1,7251 . . 59°54′
В колонке „Разности" берем поправку	. . . . . 34 . . . 3′
Складывая, получаем	. . . . . 1,7285 . . . 59°57′

Следовательно, $\alpha = 90^\circ - 59^\circ 57' = 30^\circ 03'$.

ТАБЛИЦА XIII. ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Логарифмы синусов

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
0°	$-\infty$	7,2419	5429	7190	8439	9408	8,0200	8,0870	8,1450	8,1961					
1	8,2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206					
2	5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041					
3	7183	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326					
4	8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	16	32	48	64	80
5	9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	9,0046	9,0120	13	26	39	52	65
6	9,0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	11	22	33	44	55
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	10	19	29	38	48
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	8	17	25	34	42
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	8	15	23	30	38
10	2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	7	14	20	27	34
11	9,2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	6	12	19	25	31
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	6	11	17	23	28
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	5	11	16	21	26
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	5	10	15	20	24
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	5	9	14	18	23
16	9,4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4	9	13	17	21
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4	8	12	16	20
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18
20	5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	3	7	10	14	17
21	9,5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	3	6	10	13	16
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	3	6	9	12	15
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	3	6	9	12	15
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	3	6	8	11	14
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	3	5	8	11	13
26	9,6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	3	5	8	10	13
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	2	5	7	10	12
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	2	5	7	9	12
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	2	4	7	9	11
30	6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	2	4	6	9	11
31	9,7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	2	4	6	8	10
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	2	4	6	8	10
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	2	4	6	8	10
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	2	4	6	7	9
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	2	4	5	7	9
36	9,7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	2	3	5	7	9
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	2	3	5	7	8
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	2	3	5	6	8
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	2	3	5	6	8
40	8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	1	3	4	6	7
41	9,8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	1	3	4	6	7
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	1	3	4	6	7
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	1	3	4	5	7
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1	3	4	5	6
45	8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6

Логарифмы косинусов

$\lg \cos \alpha = \lg \sin (90° - \alpha)$

Продолжение табл. XIII

Логарифмы синусов

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
46	9,8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	1	2	4	5	6
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	1	2	3	5	6
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	1	2	3	4	6
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1	2	3	4	5
50	8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1	2	3	4	5
51	9,8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	1	2	3	4	5
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	1	2	3	4	5
53	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	1	2	3	4	5
54	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1	2	3	4	5
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	1	2	3	3	4
56	9,9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	1	2	3	3	4
57	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	1	2	2	3	4
58	9284	9289	9294	9293	9303	9308	9312	9317	9322	9326	1	2	2	3	4
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1	1	2	3	4
60	9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	1	1	2	3	4
61	9,9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	1	1	2	3	3
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	1	1	2	3	3
63	9499	9503	9507	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	1	1	2	3	3
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1	1	2	2	3
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	1	1	2	2	3
66	9,9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	1	1	2	2	3
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	1	1	2	2	3
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	0	1	1	2	2
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	0	1	1	2	2
70	9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	0	1	1	2	2
71	9,9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	0	1	1	2	2
72	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	0	1	1	2	2
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	0	1	1	2	2
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	0	1	1	1	2
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	0	1	1	1	2
76	9,9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	0	1	1	1	2
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	0	1	1	1	1
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	0	1	1	1	1
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	0	0	1	1	1
80	9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	0	0	1	1	1
81	9,9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	0	0	1	1	1
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	0	0	1	1	1
83	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	0	0	0	1	1
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	0	0	0	0	1
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	0	0	0	0	0
86	9,9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	0	0	0	0	0
87	9994	9994	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	0	0	0	0	0
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
89	9999	9999	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	0	0	0	0	0

Логарифмы косинусов

$\lg \cos \alpha = \lg \sin (90° - \alpha)$

Продолжение табл. XIII

Логарифмы тангенсов

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
0°	—∞	7,2419	7,5429	7,7190	7,8439	7,9409	8,0200	8,0870	8,1450	8,1962					
1	8,2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208					
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046					
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336					
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	16	32	48	64	81
5	9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	9,0068	9,0143	13	26	40	53	66
6	9,0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	11	22	34	45	56
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	10	20	29	39	49
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	9	17	26	35	43
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	8	16	23	31	39
10	2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	7	14	21	28	35
11	9,2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	6	13	19	26	32
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	6	12	18	24	30
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	6	11	17	22	28
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	5	10	16	21	26
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	5	10	15	20	25
16	9,4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	5	9	14	19	23
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	4	9	13	18	22
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	4	8	13	17	21
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	4	8	12	16	20
20	5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	4	8	12	15	19
21	9,5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	4	7	11	15	19
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	4	7	11	14	18
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	3	7	10	14	17
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	3	7	10	13	17
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	3	7	10	13	16
26	9,6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	3	6	9	13	16
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	3	6	9	12	15
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	3	6	9	12	15
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	3	6	9	12	15
30	7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	3	6	9	12	14
31	9,7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	3	6	9	11	14
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	3	6	8	11	14
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	3	5	8	11	14
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	3	5	8	11	14
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	3	5	8	11	13
36	9,8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	3	5	8	11	13
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	3	5	8	10	13
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	3	5	8	10	13
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	3	5	8	10	13
40	9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	3	5	8	10	13
41	9,9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	3	5	8	10	13
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	3	5	8	10	13
43	9697	9712	9727	9742	9757	9773	9788	9803	9818	9833	3	5	8	10	13
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	3	5	8	10	13
45	10,0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13

Логарифмы котангенсов

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha = \lg \operatorname{tg} (90° - \alpha) = -\lg \operatorname{tg} \alpha$$

Продолжение табл. XIII

Логарифмы тангенсов

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	Разности 1′	2′	3′	4′	5′
46	10,0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	3	5	8	10	13
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	3	5	8	10	13
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	3	5	8	10	13
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	3	5	8	10	13
50	0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	3	5	8	10	13
51	10,0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	3	5	8	10	13
52	1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	3	5	8	10	13
53	1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	3	5	8	11	13
54	1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	3	5	8	11	13
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	3	5	8	11	14
56	10,1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	3	5	8	11	14
57	1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	3	6	8	11	14
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	3	6	9	11	14
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	3	6	9	12	14
60	2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	3	6	9	12	15
61	10,2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	3	6	9	12	15
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	3	6	9	12	15
63	2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3	6	9	13	16
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3293	3	6	10	13	16
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3	7	10	13	17
66	10,3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3	7	10	14	17
67	3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	4	7	11	14	18
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4	7	11	15	19
69	4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4	8	12	15	19
70	4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4	8	12	16	20
71	10,4630	4655	4680	4705	4730	4755	4780	4805	4831	4857	5	8	13	17	21
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5	9	13	18	22
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5	9	14	19	23
74	5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5	10	15	20	25
75	5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	5	10	16	21	26
76	10,6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6	11	17	22	28
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6	12	18	24	30
78	6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	6	13	19	26	32
79	7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7	14	21	28	35
80	7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8	16	23	31	39
81	10,8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	9	17	26	35	43
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	10	20	29	39	49
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	11	22	34	45	56
84	9784	9857	9932	11,0008	11,0085	11,0164	11,0244	11,0326	11,0409	11,0494	13	26	40	53	66
85	11,0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	16	32	48	64	81
86	11,1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663					
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357					
88	4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167					
89	7581	8038	8550	9130	9300	12,0591	12,1561	12,2810	12,4571	12,7581					

Логарифмы котангенсов

$$\lg \operatorname{ctg} \alpha = \lg \operatorname{tg} (90° - \alpha) = - \lg \operatorname{tg} \alpha$$

Примечание. Таблицы логарифмов синусов и тангенсов построены так же, как и табл. XII натуральных значений синусов и тангенсов, и пользование ими аналогично.

ТАБЛИЦА XIV. КРУГОВЫЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
(аргумент в дуговых единицах и градусах)

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в град.
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0
01	01000	0,99995	01000	01005	0,99005	01000	00005	01000	0°34′23″
02	02000	99980	02000	02020	98020	02000	00020	02000	1°08′45″
03	03000	99955	03001	03045	97045	03000	00045	02999	1°43′08″
04	03999	99920	04002	04081	96079	04001	00080	03998	2°17′31″
05	04998	99875	05004	05127	95123	05002	00125	04996	2°51′53″
06	05996	99820	06007	06184	94176	06004	00180	05993	3°26′16″
07	06994	99755	07011	07251	93239	07006	00245	06989	4°00′39″
08	07991	99680	08017	08329	92312	08009	00320	07983	4°35′01″
09	08988	99595	09024	09417	91393	09012	00405	08976	5°09′24″
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5°43′46″
11	10978	99396	11045	11628	89583	11022	00606	10956	6°18′09″
12	11971	99281	12058	12750	88692	12029	00721	11943	6°52′32″
13	12963	99156	13074	13883	87810	13037	00846	12927	7°26′54″
14	13954	99022	14092	15027	86936	14046	00982	13909	8°01′17″
15	14944	98877	15114	16183	86071	15056	01127	14889	8°35′40″
16	15932	98723	16138	17351	85214	16068	01283	15865	9°10′02″
17	16918	98558	17166	18530	84366	17082	01448	16833	9°44′25″
18	17903	98384	18197	19722	83527	18097	01624	17808	10°18′48″
19	18886	98200	19232	20925	82696	19115	01810	18775	10°53′10″
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11°27′33″
21	20846	97803	21314	23368	81058	21155	02213	20697	12°01′56″
22	21823	97590	22362	24608	80252	22178	02430	21652	12°36′18″
23	22793	97367	23414	25860	79453	23203	02657	22603	13°10′41″
24	23770	97134	24472	27125	78663	24231	02894	23550	13°45′04″
25	24740	96891	25534	28403	77880	25261	03141	24492	14°19′26″
26	25708	96639	26602	29693	77105	26291	03399	25430	14°53′49″
27	26673	96377	27676	30996	76338	27329	03667	26362	15°28′11″
28	27636	96106	28755	32313	75578	28367	03946	27291	16°02′34″
29	28595	95824	29841	33643	74826	29408	04235	28213	16°36′57″
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17°11′19″
31	30506	95233	32033	36343	73345	31499	04844	30044	17°45′42″
32	31457	94924	33139	37715	72615	32549	05164	30951	18°20′05″
33	32404	94604	34252	39097	71892	33602	05495	31852	18°54′27″
34	33349	94275	35374	40495	71177	34659	05836	32748	19°28′50″
35	34290	93937	36503	41907	70469	35719	06188	33638	20°03′13″
36	35227	93590	37640	43333	69768	36783	06550	34521	20°37′35″
37	36162	93233	38786	44773	69073	37850	06923	35399	21°11′58″
38	37092	92866	39941	46228	68386	38921	07307	36271	21°46′21″
39	38019	92491	41105	47698	67706	39996	07702	37136	22°20′43″
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22°55′06″
41	39861	91712	43463	50682	66365	42158	08523	38847	23°29′29″
42	40776	91309	44657	52196	65705	43246	08950	39693	24°03′51″
43	41687	90897	45862	53726	65051	44337	09388	40532	24°38′14″
44	42594	90475	47078	5527	64404	45434	09837	41364	25°12′37″
45	43497	90045	48306	5683	63763	46534	10297	42190	25°46′59″
46	44395	89605	49545	5841	63128	47640	10768	43008	26°21′22″
47	45289	89157	50797	6000	62500	48750	11250	43820	26°55′44″
48	46178	88699	52061	6161	61878	49865	11743	44624	27°30′07″
49	47063	88233	53339	6323	61263	50984	12247	45422	28°04′30″
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,6487	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28°38′52″
51	48818	87274	55936	6653	60050	53240	13289	46995	29°13′15″
52	49688	86782	57256	6820	59452	54375	13827	47770	29°47′38″
53	50553	86281	58592	6989	58860	55516	14377	48538	30°22′00″
54	51414	85771	59943	7160	58275	56663	14938	49299	30°56′23″
55	52269	85252	61311	7333	57695	57815	15510	50052	31°30′46″
56	53119	84726	62695	7507	57121	58973	16094	50798	32°05′08″
57	53963	84190	64097	7683	56553	60137	16690	51536	32°39′31″
58	54802	83646	65517	7860	55990	61307	17297	52267	33°13′54″
59	55636	83094	66956	8040	55433	62483	17916	52990	33°48′16″

Продолжение табл. XIV

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в град.
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,8221	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34°22′39″
61	57287	81965	69892	8404	54435	64854	19189	54413	34°57′02″
62	58104	81388	71391	8589	53794	66049	19844	55113	35°31′24″
63	58914	80803	72911	8776	53259	67251	20510	55805	36°05′47″
64	59720	80210	74454	8965	52729	68459	21189	56490	36°40′09″
65	60519	79608	76020	9155	52205	69675	21879	57167	37°14′32″
66	61312	78999	77610	9348	51685	70897	22582	57836	37°48′55″
67	62099	78382	79225	9542	51171	72126	23297	58498	38°23′17″
68	62879	77757	80866	9739	50662	73363	24025	59152	38°57′40″
69	63654	77125	82534	9937	50158	74607	24765	59798	39°32′03″
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,0138	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40°06′25″
71	65183	75836	85953	0340	49164	77117	26282	61068	40°40′48″
72	65938	75181	87707	0544	48675	78384	27059	61691	41°15′11″
73	66687	74517	89492	0751	48191	79659	27849	62307	41°49′33″
74	67429	73847	91309	0959	47711	80941	28652	62915	42°23′56″
75	68164	73169	93160	1170	47237	82232	29468	63515	42°58′19″
76	68892	72484	95045	1383	46767	83530	30297	64108	43°32′41″
77	69614	71791	96967	1598	46301	84838	31139	64693	44°07′04″
78	70328	71091	98926	1815	45841	86153	31994	65271	44°41′27″
$\frac{\pi}{4}=0,7854$	0,70711	0,70711	1	2,1933	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45°
0,79	71035	70385	1,00925	2034	45384	87478	32862	65841	45°15′49″
0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,2255	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45°50′12″
81	72429	68950	05046	2479	44486	90152	34638	66959	46°24′34″
82	73115	68222	07171	2705	44043	91503	35547	67507	46°58′57″
83	73793	67488	09343	2933	43605	92863	36468	68048	47°33′20″
84	74464	66746	11563	3164	43171	94233	37404	68581	48°07′42″
85	75128	65998	13833	3396	42741	95612	38353	69107	48°42′05″
86	75784	65244	16156	3632	42316	97000	39316	69626	49°16′28″
87	76433	64483	18532	3869	41895	98398	40293	70137	49°50′50″
88	77074	63715	20966	4109	41478	99806	41284	70642	50°25′13″
89	77707	62941	23460	4351	41066	1,01224	42289	71139	50°59′36″
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,4596	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51°33′58″
91	78950	61375	28637	4843	40252	04090	44342	72113	52°08′21″
92	79560	60582	31326	5093	39852	05539	45390	72590	52°42′44″
93	80162	59783	34087	5345	39455	06993	46453	73059	53°17′06″
94	80756	58979	36923	5600	39063	08468	47530	73522	53°51′29″
95	81342	58168	39838	5857	38674	09948	48623	73978	54°25′52″
96	81919	57352	42836	6117	38289	11440	49729	74428	55°00′14″
97	82489	56530	45920	6379	37908	12943	50851	74870	55°34′37″
98	83050	55702	49096	6645	37531	14457	51988	75307	56°09′00″
99	83603	54869	52368	6912	37158	15983	53141	75736	56°43′22″
1,00	0,84147	0,54030	1,5574	2,7183	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57°17′45″
01	84683	53186	5922	7456	36422	19069	5549	76576	57°52′07″
02	85211	52337	6281	7732	36059	20630	5669	76987	58°26′30″
03	85730	51482	6652	8011	35701	22203	5790	77391	59°00′53″
04	86240	50622	7036	8292	35345	23788	5913	77789	59°35′15″
05	86742	49757	7433	8577	34994	25396	6038	78181	60°09′38″
06	87236	48887	7844	8864	34646	26996	6164	78566	60°44′01″
07	87720	48012	8270	9154	34301	28619	6292	78946	61°18′23″
08	88196	47133	8712	9447	33960	30254	6421	79320	61°52′46″
09	88663	46249	9171	9743	33622	31903	6552	79688	62°27′09″
1,10	0,89121	0,45360	1,9648	3,0042	0,33287	1,33565	1,6685	0,80050	63°01′31″
11	89570	44466	2,0143	0344	32956	35240	6820	80406	63°35′54″
12	90010	43568	0660	0649	32628	36929	6956	80757	64°10′17″
13	90441	42666	1198	0957	32303	38631	7093	81102	64°44′39″
14	90863	41759	1759	1268	31982	40347	7233	81441	65°19′02″
15	91276	40849	2345	1582	31664	42078	7374	81775	65°53′25″
16	91680	39934	2958	1899	31349	43822	7517	82104	66°27′47″
17	92075	39015	3600	2220	31037	45581	7662	82427	67°02′10″
18	92461	38092	4273	2544	30728	47355	7808	82745	67°36′32″
19	92837	37166	4979	2871	30422	49143	7957	83058	68°10′55″

Продолжение табл. XIV

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в град.
1,20	0,93204	0,36235	2,5722	3,3201	0,30119	**1,50946**	1,8107	0,83365	68°45′18″
21	93562	35302	6503	3535	29820	52764	8258	83668	69°19′40″
22	93910	34365	7328	3872	29523	54598	8412	83965	69°54′03″
23	94249	33424	8198	4212	29229	5645	8568	84258	70°28′26″
24	94578	32480	9119	4556	28938	5831	8725	84546	71°02′48″
25	94898	31532	3,0096	4903	28650	6019	8884	84828	71°37′11″
26	95209	30582	1133	5254	28365	6209	9045	85106	72°11′34″
27	95510	29628	2236	5609	28083	6400	9208	85380	72°45′56″
28	95802	28672	3413	5966	27804	6593	9373	85648	73°20′19″
29	96084	27712	4672	6328	27527	6788	9540	85913	73°54′42″
1,30	0,96356	0,26750	3,6021	3,6693	0,27253	1,6984	1,9709	0,86172	74°29′04″
31	96618	25785	7471	7062	26932	7182	9880	86428	75°03′27″
32	96872	24818	9033	7434	26714	7381	2,0053	86678	75°37′50″
33	97115	23848	4,0723	7810	26448	7583	0228	86925	76°12′12″
34	97348	22875	2556	8190	26185	7786	0404	87167	76°46′35″
35	97572	21901	4552	8574	25924	7991	0583	87405	77°20′57″
36	97786	20924	6734	8962	25666	8198	0764	87639	77°55′20″
37	97991	19945	9131	9354	25411	8406	0947	87869	78°29′43″
38	98185	18964	5,1774	9749	25158	8617	1132	88095	79°04′05″
39	98370	17981	5,4707	4,0149	24908	8829	1320	88317	79°38′28″
1,40	0,98545	0,16997	5,7979	4,0552	0,24660	1,9043	2,1509	0,88535	80°12′51″
41	98710	16010	6,1654	0960	24414	9259	1700	88749	80°47′13″
42	98865	15023	6,5811	1371	24171	9477	1894	88960	81°21′36″
43	99010	14033	7,0555	1787	23931	9697	2090	89167	81°55′59′
44	99146	13042	7,6018	2207	23693	9919	2288	89370	82°30′21″
45	99271	12050	8,2381	2631	23457	2,0143	2488	89569	83°04′44″
46	99387	11057	8,9886	3060	23224	0369	2691	89765	83°39′07″
47	99492	10063	9,8874	3492	22993	0597	2896	89958	84°13′29″
48	99588	09067	10,9334	3929	22764	0827	3103	90147	84°47′52″
49	99674	08071	12,3499	4371	22537	1059	3312	90332	85°22′15″
1,50	0,99749	0,07074	14,1014	4,4817	0,22313	2,1293	2,3524	0,90515	85°56′37″
51	99815	06076	16,428	5267	22091	1529	3738	90691	86°31′00″
52	99871	05077	19,670	5722	21871	1768	3955	90870	87°05′23″
53	99917	04079	24,493	6182	21654	2008	4174	91042	87°39′45″
54	99953	03079	32,461	6646	21438	2251	4395	91212	88°14′08″
55	99978	02079	48,078	7115	21225	2496	4619	91379	88°48′30″
56	99994	01080	92,620	7588	21014	2743	4845	91542	89°22′53″
57	1,00000	00080	1255,766	8066	20805	2993	5073	91703	89°57′16″
$\frac{\pi}{2}=1{,}5708$	1,00000	0,00000	$\pm\infty$	4,8105	0,20788	2,3013	2,5092	0,91715	90°
1,60	0,99957	−0,02920	−34,233	4,9530	0,20190	2,3756	2,5775	0,92167	91°40′24″
70	99166	−0,12884	−7,6966	5,4739	18268	6456	2,8293	93541	97°24′10″
80	97385	−0,22720	−4,2863	6,0496	16530	9422	3,1075	94691	103°07′57″
90	94630	−0,32329	−2,9271	6,6859	149569	3,2632	3,4177	95624	103°51′43″
2,00	0,90930	−0,41615	−2,1850	7,3891	0,135335	3,6269	3,7622	0,96403	114°35′30″
10	86321	−0,50435	−1,7098	8,1662	122456	4,0219	4,1443	97045	120°19′16″
20	80850	−0,58850	−1,37382	9,0250	110803	4,4571	4,5679	97574	126°03′03″
30	74571	−0,66628	−1,11921	9,9742	100259	4,9370	5,0372	98010	131°46′49″
$\frac{3\pi}{4}=2{,}3562$	0,70711	−0,70711	−1	10,5507	0,094780	5,2280	5,3228	0,98219	135°
2,40	0,67546	−0,73739	−0,91601	11,0232	0,090718	5,4662	5,5569	0,98367	137°30′36″
50	59847	−0,80114	−0,74702	12,1825	082085	6,0502	6,1323	98661	143°14′22″
60	51550	−0,85689	−0,60160	13,4637	074274	6,6947	6,7690	98903	148°58′08″
70	42733	−0,90407	−0,47273	14,8797	067206	7,4063	7,4735	99101	154°41′55″
80	33499	−0,94222	−0,35553	16,445	060810	8,1919	8,2527	99263	160°25′41″
90	23925	−0,97096	−0,24641	18,174	055023	9,0596	9,1146	99396	166°09′28″
3,00	0,14112	−0,98999	−0,14255	20.086	049787	10,0179	10,0677	99505	171°53′14″
10	04158	−0,99914	−0,04162	22,198	045049	11,0765	11,1215	99595	177°37′01″

Продолжение табл. XIV

x	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x в град.
π=3,1416	0,00000	−1,00000	0	23,141	0,043214	11,5487	11,5920	0,99627	180°
3,20	−0,05837	−0,99829	+05847	24,533	040762	12,2459	12,2866	99668	183°20′47″
30	−0,15775	−0,98748	15975	27,113	036883	13,5379	13,5748	99728	189°04′34″
40	−0,25554	−0,96680	26432	29,964	033373	14,9654	14,9987	99777	191°48′20″
50	−0,35078	−0,93646	37459	33,115	030197	16,543	16,573	99818	200°32′07″
60	−0,44252	−0,89676	49347	36,598	027324	18,285	18,313	99851	206°15′53″
70	−0,52984	−0,84810	62473	40,447	024724	20,211	20,236	99878	211°59′40″
80	−0,61186	−0,79097	77356	44,701	022371	22,339	22,362	99900	217°43′26″
90	−0,68777	−0,72593	94742	49,402	020242	24,691	24,711	99918	223°27′13″
$\frac{5\pi}{4}$=3,9270	−0,70711	−0,70711	1	50,754	0,019703	25,367	25,387	0,99922	225°
4,00	−0,75680	−0,65364	1,15782	54,598	018316	27,290	27,308	99933	229°10′59″
10	−0,81828	−0,57482	42353	60,340	016573	30,162	30,178	99945	234°54′46″
20	−0,87158	−0,49026	7778	66,686	0149956	33,336	33,351	99955	240°38′32″
30	−0,91617	−0,40080	2,2858	73,700	0135686	36,843	36,857	99963	246°22′19″
40	−0,95160	−0,30733	3,0963	81,451	0122773	40,719	40,732	99970	252°06′05″
50	−0,97753	−0,21080	4,6373	90,017	0111090	45,003	45,014	99975	257°49′52″
60	−0,99369	−0,11215	8,8602	99,484	0100518	49,737	49,747	99980	263°33′38″
70	−0,99992	−0,01239	+80,713	109,947	0090953	54,969	54,978	99983	269°17′25″
$\frac{3\pi}{2}$=4,7124	−1,00000	0,00000	±∞	111,318	0,0089832	55,654	55,663	0,99984	270°
4,80	−0,99616	+0,08750	−11,3849	121,510	0082297	60,751	60,759	99986	275°01′11″
90	−0,98245	18651	−5,2675	134,290	0074466	67,141	67,149	99989	280°44′58″
5,00	−0,95892	28366	−3,3805	148,413	0067379	74,203	74,210	99991	286°28′44″
10	−0,92581	37798	−2,4494	164,02	0060967	82,008	82,014	99993	292°12′31″
20	−0,88345	46852	−1,8856	181,27	0055166	90,633	90,639	99994	297°56′17″
30	−0,83227	55437	−1,50127	200,34	0049916	100,166	100,171	99995	303°40′03″
40	−0,77276	63469	−1,21754	221,41	0045166	110,701	110,705	99996	309°23′50″
$\frac{7\pi}{4}$=5,4978	−0,70711	0,70711	−1	244,15	0,0040958	122,073	122,078	0,99997	315°
5,50	−0,70554	70867	−0,99558	244,69	0040868	122,344	122,348	99997	315°07′36″
60	−0,63127	77557	−0,81394	270,43	0036979	135,211	135,215	99997	320°51′23″
70	−0,55069	83471	−0,65973	298,87	0033460	149,432	149,435	99998	326°35′09″
80	−0,46460	88552	−0,52467	330,30	0030276	165,15	165,15	99998	332°18′56″
90	−0,37388	92748	−0,40311	365,04	0027394	182,52	182,52	99998	338°02′42″
6,00	−0,27942	96017	−0,29101	403,43	0024788	201,71	201,71	99999	343°46′29″
10	−0,18216	98327	−0,18526	445,86	0022429	222,93	222,93	99999	349°30′15″
20	−0,08309	99654	−0,08338	492,75	0020294	246,37	246,37	99999	355°14′02″
2π=6,2832	0,00000	1,00000	0	535,49	0,0018674	267,74	267,74	0,99999	360°
6,30	+01681	99986	+01682	541,57	0018363	272,29	272,29	99999	350°57′48″
40	11655	99318	11735	601,85	0016616	300,92	300,92	99999	366°41′35″
50	21512	97659	22028	665,14	00150344	332,57	332,57	1,00000	372°25′21″
60	31154	95023	32786	735,10	00136037	367,55	367,55	00000	378°09′08″
70	40435	91438	44276	812,41	00123091	406,20	406,20	00000	383°52′54″
80	49411	86940	56834	897,85	00111378	448,92	448,92	00000	389°36′41″
90	57844	81573	70911	992,27	00100779	496,14	496,14	00000	395°20′27″
7,00	0,65699	0,75390	0,87145	1096,63	0,00091188	548,32	548,32	1,00000	401°04′14″
10	72897	68455	1,06489	1211,97	00082510	605,98	605,98	00000	406°48′00″
20	79367	60835	1,30462	1339,43	00074659	669,72	669,72	00000	412°31′47″
30	85044	52608	1,6166	1480,30	00067554	740,15	740,15	00000	418°15′33″
40	89871	43855	2,0493	1636,0	00061125	817,99	817,99	00000	423°59′20″
50	93800	34664	2,7060	1808,0	00055308	904,02	904,02	00000	429°43′06″
60	96792	25126	3,8523	1998,2	00050045	999,10	999,10	00000	435°26′53″
70	98817	15337	6,4429	2208,3	00045283	1104,17	1104,17	00000	441°10′39″
80	99854	05396	18,507	2440,6	00040973	1220,30	1220,30	00000	446°54′25″

Продолжение табл. XIV

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x в град.
$\frac{5\pi}{2}$=7,8540	1	0	$\pm\infty$	2576,0	0,00038820	1287,99	1287,99	1,00000	450°
7,90	0,99894	−0,04600	−21,715	2697,3	00037074	1348,64	1348,64	00000	452°38′12″
8,00	0,98936	−0,14550	−6,7997	2981,0	0,00033546	1490,48	1490,48	1,00000	458°21′58″
10	96989	−0,24354	−3,9824	3294,5	00030354	1647,2	1647,2	00000	464°05′45″
20	94073	−0,33915	−2,7737	3641,0	00027465	1820,5	1820,5	00000	469°49′31″
30	90217	−0,43138	−2,0914	4023,9	00024852	2011,9	2011,9	00000	475°33′18″
40	85460	−0,51929	−1,6457	4447,1	00022487	2223,5	2223,5	00000	481°17′04″
50	79849	−0,60201	−1,32636	4914,8	00020347	2457,4	2457,4	00000	487°00′51″
60	73440	−0,67872	−1,08203	5431,7	00018411	2715,8	2715,8	00000	492°44′37″
70	66297	−0,74865	−0,88556	6002,9	00016659	3001,5	3001,5	00000	498°28′24″
80	58492	−0,81109	−0,72115	6634,2	000150733	3317,1	3317,1	00000	504°12′10″
90	50102	−0,86544	−0,57892	7332,0	000136339	3666,0	3666,0	00000	509°55′57″
9,00	0,41212	−0,91113	−0,45232	8103,1	0,000123410	4051,5	4051,5	1,00000	515°39′43″
20	22289	−0,97484	−0,22864	9897,1	000101039	4948,6	4948,6	00000	527°07′16″
40	02478	−0,99969	−0,02478	12088,4	000082724	6044,2	6044,2	00000	538°34′49″
3π=9,4243	0	−1	0	12391,6	0,00008069⁰	6195,8	6195,8	1,00000	540°
60	−0,17433	−0,98469	+0,17704	14764,8	000067729	7382,4	7382,4	00000	550°02′22″
80	−0,36648	−0,93043	39388	18034,0	000055452	9016,9	9016,9	00000	561°29′55″
10,00	−0,54402	−0,83907	0,64836	22026,0	0,000045400	11013,2	11013,2	1,00000	572°57′28″

Примечание. Таблица дает возможность получать значения тригонометрических, показательных и гиперболических функций с пятью значащими цифрами. Для достижения большей точности в тех случаях, когда первые две значащие цифры образуют число, не превышающее 15, дается, как правило, шесть значащих цифр. Однако значения тригонометрических и гиперболических функций даны в таблице не более чем с пятью десятичными знаками. Если аргумент дан с пятью значащими цифрами, то см. [155] на стр. 351.

Примеры: 1) Найти th 1,315.

Из таблицы находим th 1,31 . . . . . 0,86428 ($\Delta = 250$)

Линейной интерполяцией находим поправку: 5 125

th 1,315 0,86553

2) Найти ln 1339,43. Если ln 1339,43 $= x$, то $e^x = 1339{,}43$; поэтому задача сводится к отысканию значения аргумента по заданному значению показательной функции. Ищем в графе „e^x" заданное число 1339,43 и находим $x = 7{,}20$. Следовательно, ln 1339,43 = 7,20.

Применяя табл. XI, находим:

$1339{,}43 = 1{,}33943 \cdot 10^3 \approx 1{,}339 \cdot 10^3$

ln 1,33 . . . . . 0,28518 ($\Delta = 749$)

9 675

ln 1,339 0,29193

ln 10^3 6,90776

ln 1339 . . . . . 7,19969 ≈ 7,20

ТАБЛИЦА XV. ЗНАЧЕНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНОЙ ФУНКЦИИ $\varphi = \text{inv}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha - \alpha$

α°	Часть числа, общая для всей строки	0′	5′	10′	15′	20′	25′	30′	35′	40′	45′	50′	55′
1	0,000	00177	00225	00281	00346	00420	00504	00598	00704	00821	00950	01092	01248
2	0,000	01418	01603	01804	02020	02253	02503	02771	03058	03364	03689	04035	04402
3	0,000	04790	05201	05634	06091	06573	07079	07610	08167	08751	09362	10000	10668
4	0,000	11364	12090	12847	13634	14453	15305	16189	17107	18059	19045	20067	21125
5	0,000	22220	23352	24522	25731	26978	28266	29594	30963	32374	33827	35324	36864
6	0,00	03845	04008	04175	04347	04524	04706	04892	05083	05280	05481	05687	05898
7	0,00	06115	06337	06564	06797	07035	07279	07528	07783	08044	08310	08582	08861
8	0,00	09145	09435	09732	10034	10343	10559	10980	11308	11643	11984	12332	12687
9	0,00	13048	13416	13792	14174	14563	14960	15363	15774	16193	16618	17051	17492
10	0,00	17941	18397	18860	19332	19812	20299	20795	21299	21810	22330	22859	23396
11	0,00	23941	24495	25057	25628	26208	26797	27394	28001	28616	29241	29875	30518
12	0,00	31171	31832	32504	33185	33875	34575	35285	36005	36735	37474	38224	38984
13	0,00	39754	40534	41325	42126	42938	43760	44593	45437	46291	47157	48033	48921
14	0,00	49819	50729	51650	52582	53526	54482	55448	56427	57417	58420	59434	60460
15	0,00	61498	62548	63611	64686	65773	66873	67985	69110	70248	71398	72561	73738
16	0,0	07493	07613	07735	07857	07982	08107	08234	08362	08492	08623	08756	08889
17	0,0	09025	09161	09299	09439	09580	09722	09866	10012	10158	10307	10456	10608
18	0,0	10760	10915	11071	11228	11387	11547	11709	11873	12038	12205	12373	12543
19	0,0	12715	12888	13063	13240	13418	13598	13779	13963	14148	14334	14523	14713
20	0,0	14904	15093	15293	15490	15689	15890	16092	16296	16502	16710	16920	17132
21	0,0	17345	17560	17777	17996	18217	18440	18665	18891	19120	19350	19583	19817
22	0,0	20054	20292	20533	20775	21019	21266	21514	21765	22018	22272	22529	22788
23	0,0	23049	23312	23577	23845	24114	24386	24660	24936	25214	25495	25778	26062
24	0,0	26350	26639	26931	27225	27521	27820	28121	28424	28729	29037	29348	29660
25	0,0	29975	30293	30613	30935	31260	31587	31917	32249	32583	32920	33260	33602
26	0,0	33947	34294	34644	34997	35352	35709	36069	36432	36796	37166	37537	37910
27	0,0	38287	38666	39047	39432	39819	40209	40602	40997	41395	41797	42201	42607
28	0,0	43017	43430	43845	44264	44685	45110	45537	45967	46400	46837	47276	47718
29	0,0	48164	48612	49064	49518	49976	50437	50901	51368	51838	52312	52788	53268
30	0,0	53751	54238	54728	55221	55717	56217	56720	57226	57736	58249	58765	59285
31	0,0	59809	60336	60866	61400	61937	62478	63022	63570	64122	64677	65236	65799
32	0,0	66364	66934	67507	68084	68665	69250	69838	70430	71026	71626	72230	72838
33	0,0	73449	74064	74684	75307	75934	76565	77200	77839	78483	79130	79781	80437
34	0,0	81097	81760	82428	83100	83777	84457	85142	85832	86525	87223	87925	88631
35	0,0	89342	90058	90777	91502	92230	92963	93701	94443	95190	95942	96698	97459
36	0,	09822	09899	09977	10055	10133	10212	10292	10371	10452	10533	10614	10696
37	0,	10778	10861	10944	11028	11113	11197	11283	11369	11455	11542	11630	11718
38	0,	11806	11895	11985	12075	12165	12257	12348	12441	12534	12627	12721	12815
39	0,	12911	13006	13102	13199	13297	13395	13493	13592	13692	13792	13893	13995
40	0,	14097	14200	14303	14407	14511	14616	14722	14829	14936	15043	15152	15261
41	0,	15370	15480	15591	15703	15815	15928	16041	16156	16270	16386	16502	16619
42	0,	16737	16855	16974	17093	17214	17336	17457	17579	17702	17826	17951	18076
43	0,	18202	18329	18457	18585	18714	18844	18975	19106	19238	19371	19505	19639
44	0,	19774	19910	20047	20185	20323	20463	20603	20743	20885	21028	21171	21315
45	0,	21460	21606	21753	21900	22049	22198	22348	22499	22651	22804	22958	23112
46	0,	23268	23424	23582	23740	23899	24059	24220	24382	24545	24709	24874	25040
47	0,	25206	25374	25543	25713	25883	26055	26228	26401	26576	26752	26929	27107
48	0,	27285	27465	27646	27828	28012	28196	28381	28567	28755	28943	29133	29324
49	0,	29516	29709	29903	30098	30295	30492	30691	30891	31092	31295	31498	31703
50	0,	31909	32116	32324	32534	32745	32957	33171	33385	33601	33818	34037	34257
51	0,	34478	34700	34924	35149	35376	35604	35833	36063	36295	36529	36763	36999
52	0,	37237	37476	37716	37958	38202	38446	38693	38941	39190	39441	39693	39947
53	0,	40202	40459	40717	40977	41239	41502	41767	42034	42302	42571	42843	43116
54	0,	43390	43667	43945	44225	44506	44789	45074	45361	45650	45940	46232	46526
55	0,	46822	47119	47419	47720	48023	48328	48635	48944	49255	49568	49882	50199
56	0,	50518	50838	51161	51486	51813	52141	52472	52805	53141	53478	53817	54159
57	0,	54503	54849	55197	55547	55900	56255	56612	56972	57333	57698	58064	58433
58	0,	58804	59178	59554	59933	60314	60697	61083	61472	61863	62257	62653	63052
59	0,	63454	63858	64265	64674	65086	65501	65919	66340	66763	67189	67618	68050

Примечание. Таблица значений $\varphi = \text{inv}\,\alpha$ позволяет находить φ по α и обратно—решать уравнение $\text{tg}\,\alpha - \alpha = \varphi$, в котором φ дано, а α — неизвестное.

Найденное значение α в градусах и минутах можно перевести в радианы.

Примеры.

1) $\text{inv}\,27°15' = 0{,}039432$, $\text{inv}\,27°17' = 0{,}039432 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}000387 = 0{,}039432 + 0{,}000155 = 0{,}039587$

(линейная интерполяция).

2) $\text{inv}\,\alpha = 0{,}006460$; по таблице $\alpha = 14°55'$.

Если значение $\text{inv}\,\alpha$ не находится в таблице, то, найдя ближайшее меньшее значение, вычисляют поправку (линейной интерполяцией).

Эвольвентная функция употребляется при расчете зуба в эвольвентном зацеплении (см. стр. 277).

ТАБЛИЦА XVI. БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
0,0	+1,0000	0,0000	−∞	−∞	5,0	−0,1776	−0,3276	−0,3085	+0,1479
0,1	+0,9975	+0,0499	−1,5342	−6,4590	5,1	−0,1443	−0,3371	−0,3216	+0,1137
0,2	+0,9900	+0,0995	−1,0811	−3,3238	5,2	−0,1103	−0,3432	−0,3313	+0,0792
0,3	+0,9776	+0,1483	−0,8073	−2,2931	5,3	−0,0758	−0,3460	−0,3374	+0,0445
0,4	+0,9604	+0,1960	−0,6060	−1,7809	5,4	−0,0412	−0,3453	−0,3402	+0,0101
0,5	+0,9385	+0,2423	−0,4445	−1,4715	5,5	−0,0068	−0,3414	−0,3395	−0,0238
0,6	+0,9120	+0,2867	−0,3085	−1,2604	5,6	+0,0270	−0,3343	−0,3354	−0,0568
0,7	+0,8812	+0,3290	−0,1907	−1,1032	5,7	+0,0599	−0,3241	−0,3282	−0,0887
0,8	+0,8463	+0,3688	−0,0868	−0,9781	5,8	+0,0917	−0,3110	−0,3177	−0,1192
0,9	+0,8075	+0,4059	+0,0056	−0,8731	5,9	+0,1220	−0,2951	−0,3044	−0,1481
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	−0,7812	6,0	+0,1506	−0,2767	−0,2882	−0,1750
1,1	+0,7196	+0,4709	+0,1622	−0,6981	6,1	+0,1773	−0,2559	−0,2694	−0,1998
1,2	+0,6711	+0,4983	+0,2281	−0,6211	6,2	+0,2017	−0,2329	−0,2483	−0,2223
1,3	+0,6201	+0,5220	+0,2865	−0,5485	6,3	+0,2238	−0,2081	−0,2251	−0,2422
1,4	+0,5669	+0,5419	+0,3379	−0,4791	6,4	+0,2433	−0,1816	−0,1999	−0,2596
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	−0,4123	6,5	+0,2601	−0,1538	−0,1732	−0,2741
1,6	+0,4554	+0,5699	+0,4204	−0,3476	6,6	+0,2740	−0,1250	−0,1452	−0,2857
1,7	+0,3980	+0,5778	+0,4520	−0,2847	6,7	+0,2851	−0,0953	−0,1162	−0,2945
1,8	+0,3400	+0,5815	+0,4774	−0,2237	6,8	+0,2931	−0,0652	−0,0864	−0,3002
1,9	+0,2818	+0,5812	+0,4968	−0,1644	6,9	+0,2981	−0,0349	−0,0563	−0,3029
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	−0,1070	7,0	+0,3001	−0,0047	−0,0259	−0,3027
2,1	+0,1666	+0,5683	+0,5183	−0,0517	7,1	+0,2991	+0,0252	+0,0042	−0,2995
2,2	+0,1104	+0,5560	+0,5208	+0,0015	7,2	+0,2951	+0,0543	+0,0339	−0,2934
2,3	+0,0555	+0,5399	+0,5181	+0,0523	7,3	+0,2882	+0,0826	+0,0628	−0,2846
2,4	+0,0025	+0,5202	+0,5104	+0,1005	7,4	+0,2786	+0,1096	+0,0907	−0,2731
2,5	−0,0484	+0,4971	+0,4981	+0,1459	7,5	+0,2663	+0,1352	+0,1173	−0,2591
2,6	−0,0968	+0,4708	+0,4813	+0,1884	7,6	+0,2516	+0,1592	+0,1424	−0,2428
2,7	−0,1424	+0,4416	+0,4605	+0,2276	7,7	+0,2346	+0,1813	+0,1658	−0,2243
2,8	−0,1850	+0,4097	+0,4359	+0,2635	7,8	+0,2154	+0,2014	+0,1872	−0,2039
2,9	−0,2243	+0,3754	+0,4079	+0,2959	7,9	+0,1944	+0,2192	+0,2065	−0,1817
3,0	−0,2601	+0,3391	+0,3769	+0,3247	8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	−0,1581
3,1	−0,2921	+0,3009	+0,3431	+0,3496	8,1	+0,1475	+0,2476	+0,2381	−0,1331
3,2	−0,3202	+0,2613	+0,3071	+0,3707	8,2	+0,1222	+0,2580	+0,2501	−0,1072
3,3	−0,3443	+0,2207	+0,2691	+0,3879	8,3	+0,0960	+0,2657	+0,2595	−0,0806
3,4	−0,3643	+0,1792	+0,2296	+0,4010	8,4	+0,0692	+0,2708	+0,2662	−0,0535
3,5	−0,3801	+0,1374	+0,1890	+0,4102	8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	−0,0262
3,6	−0,3918	+0,0955	+0,1477	+0,4154	8,6	+0,0146	+0,2728	+0,2715	+0,0011
3,7	−0,3992	+0,0538	+0,1061	+0,4167	8,7	−0,0125	+0,2697	+0,2700	+0,0280
3,8	−0,4026	+0,0128	+0,0645	+0,4141	8,8	−0,0392	+0,2641	+0,2659	+0,0544
3,9	−0,4018	−0,0272	+0,0234	+0,4078	8,9	−0,0653	+0,2559	+0,2592	+0,0799
4,0	−0,3971	−0,0660	−0,0169	+0,3979	9,0	−0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043
4,1	−0,3887	−0,1033	−0,0561	+0,3846	9,1	−0,1142	+0,2324	+0,2383	+0,1275
4,2	−0,3766	−0,1386	−0,0938	+0,3680	9,2	−0,1367	+0,2174	+0,2245	+0,1491
4,3	−0,3610	−0,1719	−0,1296	+0,3484	9,3	−0,1577	+0,2004	+0,2086	+0,1691
4,4	−0,3423	−0,2028	−0,1633	+0,3260	9,4	−0,1768	+0,1816	+0,1907	+0,1871
4,5	−0,3205	−0,2311	−0,1947	+0,3010	9,5	−0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2032
4,6	−0,2961	−0,2566	−0,2235	+0,2737	9,6	−0,2090	+0,1395	+0,1502	+0,2171
4,7	−0,2693	−0,2791	−0,2494	+0,2445	9,7	−0,2218	+0,1166	+0,1279	+0,2287
4,8	−0,2404	−0,2985	−0,2723	+0,2136	9,8	−0,2323	+0,0928	+0,1045	+0,2379
4,9	−0,2097	−0,3147	−0,2921	+0,1812	9,9	−0,2403	+0,0684	+0,0804	+0,2447
					10,0	−0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490

Примечание. Определения, формулы и графики см. стр. 222.

ТАБЛИЦА XVII. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ *

φ \ θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Эллиптические интегралы 1-го рода $F(\varphi, k)$; $k = \sin\theta$										
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1745	1746	1746	1748	1749	1751	1752	1753	1754	1754
20	3491	3493	3499	3508	3520	3533	3545	3555	3561	3564
30	5236	5243	5263	5294	5334	5379	5422	5459	5484	5493
40	6981	6997	7043	7116	7213	7323	7436	7535	7604	7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0044	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0660	1,0896	1,1226	1,1643	1,2126	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4362
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞
Эллиптические интегралы 2-го рода $E(\varphi, k)$; $k = \sin\theta$										
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1745	1745	1744	1743	1742	1740	1739	1738	1737	1736
20	3491	3489	3483	3473	3462	3450	3438	3429	3422	3420
30	5236	5229	5209	5179	5141	5100	5061	5029	5007	5000
40	6981	6966	6921	6851	6763	6667	6575	6497	6446	6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0401	1,0000

θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E
Полные эллиптические интегралы											
0°	1,5708	1,5708	23°	1,6365	1,5090	46°	1,8691	1,3418	69°	2,4610	1,1272
1	5709	5707	24	6426	5037	47	8848	3329	70	5046	1184
2	5713	5703	25	6490	4931	48	9011	3238	71	5507	1096
3	5719	5697	26	6557	4924	49	9180	3147	72	5998	1011
4	5727	5689	27	6627	4864	50	9356	3055	73	6521	0927
5	5738	5678	28	6701	4803	51	9539	2963	74	7081	0844
6	5751	5665	29	6777	4740	52	9729	2870	75	7681	0734
7	5767	5649	30	6858	4675	53	9927	2776	76	8327	0686
8	5785	5632	31	6941	4609	54	2,0133	2681	77	9026	0611
9	5805	5611	32	7028	4539	55	0347	2587	78	9786	0538
10	1,5828	1,5589	33	1,7119	1,4469	56	2,0571	1,2492	79	3,0617	1,0468
11	5854	5564	34	7214	4397	57	0804	2397	80	1531	0401
12	5882	5537	35	7312	4323	58	1047	2301	81	2553	0338
13	5913	5507	36	7415	4248	59	1300	2206	82	3699	0278
14	5946	5476	37	7522	4171	60	1565	2111	83	5004	0223
15	5981	5442	38	7633	4092	61	1842	2015	84	6519	0172
16	6020	5405	39	7748	4013	62	2132	1920	85	8317	0127
17	6061	5367	40	7868	3931	63	2435	1826	86	4,0528	0096
18	6105	5326	41	7992	3849	64	2754	1732	87	3337	0053
19	6151	5283	42	8122	3765	65	3088	1638	88	7427	0026
20	1,6200	1,5238	43	1,8256	1,3680	66	2,3439	1,1545	89	5,4349	1,0008
21	6252	5191	44	8396	3594	67	3809	1453	90	∞	1,0000
22	6307	5141	45	8541	3506	68	4193	1362			

* $F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$; $K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}}$;

$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha$; $E = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha$

Примечание к табл. XVII. Таблица дает численные значения эллиптических интегралов; например, для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}}$ надо верхний предел $\varphi = \frac{\pi}{3}$ перевести в градусы и десятые доли градуса $\left(\text{в данном примере } \varphi = 60°;\ k = \frac{1}{2}\right)$ и по формуле $k = \sin\theta$ вычислить θ в градусах (в данном примере $\theta = 30°$), после этого искать в таблице соответствующее значение F определенного интеграла $\left[\text{в данном примере } F\left(60°, \frac{1}{2}\right) = 1{,}0896\right]$.

Если φ и θ в таблице не находятся, то надо применить интерполяцию.
Таблица для K, E дает значения полных эллиптических интегралов, получаемых при $\varphi = 90°$.

ТАБЛИЦА XVIII. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Примечание. График функции и ее применение см. стр. 324.

ТАБЛИЦА XIX. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000										
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821	3,00	0,49865
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,49931
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838	3,40	0,49966
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,60	0,499841
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,80	0,499928
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505	2,20	0,4861	4,00	0,499968
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515	2,22	0,4868	4,50	0,499997
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3888	1,67	0,4525	2,24	0,4875	5,00	0,4999997
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881		
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887		
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893		
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898		
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934		
0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938		

Примечание. График функции и ее применение см. стр. 324.

ГЛАВА II

ДЕЙСТВИЯ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ *

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Понятие о *числе* является основным понятием математики. В результате *счета* предметов, составляющих некоторое *множество*, получаются *натуральные* (целые положительные) числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д.

Число, обозначающее одну или несколько равных долей единицы, называется *дробью*.

Дробь можно рассматривать как отношение двух целых чисел: $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^7/_8$, $^3/_2$, $^{15}/_{15}$, $^3/_{10}$, $^{125}/_{100}$, . . .

Дробь, знаменатель которой есть степень десяти, называется *десятичной* и записывается без знаменателя ($^3/_{10} = 0{,}3$; $^{125}/_{100} = 1{,}25$); остальные дроби называются *обыкновенными* или *простыми*.

Числа появляются и в результате измерения различных величин. Измерить величину значит сравнить ее с некоторой определенной величиной того же рода, принятой за *единицу* меры (масштаб). Каждой конкретной величине может быть сопоставлено измеряющее ее число (*значение* величины), которое существенно зависит от принятой при измерении единицы.

Простейший пример величины — прямолинейный отрезок. Если измеряемая величина *соизмерима* с единицей меры, например, отрезок, принятый за единицу, или какая-нибудь его часть укладывается целое число раз в измеряемом отрезке, то в результате измерения получается *целое* или *дробное* число.

Во многих вопросах приходится рассматривать величины противоположных значений (разных знаков, например, тепло и холод; прибыль и убыток; имущество и долг и т. п.), — тогда числу, соответствующему измеряемой величине, приписывают знак + или —, и такое число называют соответственно *положительным* ($+2$; $+\,^2/_3$) или *отрицательным* ($-1{,}2$; $-\,^5/_7$).

Отрицательное число можно рассматривать также как *разность*, когда уменьшаемое меньше вычитаемого. *Нуль* также можно рассматривать как разность, когда уменьшаемое равно вычитаемому ($a - a = b - b = 0$).

Все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные, а также число нуль образуют класс *рациональных* чисел. Всякое рациональное число можно представить как отношение двух целых чисел.

Всякая рациональная дробь может быть представлена или в виде десятичной дроби с определенным числом десятичных знаков (конечной десятичной дроби), или в виде *бесконечной периодической* дроби.

Десятичная дробь называется бесконечной, если число ее десятичных знаков бесконечно велико. Бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, если в ее изображении повторяется в одной и той же последовательности некоторая группа десятичных знаков, называемая *периодом*, например 2,363636 . . . , 0,5232323 . . .; периодические дроби пишут сокращенно так:

вместо 2,363636 . . . пишут 2,(36);
» 0,5232323 . . . » 0,5 (23).

Периодическая дробь называется *чистой*, если период в ней начинается тотчас же после запятой, например 2,(36).

Периодическая дробь называется *смешанной*, если между запятой и периодом есть неповторяющиеся цифры, например, 0,5 (23).

Если знаменатель обыкновенной дроби не содержит никаких иных множителей, кроме 2 и 5, то такая дробь обращается в конечную десятичную дробь.

---

* См. литературу на стр. 349 [37], [46], [112], [142], [145], [151].

Если знаменатель обыкновенной несократимой дроби содержит множители, отличающиеся от 2 и 5, то такая дробь обращается в периодическую чистую, если знаменатель совсем не содержит множителей 2 и 5, или смешанную, если знаменатель наряду с другими множителями содержит и множители 2 или 5.

Бесконечные десятичные дроби могут быть и непериодическими.

Если измеряемая величина несоизмерима с избранной единицей меры (например, диагональ квадрата несоизмерима с его стороной), то результат измерения есть *иррациональное число* (например, $\sqrt{2}$, π). Иррациональное число не может быть представлено как отношение двух целых чисел и может быть изображено бесконечной непериодической десятичной дробью, например, $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$,

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95\ldots$

На практике иррациональные числа заменяют рациональными с требуемой степенью точности; например полагают $\pi = 3{,}14$ (с точностью до 0,01).

Иррациональные числа могут быть положительными или отрицательными.

Числа рациональные и иррациональные образуют класс *вещественных* (или *действительных*) чисел.

Каждому прямолинейному отрезку (каждой величине) соответствует (при избранном масштабе) определенное вещественное число, и обратно: каждому вещественному числу при избранном масштабе можно сопоставить отрезок определенной длины и направления или некоторую точку (конец отрезка) на прямой, называемой в этом случае *числовой прямой*, если все отрезки, соответствующие разным числам, откладывать на прямой от общего начала.

Основные арифметические действия

Наименование действия	Пример	Первое число (35) называется	Второе число (5) называется	Наименование результата
Сложение	$35 + 5 = 40$	1-е слагаемое	2-е слагаемое	Сумма
Вычитание	$35 - 5 = 30$	Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
Умножение	$35 \cdot 5 = 175$	Множимое (1-й сомножитель)	Множитель (2-й сомножитель)	Произведение
Деление	$35 : 5 = 7$ или $\frac{35}{5} = 7$	Делимое	Делитель	Частное (отношение)

Основные законы действий

Формула	Наименование закона
$a + b = b + a$	Переместительный для сложения
$a \cdot b = b \cdot a$	» » умножения
$a + (b + c) = (a + b) + c$	Сочетательный для сложения
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	» » умножения
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	Распределительный

Действия с положительными и отрицательными числами

$$(+a) + (+b) = +(a+b) = a+b$$
$$(+a) + (-b) = +(a-b) = -(b-a)$$
$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b)$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b)$$
$$(+a) \cdot (+b) = +ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab$$
$$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}$$
$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}$$
$$(a+b) \cdot (c+d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a-b) \cdot (c+d) = ac - bc + ad - bd$$

$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$
$$(-a) + (+b) = -(a-b) = +(b-a)$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b)$$
$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b)$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab$$
$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}$$
$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}$$
$$(a+b) \cdot (c-d) = ac + bc - ad - bd$$
$$(a-b) \cdot (c-d) = ac - bc - ad + bd$$

Действия с нулем

$$a + 0 = a; \quad a - 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$$

$$\frac{0}{a} = 0, \text{ если } a \neq 0; \text{ деление на нуль невозможно.}$$

Действия с обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 + a_2}{b} \qquad \frac{a_1}{b} - \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 - a_2}{b}$$

$$\frac{a_1}{b_1 d} + \frac{a_2}{b_2 d} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2 d} \qquad \frac{a_1}{b_1 d} - \frac{a_2}{b_2 d} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2 d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a \cdot m}{b} \qquad m \cdot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{b}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{c} : b \qquad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \qquad \frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

Изменение десятичной дроби от перенесения запятой. От перенесения запятой вправо (влево) на n знаков десятичная дробь увеличивается (уменьшается) в 10^n раз, например $237{,}5 = 2{,}375 \cdot 10^2$; $0{,}002375 = 2{,}375 : 10^3 = 2{,}375 \cdot 10^{-3}$.

Обращение простой дроби в десятичную. Для обращения простой дроби в десятичную нужно числитель дроби делить на знаменатель, обращая последовательно получаемые остатки в десятые, сотые, тысячные, . . . доли.

Примеры:

1) Обратить дробь $\frac{23}{8}$ в десятичную.

Имеем:

23	8
70	2,875
60	
40	

; следовательно, $\frac{23}{8} = 2{,}875$.

2) Обратить дробь $\frac{2}{3}$ в десятичную.

Имеем

2	3
20	0,666...
20	
2	

; следовательно, $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$.

3) Обратить дробь $\frac{5}{6}$ в десятичную.

Имеем

5	6
50	0,8333...
20	
20	
2	

; следовательно, $\frac{5}{6} = 0{,}8\,(3)$.

Обращение периодической дроби в простую. Чтобы обратить *чистую периодическую* дробь в обыкновенную, берут ее период числителем, а в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Примеры: $0{,}(7) = \frac{7}{9}$; $2{,}(05) = 2\frac{5}{99}$.

Чтобы обратить *смешанную периодическую* дробь в обыкновенную, вычитают из числа, стоящего до второго периода, число, стоящее до первого периода, и полученную разность берут числителем, а в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями на конце, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Примеры: $0{,}3\,(52) = \frac{352 - 3}{990} = \frac{349}{990}$;

$$0{,}26\,(4) = \frac{264 - 26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450}.$$

О ПОГРЕШНОСТЯХ И ОКРУГЛЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ

В технических расчетах обычно приходится иметь дело не с точными данными, а лишь с приближенными. Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, не следует пользоваться семизначными логарифмами при вычислениях с числами, имеющими пять верных значащих цифр). Исходные числовые данные многих технических расчетов, являясь приближенными, содержат обычно не более трех-четырех значащих цифр, последняя из которых бывает, как правило, верна лишь ориентировочно (сомнительная цифра); поэтому в большинстве случаев достаточно производить вычисления с числами, содержащими не более четырех значащих цифр. Если в процессе вычислений появляются числа с бо́льшим количеством значащих цифр, то их следует округлять до нужного количества цифр.

Разность между точным числом x и его приближенным значением a называется *погрешностью* данного приближенного числа. Если $|x-a|<\Delta_a$, то величина Δ_a называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенного числа a; отношение $\frac{\Delta_a}{a}=\delta_a$ называется *предельной относительной погрешностью*; ее часто выражают в процентах, реже в промиллях ($\delta_a\% = 100\delta_a$; $\delta_a{}^0/_{00} = 1000\delta_a$).

Пример. 3,14 является приближенным значением числа $\pi=3{,}14159265\ldots$; погрешность его равна $0{,}00159265\ldots$; предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность — равной $\frac{0{,}0016}{3{,}14}=0{,}00051=0{,}051\%$.

Если предельная абсолютная погрешность величины a не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a, то говорят, что у числа a все знаки верные. Иногда требуют, чтобы погрешность не превышала половины единицы разряда последней цифры приближенного числа. Приближенные числа следует записывать, сохраняя только верные знаки. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны, если же нули помещаются в середине или в конце числа (справа) и обозначают отсутствие единиц соответствующих разрядов, то они считаются значащими цифрами. Нули справа в целом числе иногда не идут в счет значащих цифр, если они поставлены взамен неизвестных цифр; в этом случае нули лучше заменять соответствующей степенью 10.

Примеры. 1) Если предельная абсолютная погрешность числа 52 400 равна 100, то это число должно быть записано в виде $524\cdot10^2$ или $5{,}24\cdot10^4$.
2) 1 куб. фут $= 0{,}0283\ м^3$ — три верных значащих цифры.
3) 1 дюйм $= 2{,}5400\ см$ — пять верных значащих цифр.

Предельная относительная погрешность числа, которое имеет абсолютную погрешность не больше половины единицы в n-й цифре и начинается с цифры z, определяется формулой

$$\delta=\frac{1}{2z\cdot10^{n-1}}.$$

Соответствующая таблица $\delta\,{}^0/_0$ имеет вид:

n	z								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	50	25	17	13	10	9	8	7	6
2	5	3	2	1,3	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
3	0,5	0,3	0,2	0,13	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06
4	0,05	0,03	0,02	0,013	0,01	0,009	0,008	0,007	0,006

Пример. Если число $a=47{,}542$ получено в результате действий над приближенными числами и известно, что $\delta_a=0{,}1\%$, то a имеет три верных знака (см. таблицу).

Если приближенное число содержит лишние или неверные знаки, то его следует округлить. При округлении сохраняются только верные знаки, лишние знаки отбрасываются, причем если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая часть состоит только из одной цифры 5, то округляют обычно так, чтобы последняя цифра оставалась четной.

Примеры. $273{,}54\approx273{,}5$; $273542\approx2735\cdot10^2$; $1{,}0003\approx1{,}000$; $273{,}55\approx273{,}6$; $0{,}27345\approx0{,}2734$; $799{,}96\approx800{,}00$.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ

а) Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

б) Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

в) Относительная погрешность произведения и частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или соответственно делимого и делителя.

г) Относительная погрешность n-й степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как для целых, так и для дробных n).

Примечание. При подсчете погрешностей следует иметь в виду указанное выше соотношение

$$\frac{\Delta_a}{a} = \delta_a,$$

откуда

$$\Delta_a = \delta_a \cdot a.$$

Примеры:

1) $p = \dfrac{D}{D-d}$; $\delta_p = \delta_D + \delta_{D-d} = \dfrac{\Delta_D}{D} + \dfrac{\Delta_D + \Delta_d}{D-d}$;

2) $z = \sqrt{1+xy}$; $\delta_z = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\Delta_{xy}}{1+xy} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(\delta_x + \delta_y)\, xy}{1+xy}$.

3) Найти предельную абсолютную погрешность значения площади круга диаметром 22 *мм*, если погрешность диаметра не превышает 0,05 *мм* и принято $\pi = 3{,}14$.

Из формулы $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ следует:

$$\delta_S = \delta_\pi + 2\delta_d = 0{,}0005 + 2 \cdot \frac{0{,}05}{22} \approx 0{,}005.$$

По табл. III находим $S = 380{,}133$ *мм*², следовательно, $\Delta_S = 380{,}133 \cdot 0{,}005 \approx 2$ *мм*².

Отсюда следует заключить, что уже третья цифра числа S является сомнительной, и результат следует представить в виде

$$S = 380 \text{ мм}^2 \ (\pm 2 \text{ мм}^2).$$

Если требуется получить результат с определенной точностью, то, выведя указанным способом формулу для погрешности результата, определяют из полученной формулы допустимые погрешности первоначальных данных.

Пример. $p = \dfrac{D}{D-d}$; требуется определить p с точностью до 1%. D приблизительно в 5 раз больше d. С какой точностью должны быть взяты D и d?

Допуская для D и d равные предельные абсолютные погрешности, получим (см. выше пример 1)

$$\frac{\Delta_D}{D} + \frac{2\Delta_D}{0{,}8D} \leqslant 0{,}01, \text{ или } 3{,}5\delta_D \leqslant 0{,}01,$$

т. е.

$$\delta_D \leqslant \frac{0{,}01}{3{,}5} < 0{,}003 = 0{,}3\%.$$

Погрешность при вычислении значений какой-либо функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции. Погрешность функции есть не что иное, как возможное приращение функции, которое она получит, если ее аргументам дать приращения, равные их погрешностям. Так как погрешности бывают обыкновенно достаточно малыми, то практически вполне допустима замена приращений дифференциалами. Если известны только предельные абсолютные погрешности аргументов, то при вычислении дифференциалов необходимо для всех производных брать их абсолютные значения.

Примеры:

1) $y = \sin x$; $dy = \cos x\, dx$;

$$\Delta_y = |\cos x| \Delta_x; \quad \delta_y = \frac{\Delta_y}{y} = |\operatorname{ctg} x| \Delta_x;$$

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{x\, dx + y\, dy}{x^2 + y^2}$;

$$\delta_z = \frac{\Delta_z}{z} = \frac{x \cdot \Delta_x + y \cdot \Delta_y}{x^2 + y^2};$$

3) $u = e^{-\alpha x} \cos \beta y$;

$$\Delta_u = |\alpha e^{-\alpha x} \cos \beta y| \Delta_x + |\beta \cdot e^{-\alpha x} \sin \beta y| \Delta y.$$

При оценке точности результата вычислений по предельным погрешностям нужно иметь в виду, что фактически погрешность результата обычно значительно меньше вычисленной предельной. Ошибки отдельных этапов вычислений, а также погрешности исходных данных нередко оказываются разных знаков и отчасти компенсируют друг друга. Поэтому при не слишком сложных вычислениях результат берут с одним лишним знаком по сравнению с тем, что дается оценкой предельных погрешностей. Разумеется, нельзя сохранять в результате больше знаков, чем в любом из исходных данных.

Для функции, значение которой находится при помощи таблиц, оценка погрешности может быть произведена крайне просто. Если аргумент задан

с погрешностью Δ_x, то для определения погрешности $f(x)$ находят, пользуясь линейной интерполяцией, приращение функции, соответствующее $\pm\Delta_x$. Абсолютная величина этого приращения и дает предельную абсолютную погрешность $f(x)$.

Примеры:

1) Если диаметр круга $D = 5{,}92$ *см* имеет погрешность $\Delta_D = 0{,}005$ *см*, то соответствующие погрешности длины окружности и площади круга равны соответственно (см. табл. III) 0,016 *см* и 0,05 *см*².

2) Если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}818 \pm 0{,}002$, то (см. табл. XII) $\alpha = 39°17' \pm 0°4'$.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ БЕЗ ТОЧНОГО УЧЕТА ПОГРЕШНОСТЕЙ

При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешности каждого отдельного результата, пользуются следующими правилами подсчета цифр.

1) При сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2) При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом значащих цифр.

Исключение (сохранить еще одну цифру!) можно сделать в том случае, если произведение начинается с единицы, а наименьшее точное число — с какой-либо другой цифры.

3) При возведении в квадрат и куб в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число (последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания).

4) При извлечении квадратного и кубического корня в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число (приближенное). Последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надежна, чем последняя цифра подкоренного.

5) При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила; в окончательном результате эта „запасная цифра" отбрасывается.

6) Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя только одну лишнюю цифру.

7) Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с n цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое дает $n + 1$ цифру в результате.

8) При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число значащих цифр в приближенном данном, имеющем наименьшее число значащих цифр, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков на 1 бо́льшим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

Примеры:

1) Сумму чисел 83,27; 0,4877; 273,1; 1,102 следует искать так:

$$\begin{array}{r} 273{,}1 \\ 83{,}27 \\ 1{,}10 \\ 0{,}49 \\ \hline 358{,}0 \end{array}$$

2) $1{,}2\cdot 37{,}82\cdot 27\,380 \approx 1{,}2\cdot 37{,}8\cdot 27\,400 = 1{,}2\cdot 10^6$.

3) $17{,}63\cdot 0{,}88 \approx 0{,}88\cdot 17{,}6 = 15{,}5$ (а не 15).

4) $43{,}2 : 0{,}63452 \approx 43{,}2 : 0{,}6345 = 68{,}1$.

При вычислениях следует избегать вычитания близких друг к другу чисел, так как точность результата оказывается в этом случае весьма малой по сравнению с точностью исходных данных. Для этого расчетные формулы следует соответствующим образом изменить.

Пример. Площадь сечения тонкостенной трубки с внутренним диаметром $D = 127{,}4$ *мм* и толщиной стенки $\delta = 0{,}15$ *мм* следует вычислять по приближенной формуле

$$S = \pi D\delta = \pi\cdot 127{,}4\cdot 0{,}15,$$

а не как разность площадей кругов диаметра $127{,}4 + 2\cdot 0{,}15 = 127{,}7$ *мм* и диаметра 127,4 *мм*.

СОКРАЩЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Для того чтобы получить произведение двух чисел с k верными значащими цифрами, следует:

а) сомножитель с бо́льшим числом значащих цифр округлить так, чтобы

в нем осталось лишь на одну цифру больше, чем у второго сомножителя;

б) под множимым подписать перевернутый (т. е. с цифрами, написанными в обратном порядке) множитель так, чтобы его последняя цифра находилась под $(k+2)$-й цифрой множимого;

в) найти частные произведения следующим образом: на последнюю цифру множителя умножить часть множимого от его первой цифры до той (включительно), которая находится над последней цифрой множителя; на предпоследнюю цифру множителя умножить часть множимого от первой цифры до той (включительно), которая находится над предпоследней цифрой множителя; на третью от конца цифру множителя умножить часть множимого от первой цифры до той (включительно), которая находится над третьей от конца цифрой множителя, и т. д.; все полученные таким способом частные произведения написать в виде столбца так, чтобы последние цифры их находились на одной вертикали, и сложить; в полученном результате будут верны по меньшей мере первые k значащих цифр;

г) в тех случаях, когда произведение первых значащих цифр сомножителей больше девяти (т. е. $\geqslant 10$), последнюю цифру перевернутого множителя можно подписывать не под $(k+2)$-й, а под $(k+1)$-й цифрой множимого; при этом вычислительная работа уменьшается, в произведении получается по меньшей мере k верных цифр, но приближение получается более грубым, чем при соблюдении правила „б“;

д) при выполнении указанных выше операций запятых в сомножителях не ставить, а место запятой в произведении определять перемножением в уме весьма грубо округленных сомножителей.

Примеры:

1. Найти произведение $x = 82{,}49 \cdot 3{,}7563$ с двумя верными значащими цифрами.

Здесь $k = 2$, $k+2 = 4$. В качестве множителя берем число 82,49; в перевернутом виде 9428; следовательно, под множимым 37 563 нужно подписать множитель 9428 так, чтобы его последняя цифра находилась под $(k+2)$-й — четвертой — цифрой (цифрой 6) множимого.

37563	
9428	
30048	8·3756 = 30048
750	2·375 = 750
148	4·37 = 148
27	9·3 = 27
309,73	

Если взять в качестве множимого число 82, 49, то перевернутый множитель будет 36 573, и вычисление примет следующий вид (в скобках справа пояснен способ получения частных произведений):

8249	
36573	
24747	(3·8249 = 24747)
5768	(7·824 = 5768)
410	(5·82 = 410)
48	(6·8 = 48)
309,73	

— получен тот же результат.

В данном случае произведение первых цифр сомножителей $8 \cdot 3 = 24 > 9$. Следовательно, можно воспользоваться правилом, приведенным в п „г“, и так как $k+1 = 3$, то получится:

37563		8249
9428	или	36573
3000		2472
74		574
12		40
308,6		308,6

Точное значение: $x = 82{,}49 \cdot 3{,}7563 = 309{,}957187$. Следовательно, при пользовании правилом „б“ верными получились первые три знака, при вычислении по правилу „г“ верны первые два знака произведения в соответствии с поставленным требованием.

2. Найти $x = 0{,}478563\pi$ с четырьмя верными значащими цифрами.

Значение числа π берем с семью значащими цифрами, так как второй сомножитель имеет их шесть, т. е. принимаем $\pi = 3{,}141592$; в перевернутом виде: 2 951 413. Пользуясь правилами „г“ (так как $4 \cdot 3 = 12 > 9$) и „б“, получим соответственно:

478563	478563
2951413	2951413
143568	1435689
4785	47856
1912	19140
47	478
20	235
	36
1,50332	1,503434

Вычисленное по семизначным таблицам логарифмов значение $x = 1{,}50345$. Таким образом, при сокращенном умножении по правилу „г“ результат имеет четыре верные значащие цифры, как и требовалось, при пользовании правилом „б“ — пять верных цифр.

Из приведенных примеров видно, что если один из сомножителей имеет k значащих цифр, то $(k+1)$-я цифра у другого сомножителя (см. правило „а“) далеко не всегда нужна: в зависимости от того, каким правилом („б“ или „г“) пользуются, множитель может иметь такое же число цифр, как и множимое, либо даже на единицу меньшее. Однако чтобы не анализировать всякий раз необходимое число цифр, проще всего пользоваться правилом „а“: как видно из примеров, избыточные цифры не осложняют вычислений.

СОКРАЩЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Для того чтобы получить частное двух чисел с k верными значащими цифрами, следует:

а) то число, которое имеет больше значащих цифр, чем другое, округлить так, чтобы в нем осталось лишь на одну цифру больше, чем у второго числа;

б) взять делитель с $(k+2)$ цифрами, разделить на него делимое обычным способом и определить таким образом первую цифру частного; первый частный остаток разделить на делитель, взяв при этом в последнем только $(k+1)$ цифр, и получить таким образом вторую цифру частного; второй частный остаток разделить на делитель, взяв при этом в последнем только k цифр, и получить таким образом третью цифру частного, и т. д. до тех пор, пока не будут найдены k значащих цифр частного;

в) при выполнении этих операций запятых в делимом и делителе не ставить, а место запятой в частном определять делением в уме обоих грубо округленных чисел; удобно при этом передвинуть в них запятые на одинаковое число знаков так, чтобы делитель имел перед запятой только одну цифру.

Примеры:

1. Найти частное $x = 412\,175 : 31\,485$ с четырьмя верными значащими цифрами.

Здесь $k+2=6$; поэтому припишем к делителю 0:

	412175	314 850
(1·314 850)	314850	13,09
	97325	
(3·31 485)	94455	
	2870	
(0·3148); (9·314)	2826	
	44	

Более точное значение: $x = 13{,}0912$. Следовательно, четыре цифры верны.

2. Найти значение $\frac{1}{\pi}$ с шестью верными цифрами. Так как здесь $k+2=8$, то берем в делителе восемь значащих цифр. т. е. $\pi = 3{,}1415926$:

	100000000	31415926
(3·31415926)	94247778	3183099
	5752222	
(1·3141592)	3141592	
	2610630	
(8·314159)	2513272	
	97358	
(3·31415)	94245	
	3113	
(0·3141); (9·314)	2826	
	287	
(9·31)	279	
	8	

Получено $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183099$. Точнее, $\frac{1}{\pi} = 0{,}31830989\ldots$ Таким образом, верны шесть значащих цифр.

СОКРАЩЕННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Для того чтобы извлечь из числа квадратный корень с k верными значащими цифрами, следует извлечь обычным способом корень с числом значащих цифр, бо́льшим $\frac{k}{2}$; после этого остальные значащие цифры находятся делением половины остатка на найденное приближенное значение корня.

Примеры:

1) Найти $\sqrt{7263}$ с пятью верными значащими цифрами.

а) $\sqrt{72'63} = 85{,}2$

	64
165	863
5	825
1702	3800
2	3404
	396

б) $\frac{396}{2} : 852 = \frac{198}{852} = \frac{33}{142} = 0{,}23$ [239]

в) $\sqrt{7263} = 85{,}223$ [239]

Более точное значение этого корня равно 85,223236; таким образом, в действительности верны семь значащих цифр.

2) Найти $\sqrt{\pi}$ с семью верными значащими цифрами.

а) $\sqrt{3',14'15'92} = 1{,}772$

	1
27	214
7	189
347	2515
7	2429
3542	8692
2	7084
	1608

б) $\frac{1608}{2} : 1772 = \frac{201}{443}$

2010	443
1772	4537
2380	
2215	
1650	
1329	
3210	

в) $\sqrt{\pi} = 1{,}772453$[7]. Более точное значение: $\sqrt{\pi} = 1{,}77245385$.

Таким образом, при пользовании способом сокращенного извлечения квадратного корня получено в данном случае семь верных значащих цифр с малой погрешностью в восьмой цифре.

ВЫЧИСЛЕНИЯ С МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ И С ЧИСЛАМИ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩИМИСЯ ОТ ЕДИНИЦЫ

В технических расчетах нередко приходится производить вычисления, в которых фигурируют различные функции малых величин α или $1 \pm \alpha$, где $\alpha \ll 1$, или $a \pm \alpha$, где $\alpha \ll a$. В подобных случаях можно значительно упростить и сократить вычислительную работу, пользуясь первыми членами разложения таких функций в ряд Тэйлора (см. стр. 152—153). Предельная относительная погрешность результата, вычисленного таким способом, может быть определена, как указано на стр. 65.

Ниже приведены приближенные формулы для некоторых выражений, встречающихся особенно часто, получающиеся из разложения соответствующей функции в ряд. Значения предельной относительной погрешности δ_{max} даны в таблице везде с избытком (например, вместо 11,1 принято 12 и т. д.).

Выражения, представляющие функции $(a \pm \alpha)$, где $\alpha \ll a$, можно написать в форме той же функции величины $a\left(1 \pm \frac{\alpha}{a}\right)$, после чего применять приближенные формулы для функции $(1 \pm \beta)$, где $\beta = \frac{\alpha}{a}$.

Например,

$$\frac{1}{a \pm \alpha} = \frac{1}{a\left(1 \pm \frac{\alpha}{a}\right)} \approx \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{\alpha}{a}\right) = \frac{1}{a} \mp \frac{\alpha}{a^2};$$

$$\sqrt{a^2 \pm \alpha} = a\sqrt{1 \pm \frac{\alpha}{a^2}} \approx a\left(1 \pm \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a^2}\right) = a \pm \frac{1}{2}\frac{\alpha}{a},$$

Функция α	Приближенная формула	Предельная относительная погрешность δ_{max} в %	Более точная приближенная формула	Предельная относительная погрешность δ_{max} в %
$(1 \pm \alpha)^n$	$1 \pm n\alpha$	$50n\,(n-1)\,\alpha^2$	$1 \pm n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$	$17n\,(n-1)\,(n-2)\,\alpha^3$
$(1 \pm \alpha)\,(1 - \alpha)$	1	$100\alpha^2$		
$\prod_{l=1}^{k}(1 \pm \alpha_l)$	$1 + \sum_{l=1}^{k} \pm \alpha_l$			
$\frac{\prod_i (1 \pm \alpha_i)}{\prod_j (1 \pm \beta_j)}$	$1 + \Sigma\,(\pm \alpha_i \mp \beta_j)$	если все $\alpha_l \leqslant 1$ и все $\beta_j \leqslant 1$		
$e^{\pm\alpha}$	$1 \pm \alpha$	$50\alpha^2$	$1 \pm \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2$	$17\alpha^3$
$a^{\pm\alpha}$	$1 \pm \alpha \ln a$	$50\,(\ln a)^2\alpha^2$	$1 \pm \alpha \ln a + \alpha^2\frac{(\ln a)^2}{2}$	$17\,(\ln a)^3\alpha^3$
$\ln(1 \pm \alpha)$	$\pm\alpha$	50α	$\pm\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2$	$34\alpha^2$
$\lg(1 \pm \alpha)$	$\pm\,0{,}4343\alpha$	50α	$\pm\,0{,}4343\left(\alpha \mp \frac{1}{2}\alpha^2\right)$	$34\alpha^2$
$\sin\alpha$	α	$17\alpha^2$	$\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$	α^4
$\cos\alpha$	1	$50\alpha^2$	$1 - \frac{1}{2}\alpha^2$	$5\alpha^4$
$\operatorname{tg}\alpha$	α	$34\alpha^2$	$\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$	$14\alpha^4$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{1}{\alpha}$	$34\alpha^2$	$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha$	$3\alpha^4$
$\arcsin\alpha$	α	$17\alpha^2$	$\alpha + \frac{1}{6}\alpha^3$	$8\alpha^4$
$\operatorname{arctg}\alpha$	α	$34\alpha^2$	$\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3$	$20\alpha^4$
$\operatorname{sh}\alpha$	α	$17\alpha^2$	$\alpha + \frac{1}{6}\alpha^3$	α^4
$\operatorname{ch}\alpha$	1	$50\alpha^2$	$1 + \frac{1}{2}\alpha^2$	$5\alpha^4$

Примечания:

1. В первой формуле n — любое рациональное число.
2. Если угол α задан не в радианах, а в градусах: ξ°, то $\alpha = \pi\frac{\xi^\circ}{180^\circ}$.

или отсюда также

$$\sqrt{a^2 \pm \alpha} \approx \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 \pm \alpha}{a}\right).$$

Другой пример:

$$\sqrt[3]{a^3 \pm \alpha} = a\sqrt[3]{1 \pm \frac{\alpha}{a^3}} \approx$$

$$\approx a\left(1 \pm \frac{1}{3}\frac{\alpha}{a^3}\right) = a \pm \frac{1}{3}\frac{\alpha}{a^2},$$

или отсюда также

$$\sqrt[4]{a^3 \pm \alpha} \approx \frac{1}{3}\left(2a + \frac{a^3 \pm \alpha}{a^2}\right).$$

Если угол α мал и $\alpha \ll \varphi$, то можно пользоваться приближенными формулами $\left(\text{для углов } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\sin(\varphi \pm \alpha) \approx \sin\varphi \pm \alpha\cos\varphi;$$

$$\cos(\varphi \pm \alpha) \approx \cos\varphi \mp \alpha\sin\varphi;$$

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\varphi \pm \frac{\alpha}{\cos^2\varphi}.$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ (ЦЕПНЫЕ) ДРОБИ

Число вида

$$a = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

где все числа a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые положительные, называется *непрерывной* или *цепной* дробью. Она получается следующим образом: целое положительное число a_1 складывается с дробью, у которой числитель — единица, а знаменатель — целое положительное число a_2, сложенное с дробью, у которой числитель—единица, а знаменатель—целое положительное число a_3, сложенное с дробью. . . , и т. д.

Сокращенное обозначение непрерывной дроби:

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Если $a_1 = 0$, т. е. a — правильная дробь, то обозначается

$$a = (0, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Каждая дробь, представленная в виде отношения двух целых чисел или в виде десятичной дроби, может быть обращена в непрерывную следующим образом.

Если $a = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то после выделения из a его целой части $E(a) = a_1$ получится

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r}{q},$$

где

$$r < q,$$

или также

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r}}.$$

Так как $\frac{q}{r} > 1$, то, выделив целую часть $E\left(\frac{q}{r}\right) = a_2$, получим

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_1}{r}},$$

где

$$r_1 < r,$$

или также

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}}},$$

где

$$\frac{r}{r_1} > 1.$$

Точно так же, если $E\left(\frac{r}{r_1}\right) = a_3$, то

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_2}{r_1}}} =$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$$

и т. д. Так как $q > r > r_1 > r_2 > \ldots$, то, продолжив эту операцию, всегда дойдем до $r_n = 0$.

Десятичную дробь для обращения в непрерывную следует предварительно превратить в обыкновенную несократимую дробь.

Пример. Превратить дробь $\frac{105}{38}$ в непрерывную:

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{29}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{29}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{29}{9}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}},$$

т. е. $\frac{105}{38} = (2, 1, 3, 4, 2)$.

Вычисление $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — *неполных частных непрерывной дроби* — удобнее производить способом последовательного деления, причем писать каждое частное над соответствующим делителем.

Для взятой в качестве примера дроби $\frac{105}{38}$ вычисление расположится следующим образом:

	2	1	3	4	2
105	38	29	9	2	1
76	29	27	8	2	
29	9	2	1	0	

Если задана непрерывная дробь $\frac{p}{q} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, то m-й *подходящей дробью* называется обыкновенная дробь

$$\frac{p_m}{q_m} = (a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

где

$$m \leqslant n.$$

Например, для непрерывной дроби $\frac{105}{38} = (2, 1, 3, 4, 2)$ подходящие дроби

$$\frac{p_1}{q_1} = 2 = \frac{2}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1};$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4};$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{47}{17};$$

$$\frac{p_5}{q_5} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = \frac{105}{38};$$

последняя подходящая дробь равна точному значению непрерывной дроби.

Равенство $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ гарантирует правильность разложения обыкновенной или десятичной дроби в непрерывную.

Правило вычисления подходящих дробей

а) Первая и вторая подходящие дроби вычисляются непосредственно (см. приведенный выше пример).

б) Все остальные подходящие дроби $\frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ вычисляются по формуле

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1} a_i + p_{i-2}}{q_{i-1} a_i + q_{i-2}},$$

где $i = 3, 4, \ldots, n$, а p_i, q_i, a_i имеют значения, указанные выше.

Пример.

$$\frac{p}{q} = (2, 1, 3, 4, 2):$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1};$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{1 \cdot 3 + 1} = \frac{11}{4};$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{11 \cdot 4 + 3}{4 \cdot 4 + 1} = \frac{47}{17};$$

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{47 \cdot 2 + 11}{17 \cdot 2 + 4} = \frac{105}{38}.$$

Вычисление удобно располагать так:

Неполные частные непрерывной дроби .	(2)	(1)	3	4	2
Числитель подходящей дроби	2	3	11	47	105
Знаменатель подходящей дроби	1	1	4	17	38

Для каждого значения i:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \pm \frac{1}{q_i q_{i+1}};$$

для нечетных значений i эта разность положительна, для четных — отрицательна.

Так, для взятого примера

$$\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{3}{1}-\frac{2}{1}=+\frac{1}{1};$$

$$\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{11}{4}-\frac{3}{1}=-\frac{1}{1\cdot 4};$$

$$\frac{p_4}{q_4}-\frac{p_3}{q_3}=\frac{47}{17}-\frac{11}{4}=+\frac{1}{4\cdot 17};$$

$$\frac{p_5}{q_5}-\frac{p_4}{q_4}=\frac{105}{38}-\frac{47}{17}=-\frac{1}{17\cdot 38}.$$

Каждая подходящая дробь—дробь несократимая.

Приближенные значения конечной непрерывной дроби

а) Каждая из подходящих дробей представляет приближенное значение непрерывной дроби.

б) Точное значение $\frac{p}{q}$ непрерывной дроби лежит между каждыми двумя соседними подходящими дробями; оно больше каждой подходящей дроби нечетного порядка (первой, третьей, пятой, . . .) и меньше каждой подходящей дроби четного порядка (второй, четвертой, шестой. . .), т. е.

$$\frac{p_i}{q_i}<\frac{p}{q}<\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

для всех i нечетных и

$$\frac{p_i}{q_i}>\frac{p}{q}>\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

для всех i четных.

в) Точное значение непрерывной дроби ближе к последующей подходящей дроби, чем к предыдущей, т. е.

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\right|<\left|\frac{p}{q}-\frac{p_i}{q_i}\right|$$

для каждого значения i. Каждая подходящая дробь ближе к точному значению непрерывной дроби, чем всякая другая дробь с меньшим знаменателем.

г) Погрешность, получающаяся при замене точного значения $\frac{p}{q}$ непрерывной дроби подходящей дробью $\frac{p_i}{q_i}$, меньше каждого из следующих трех чисел:

$$\frac{1}{q_iq_{i+1}};\quad \frac{1}{q_i(q_i+q_{i-1})};\quad \frac{1}{q_i^2}.$$

Пример. Подобрать сменные шестерни для нарезания резьбы с шагом $s=3{,}03$ *мм* на токарно-винторезном станке с ходовым винтом шага $S=\frac{1''}{5}$ (5 ниток на 1″).

Передаточное отношение сменных колес (в направлении передачи от шпинделя к ходовому винту) $i=\frac{s}{S}=\frac{3{,}03}{25{,}4\cdot 0{,}2}=\frac{3.03}{5{,}08}=\frac{303}{508}$. При помощи табл. II находим, что числа 303 и 508 взаимно простые.

Обращаем $\frac{p}{q}=\frac{303}{508}$ в непрерывную дробь:

	0	1	1	2	10	1	8
303	508	303	205	98	9	8	1
	303	205	196	90	8	8	
	205	98	9	8	1	0	

Следовательно, $\frac{303}{508}=(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10,\ 1,\ 8)$.

Находим все подходящие дроби:

(0)	(1)	1	2	10	1	8
0	1	1	3	31	34	303
1	1	2	5	52	57	508

Наилучшее приближение:

$$\frac{p_6}{q_6}=\frac{34}{57};$$

оно удобно потому, что $\frac{34}{57}=\frac{2}{3}\cdot\frac{17}{19}=\frac{20}{30}\cdot\frac{85}{95}$ (для выполнения условия сцепляемости нужно $\frac{40}{95}\cdot\frac{85}{60}$), а в наборе сменных колес шестерни с числами зубьев 20, 30, 85 и 95 (а также 40 и 60) имеются.

Погрешность передаточного отношения

$$\delta<\frac{1}{q_6\cdot q_7}=\frac{1}{57\cdot 508}\approx\frac{1}{29\,000},$$

а относительная погрешность

$$\delta_0\,\%=\left(\frac{1}{57\cdot 508}:\frac{303}{508}\right)\cdot 100=\frac{100}{57\cdot 303}\approx 0{,}006\%.$$

Шаг резьбы, нарезанной при применении указанных сменных шестерен с $i=\frac{34}{57}$, будет

$$s=i\cdot S=\frac{34}{57}\cdot\frac{25{,}4}{5}=\frac{4318}{1425}=3{,}03017\ мм,$$

т. е. ошибка шага будет меньше 0,2 *мк*, что вполне допустимо.

ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

Если n — произвольное натуральное (т. е. целое положительное) число, то

$$N = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

где a — основание степени; n — показатель степени; $N = a^n$ — n-я степень основания a. Действие называется: возвышение числа a в n-ю степень.

$(+a)^{2n} = +a^{2n}$; $(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$;

$(-a)^{2n} = +a^{2n}$; $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

Следовательно, $(-1)^n = +1$, если n четное, и $(-1)^n = -1$, если n нечетное.

$a^0 = 1$, если a — конечная величина.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

41

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n};$$

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot \ldots \cdot l^n = (a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot l)^n;$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n};$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}};$$

$$(a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

Иногда для производства вычислений могут быть полезны следующие формулы:

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab;$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc;$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc;$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 + \sqrt{2} \cdot ab)(a^2 + b^2 - \sqrt{2} \cdot ab).$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

или

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Здесь $\binom{n}{k} = C_n^k$ — число сочетаний из n элементов по k элементов в сочетании.

Таблица значений всех $\binom{n}{k}$ от $n = 1$ до $n = 12$ дана на стр. 40.

Для больших значений n биномиальные коэффициенты вычисляются по формуле сочетаний C_n^m (см. стр. 79), причем следует пользоваться тем, что $C_n^m = C_n^{n-m}$. При вычислении ряда биномиальных коэффициентов удобно пользоваться зависимостью

$$\binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1}.$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^{n-k} \cdot b^{k-1} + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(a^{2n-1} - a^{2n-2} \cdot b + a^{2n-3} \cdot b^2 - \ldots + (-1)^{k-1} a^{2n-k} \cdot b^{k-1} + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1} \cdot b + a^{2n-2} \cdot b^2 - \ldots + (-1)^k \cdot a^{2n-k} \cdot b^k + \ldots - a \cdot b^{2n-1} + b^{2n}).$$

Биномиальные коэффициенты могут быть найдены также при помощи треугольника Паскаля:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
. . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . .
```

Этот треугольник легко продолжить вниз, так как каждое число любой строки есть сумма двух соседних чисел вышерасположенной строки (например, $7 = 1+6$, $21 = 6+15$, $35 = 15+20$ и т. д.). Имея треугольник Паскаля с достаточным количеством строк, можно сразу получить из него все биномиальные коэффициенты для любого значения n, для чего нужно взять $n+1$-ю строку этого треугольника (например, 8-я строка дает $C_7^0 = 1$, $C_7^1 = 7$, $C_7^2 = 21$, $C_7^3 = 35$ и т. д.).

Бином Ньютона в развернутом виде:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\times a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n.$$

Аналогично:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}\cdot b^2 - \ldots + (-1)^k \times \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\times a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1} + (-1)^n\cdot b^n.$$

При отрицательных и дробных (см. стр. 152) значениях показателя n в правой части разложения получается бесконечный ряд.

ДЕЙСТВИЯ С КОРНЯМИ

Если $x^n = a$, где n и a заданы, причем n — натуральное число, то $x = \sqrt[n]{a}$; a — подкоренная величина (подкоренное количество); n — показатель корня; $\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из a. Действие называется извлечением корня n-й степени из числа a; $\sqrt[n]{a}$ имеет n различных значений, причем если a — положительное число, то один из корней положителен; он называется арифметическим значением корня n-й степени из a.

$\sqrt[2n]{a}$, где n — натуральное число, $a > 0$, имеет два вещественных значения, одинаковые по абсолютной величине, но различного знака; остальные $2n-2$ корней — комплексные (см. стр. 86);

$\sqrt[2n]{a}$, где n — натуральное число, $a < 0$, не имеет вещественных значений; все $2n$ корней — комплексные;

$\sqrt[2n+1]{a}$, где a — вещественное число и n — натуральное, имеет лишь одно вещественное значение, положительное при $a > 0$ и отрицательное при $a < 0$; остальные $2n$ корней — комплексные;

$$\sqrt[1]{a} = a;$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;$$

$$\sqrt[n]{a\cdot b\cdot c\cdot\ldots\cdot l} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{l};$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}};$$

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{\frac{1}{a^m}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[-n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}};$$

$$c\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ac^n};$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[rm]{a};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^p \cdot b^q}{c^r}} = a^{\frac{p}{n}} \cdot b^{\frac{q}{n}} \cdot c^{-\frac{r}{n}};$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}, \quad (a > b)$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b};$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b};$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Примеры. Действия со степенями:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} - \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8} \ (\approx 43);$$

$2377^2 = (2380 - 3)^2 = 238^2 \cdot 10^2 - 6 \cdot 2380 + 9$; из графы n^2 табл. III: $238^2 = 56\,644$; следовательно,

$2377^2 = 5\,664\,400 + 9 - 14\,280 = 5\,650\,129$.

$85^2 - 35^2 = (85 + 35) \cdot (85 - 35) = 120 \cdot 50 = 6000$.

Бином Ньютона:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + \frac{-2}{1}(-x) + \frac{(-2)(-3)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x)^3 + \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(-x)^4 + \ldots = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

Это равенство справедливо, если $-1 < x < 1$ (см. стр. 152).

Действия с корнями:

$$\sqrt[4]{3}\,\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \pm 3;$$

$\sqrt[1,5]{10} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100} \approx 4{,}6416$ (из графы $\sqrt[3]{n}$ табл. III).

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{-2}{+5} = -\frac{2}{5}$$

(остальные два корня—комплексные).

$$\sqrt{4\sqrt{5} - 2\sqrt{15}} = \sqrt{4\sqrt{5} - \sqrt{60}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{5} + \sqrt{16 \cdot 5 - 60}}{2}} - \sqrt{\frac{4\sqrt{5} - \sqrt{16 \cdot 5 - 60}}{2}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{3\sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{45} - \sqrt[4]{5}.$$

Проверка:

$$\sqrt[4]{45} - \sqrt[4]{5} = \sqrt{3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2\sqrt{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}} = \sqrt{4\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}.$$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом числа N при основании a называется показатель степени n, в которую нужно возвысить основание a — постоянное положительное число (обычно $a > 1$), чтобы получить число N. Следовательно, зависимость $a^n = N$ можно написать в виде

$$n = \log_a N.$$

Символ log N обозначает: логарифм числа N при произвольном основании. Из определения логарифма имеем

$$a^{\log_a N} = N.$$

Основные свойства логарифмов:

$$\log (u \cdot v) = \log u + \log v;$$

$$\log \frac{u}{v} = \log u - \log v;$$

$$\log u^n = n \log u;$$

$$\log \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log u.$$

Пример.

$$\log \frac{t^m \cdot u^n}{v^p \cdot \sqrt[q]{t}} =$$

$$= m \log t + n \log u - p \log v - \frac{1}{q} \log t.$$

Справедливы также равенства

$$\lim_{N \to 0} \log N = -\infty;$$

$$\lim_{N \to \infty} \log N = +\infty$$

(при основании логарифмов, большем единицы);

$$\log 1 = 0; \quad \log_a a = 1;$$

$$\log_a N \cdot \log a = \log_b N \cdot \log b,$$

где $\log a$ и $\log b$ берутся при произвольном, но одинаковом основании; в частности, $\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$ или в мнемонической форме

$$\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$$

(N — вверху, a — внизу в обеих частях формулы; в правой части — логарифм при произвольном основании);

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad \text{или} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Для вычислений в технических расчетах применяются часто логарифмы с основанием $a = 10$ — *десятичные (обыкновенные)* логарифмы. Вместо $\log_{10} N$ установлено (ОСТ 573) обозначение $\lg N$. Из определения логарифма следует: $\lg 10^n = n$, т. е.

$\lg 10 = 1$	$\lg 0{,}1 = -1$
$\lg 100 = 2$	$\lg 0{,}01 = -2$
$\lg 1000 = 3$	$\lg 0{,}001 = -3$
$\lg 10000 = 4$ и т. д	$\lg 0{,}0001 = -4$ и т. д.

Иногда удобнее пользоваться логарифмами при основании $e = 2{,}71828183$ (см. стр. 135). Они называются *натуральными* логарифмами. Вместо $\log_e N$ установлено (ОСТ 573) обозначение $\ln N$.

Пользование натуральными логарифмами особенно удобно, когда в выражение вычисляемой величины входят числа вида $e^{\pm x}$, как это встречается, например, в расчетах колебаний при наличии сил сопротивления, в расчетах ременных передач, некоторых бесступенчатых фрикционных вариаторов, тормозов и пр.:

$$\lg e \cdot \ln 10 = 1,$$

т. е.

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \quad \text{и} \quad \ln 10 = \frac{1}{\lg e};$$

$\lg e = 0{,}43429448\ldots = M$ — модуль десятичных логарифмов;

$$\ln 10 = 2{,}30258509\ldots = \frac{1}{M}.$$

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \cdot \ln N$$

и

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N.$$

Если $10^n < N < 10^{n+1}$ (n — целое число), то $n < \lg N < n + 1$, т. е. $\lg N = n +$ положительная дробная часть. Целое число n, которое может быть положительным или отрицательным, называется *характеристикой* десятичного логарифма, положительная дробная часть — *мантиссой*.

Десятичные логарифмы чисел, отличающихся друг от друга только положением запятой, имеют одну и ту же мантиссу.

Для чисел, бо́льших единицы, характеристика десятичного логарифма на единицу меньше числа цифр до запятой (числа целых знаков). Для чисел, меньших единицы, характеристика отрицательна и по абсолютной величине на единицу больше числа нулей после запятой (т. е. равна общему числу нулей); так как мантисса всегда положительна, то минус, который в этом случае относится только к характеристике, пишется над последней. Например (см. столбец $\lg n$ в табл. III):

$\lg 27600 = 4{,}44091$	$\lg 2{,}76 = 0{,}44091$
$\lg 2760 = 3{,}44091$	$\lg 0{,}276 = \bar{1}{,}44091$
$\lg 276 = 2{,}44091$	$\lg 0{,}0276 = \bar{2}{,}44091$
$\lg 27{,}6 = 1{,}44091$	$\lg 0{,}00276 = \bar{3}{,}44091$

и т. д.

Логарифмы неполной формы — с отрицательной характеристикой и положительной мантиссой — записывают иногда, прибавляя к характеристике $+10$, т. е., например,

вместо $\bar{1},44091$
пишут $9,44091 - 10$
или просто $9,44091$;

вместо $\bar{3},67564$
пишут $7,67564 - 10$
или просто $7,67564$.

Так делают, например, в таблицах для логарифмов тригонометрических функций, меньших единицы.

Отыскание логарифма заданного числа (логарифмирование) и числа по заданному логарифму (антилогарифмирование или потенцирование) выполняется по таблицам.

Действия над логарифмами производятся так же, как над другими десятичными дробями. Если характеристика логарифма отрицательна, а мантисса положительна (логарифм в неполной форме), то логарифм может быть обращен в отрицательное число (логарифм в полной форме) следующим образом:

а) абсолютное значение характеристики уменьшается на единицу (т. е. характеристика увеличивается на единицу);

б) мантисса вычитается из единицы, для чего все цифры ее, кроме последней значащей, вычитаются из 9, а последняя значащая цифра — из 10;

в) перед полученным числом ставится знак минус, например, $\bar{3},44091 = -2,55909$; $-\bar{1},20800 = +0,79200$.

Этим превращением логарифма в полную форму приходится пользоваться при умножении, делении, возвышении в степень, иногда и при вычитании (см. ниже, пример 2).

Аналогичным способом производится переход от полной формы логарифма к неполной.

Примеры:

1) $\lg 0,04293 = \bar{2},63276$. Найти $\ln 0,04293$. $\ln 0,04293 = \frac{1}{M}\lg 0,04293 = 2,3025851 \cdot \bar{2}\,63276$. Так как $\bar{2},63276 = -1,36724$, то $\ln 0,04293 = -2,3025851 \cdot 1,36724$. Для получения этого произведения с шестью верными значащими цифрами пользуемся правилами сокращенного умножения (стр. 68):

$$\begin{array}{r} 23025851 \\ \times\ 427631 \\ \hline 23025851 \\ 6907755 \\ 1381548 \\ 161175 \\ 4604 \\ 920 \\ \hline 31\,481853 \end{array}$$

Следовательно, $\ln 0,04293 = -3,14818$. Пользуясь табл. XI натуральных логарифмов, получили бы $(0,04293 = 4,293 \cdot 10^{-2})$:

$$\begin{array}{r} \ln 4,29 \ldots 1,45629\ (233); \\ 3 \qquad\qquad 70 \\ \hline 1,45699 \\ \bar{5},39483 \\ \hline \ln 0,04293 = \bar{4},85182 = \\ = -3,14818;\ \text{тот же результат.} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ln 10^{-2} = -4,60517 = \\ = \bar{5},39483; \end{array}$$

2) $$x = \sqrt{\frac{1,734 \cdot 0,56^{1,2} \cdot 0,435^{0,18}}{\pi \cdot 2,708 \cdot 0,245^{0,34}}} \cdot \frac{\operatorname{tg} 12°41'}{\cos 25°15'} = \sqrt{y} \cdot \frac{\operatorname{tg} 12°41'}{\cos 25°15'}$$

Вычисление произвести с помощью четырехзначных логарифмов. Имеем:

$$\lg x = \frac{1}{2}\lg y + \lg \operatorname{tg} 12°41' - \lg \cos 25°15', \quad \text{где}$$

$$\lg y = \lg 1,734 + 1,2 \lg 0,56 + 0,18 \lg 0,435 - \lg \pi - \lg 2,708 - 0,34 \lg 0,245;$$

$$\begin{array}{r} \lg 1,734 = 0,2390 \\ 1,2 \lg 0,56 = \bar{1},6978 \\ 0,18 \lg 0,435 = \bar{1},9349 \\ -\lg \pi = \bar{1},5028 \\ -\lg 2,708 = \bar{1},5673 \\ -0,34 \lg 0,245 = 0,2077 \\ \hline \lg y = \bar{1},1495 \\ \hline \frac{1}{2}\lg y = \bar{1},5748 \\ \lg \operatorname{tg} 12°41' = \bar{1},3523 \\ -\lg \cos 25°15' = 0,0436 \\ \hline \lg x = \bar{2},9707 \\ x = 0,09348 \approx 0,093 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg 1,73 \ldots\ldots 0,2380\ [25] \\ 4 \ldots\ldots 10 \\ \hline \lg 1,734 = \quad 0,2390 \end{array}$$

$$\lg 0,56 = \bar{1},7482 = -0,2518$$
$$\times\ 1,2$$
$$5036$$
$$2518$$
$$-0,30216 \approx$$
$$\approx \bar{1},6978$$

$$\lg 0,435 = \bar{1},6385 = -0,3615$$
$$\times\ 0,18$$
$$28920$$
$$3615$$
$$-0,065070 \approx$$
$$\approx \bar{1},9349$$

$$\lg \pi = 0,4972;\quad \lg 2,708 = 0,4327$$

$$-\lg 0,245 = -\bar{1},3892 = +0,6108$$
$$\times\ 0,34$$
$$24432$$
$$18324$$
$$+0,207672 \approx$$
$$\approx 0,2077$$

$$\lg \cos 25°15' = +\bar{1},9564 = -0,0436$$

$$\begin{array}{r} \bar{2},9707 \\ \hline 03 \ldots\ldots 934\ [5] \\ 4 \qquad\qquad 8 \\ \hline 0,09348 \end{array}$$

СОЕДИНЕНИЯ

1) Размещения (обозначение: A) из n элементов по m ($m < n$): соединения, различающиеся либо составом, т. е. самими элементами, из которых образованы соединения, либо порядком элементов. Например, все возможные размещения из четырех элементов a, b, c, d по два: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

Если в размещениях допускается повторение одних и тех же элементов, то число их больше. Для взятого примера добавились бы еще четыре размещения: aa, bb, cc, dd.

Число всех возможных размещений из n элементов по m:

а) число размещений без повторений в них элементов

$$A_n^m = n(n-1) \times$$

$$\times (n-2)\ldots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n!$ — символ факториала, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$;

б) число размещений с повторениями элементов

$$A_n^{m\,(повт)} = n^m.$$

Например: $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ или также

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12;$$

$$A_4^{2(повт)} = 4^2 = 16.$$

2) Перестановки (обозначение: P) из n элементов: частный случай размещений, когда $m = n$, т. е. когда в каждое соединение входят все n элементов и поэтому соединения различаются только порядком элементов.

Если в совокупности из n элементов некоторые повторяются, например один элемент повторяется p раз, другой — q раз, третий — r раз и т. д., то при комбинировании их по n элементов получаются перестановки с повторениями.

Число всех возможных перестановок из n элементов:

а) число перестановок без повторений в них элементов:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

б) число перестановок с повторениями:

$$P_{n\,(p,\ q,\ r,\ \ldots)} = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots}$$

Например: $P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$ (см. стр. 41, табл. IX);

$$P_{8\,(3,\ 2,\ 3)} = \frac{8!}{3!\,2!\,3!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 560.$$

3) Сочетания (обозначение: C) из n элементов по m: соединения, различающиеся только составом, т. е. самими элементами, из которых образованы соединения; порядок элементов в соединении не имеет значения. Так, например, из четырех элементов a, b, c, d можно получить только следующие сочетания по два элемента: ab, ac, ad, bc, bd, cd; комбинации ba, ca, da, cb, db, dc не являются новыми сочетаниями, так как отличаются от написанных только порядком элементов (ba и ab, ca и ac, cb и bc и т. д.), но не самими элементами.

Если в сочетаниях каждый из n элементов может повторяться m раз, то получаются сочетания с повторениями.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m [обозначение: C_n^m или также $\binom{n}{m}$]:

а) число сочетаний без повторений в них элементов

$$C_n^m = \binom{n}{m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$$

или также в другой форме

$$C_n^m = \binom{n}{m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-m)} =$$

$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}};$$

б) число сочетаний с повторениями:

$$C_n^{m\,(повт)} = C_{n+m-1}^m = \binom{n+m-1}{m} =$$

$$= \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} = \frac{P_{n+m-1}}{P_m \cdot P_{n-1}}.$$

Число всех возможных сочетаний из n элементов без повторений

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\\+\binom{n}{n}=2^n-1.$$

Основные свойства сочетаний:

а) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$; этим свойством удобно пользоваться, когда $m>\frac{n}{2}$;

например: $\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=21$ вместо более длинного выражения: $\binom{7}{5}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$ или $\frac{7!}{5!2!}=\\=\frac{5040}{120\cdot2}=21.$

б) $\binom{n}{m+1}=\binom{n}{m}\cdot\frac{n-m}{m+1}$; этим свойством сочетаний удобно пользоваться для вычисления биномиальных коэффициентов;

в) $\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}$;

например: $\binom{8}{5}=\binom{7}{5}+\binom{7}{4}=\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\\=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=21+35=56.$

Если считать, что $\binom{n}{m}=\begin{cases}1 \text{ при } m=0\\0 \text{ при } m>n,\end{cases}$ то будет иметь место соотношение

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{k}{i}=\sum_{i=0}^{m}\left\{\binom{m-1}{i}\binom{k}{i}+\right.\\\left.+\binom{m}{i}\binom{k-1}{i}\right\},$$

где m и k — произвольные натуральные числа, совершенно не зависящие друг от друга.

КОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Прогрессии

1) **Арифметическая прогрессия** (или также **арифметический ряд 1-го порядка**): последовательность чисел — ***членов прогрессии*** — a_1, a_2, a_3, . . . , a_j, . . . , a_n, в которой разность каждых двух последовательных членов — постоянная величина. *Разностью* арифметической прогрессии d называется разность между любым членом ее и предшествующим. Следовательно,

$$a_2=a_1+d;\ a_3=a_1+2d,\ldots,\\a_j=a_1+(j-1)\,d;$$

последний член арифметической прогрессии

$$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$

или также

$$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)\cdot d]\cdot n}{2}.$$

Любые три из пяти величин a_1 (или вообще a_j), d, n, a_n и S_n вполне определяют арифметическую прогрессию.

Пример. Задания: $a_4=25$; $d=6$; $S_n=735$. Следовательно,

$$a_1=a_4-3d=25-3\cdot6=7;$$

прогрессия 7; 13; 19; 25; 31 и т. д.;

$$\frac{[2\cdot7+(n-1)\cdot6]\,n}{2}=735 \text{ или } (4+3n)\,n=735;$$

$$3n^2+4n-735=0;$$

отсюда

$$n=\frac{-2+\sqrt{4+3\cdot735}}{3}=\frac{-2+47}{3}=15;$$

$$a_n=a_{15}=a_1+(n-1)\,d=7+14\cdot6=91.$$

Проверка:

$$S_n=S_{15}=\frac{(7+91)\cdot15}{2}=49\cdot15=735.$$

2) **Геометрическая прогрессия** (или также **геометрический ряд**): последовательность чисел—***членов прогрессии***—a_1, a_2, a_3, . . . ,a_n, в которой отношение каждых двух последовательных членов — постоянная величина. *Знаменателем* геометрической прогрессии q называется отношение любого члена ее к предшествующему. Следовательно, $a_2=a_1q$; $a_3=a_1q^2$; . . ; $a_j=a_1q^{j-1}$; . . . последний член геометрической прогрессии

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1},$$

или также

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Если прогрессия—убывающая ($q < 1$), то удобнее пользоваться формулой

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

или также

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Любые три из пяти величин a_1 (или вообще a_j), q, n, a_n и S_n вполне определяют геометрическую прогрессию.

Пример. Числа оборотов в минуту шпинделей металлорежущих станков обычно образуют геометрическую прогрессию. Если a_1 — наименьшее число оборотов шпинделя в минуту, a_n — наибольшее, q — знаменатель ряда чисел оборотов, n — число ступеней скорости шпинделя, $a_n : a_1 = R$ — диапазон регулирования этих скоростей, то

$$\frac{a_n}{a_1} = R = q^{n-1},$$

откуда

$$q = \sqrt[n-1]{R} \text{ и } n = 1 + \frac{\lg R}{\lg q} = \frac{\lg (Rq)}{\lg q}.$$

Этими формулами пользуются в кинематических расчетах коробок скоростей станков. Выбрано, например: $R \approx 50$, $a_1 \approx 11{,}5$; при этом должно быть еще соблюдено условие $q \approx \sqrt[E]{10}$, где E — целое число из ряда 40, 20, 10 и 5, а n по условиям конструкции должно иметь форму $n = 2^{E_1} \cdot 3^{E_2}$, где E_1 и E_2 — также целые числа. Получаем

$$n = 1 + \frac{\lg R}{\lg q} \approx 1 + \frac{\lg 50}{\frac{E}{\lg \sqrt[10]{10}}} \approx 1 + 1{,}70E.$$

Принимая последовательно $E = 40, 20, 10, 5$, получаем $n = 69, 35, 18, 10$. Удовлетворяет поставленным условиям лишь значение $n = 18 = 2 \cdot 3^2$. При этом знаменатель ряда $q = \sqrt[10]{10}$ ($\approx 1{,}26$), и действительный диапазон регулирования оборотов

$$R = q^{n-1} = (\sqrt[10]{10})^{17}; \quad \lg R = 17 \cdot 0{,}1 = 1{,}7000,$$

и $R = 50{,}12$ — очень близко к требуемому значению. Числа оборотов шпинделя в минуту: $a_1 = 11{,}5$; $a_2 = 11{,}5 \sqrt[10]{10} \approx 11{,}5 \cdot 1{,}26 = 14{,}5$; $a_3 = 11{,}5 \cdot (\sqrt[10]{10})^2 \approx 11{,}5 \cdot 1{,}58 \approx 18{,}2$; $a_4 = 11{,}5 \cdot (\sqrt[10]{10})^3 \approx 11{,}5 \cdot 2 = 23$ и т. д.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: прогрессия a_1, $a_1 q$, $a_1 q^2$, ..., $a_1 q^n$, ..., где $q < 1$ и $n \to \infty$. Для такой прогрессии предел суммы n членов $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$, поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Арифметические ряды порядка выше 1-го

Ряд чисел Δa_j, образованный разностями последовательных членов заданного ряда a_j, называется рядом разностей 1-го порядка. Аналогично из ряда членов Δa_j образуется ряд $\Delta^2 a_j$ разностей 2-го порядка, из ряда членов $\Delta^2 a_j$ — ряд $\Delta^3 a_j$ разностей 3-го порядка и т. д. Если ряд $\Delta^k a_j$ состоит из равных чисел, то ряд a_j называется арифметическим рядом k-го порядка. Следовательно, иначе: *арифметическим рядом k-го порядка* называется такой ряд, у которого разности 1-го порядка образуют арифметический ряд (k — 1)-го порядка.

Примеры:

1) a_j 1 6 14 18 22 41 101 239 503
Δa_j 5 8 4 4 19 60 138 264
$\Delta^2 a_j$ 3 −4 0 15 41 78 126
$\Delta^3 a_j$ −7 4 15 26 37 48
$\Delta^4 a_j$ 11 11 11 11 11

Следовательно, этот ряд—4-го порядка.

2) Ряд квадратов натуральных чисел
a_j 1 4 9 16 25 36 49 64
Δa_j 3 5 7 9 11 13 15
$\Delta^2 a_j$ 2 2 2 2 2 2

есть арифметический ряд 2-го порядка.

3) Ряд четвертых степеней натуральных чисел
a_j 1 16 81 256 625 1296 2401 4096
Δa_j 15 65 175 369 671 1105 1695
$\Delta^2 a_j$ 50 110 194 302 434 590
$\Delta^3 a_j$ 60 84 108 132 156
$\Delta^4 a_j$ 24 24 24 24

есть арифметический ряд 4-го порядка.

Арифметический ряд k-го порядка однозначно определяется первыми членами самого ряда и всех рядов его разностей, т. е. величинами: a_1, Δa_1, $\Delta^2 a_1$, ..., $\Delta^k a_1$.

Сумма S_n первых n членов арифметического ряда k-го порядка:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{k+1} \Delta^k a_1.$$

Пример. Вычислить сумму

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3.$$

Составляем ряд разностей:

a_j 1 8 27 64 125 216 343 512 729
Δa_j 7 19 37 61 91 127 169 217
$\Delta^2 a_j$ 12 18 24 30 36 42 48
$\Delta^3 a_j$ 6 6 6 6 6 6

Получен арифметический ряд 3-го порядка

$$S_n = \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}7 + \binom{n}{3}12 + \binom{n}{4}6 = n + \frac{n(n-1)}{2}7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}12 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}6 = \frac{n}{4}[4 + 14(n-1) + 8(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3)] =$$

$$= \frac{n}{4}(4 + 14n - 14 + 8n^2 - 24n + 16 + n^3 - 6n^2 + 11n - 6) = \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 + n) = \frac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1) =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Например, сумма кубов первых двадцати натуральных чисел

$$S_{20} = \left(\frac{20 \cdot 21}{2}\right)^2 = 210^2 = 44\,100.$$

Некоторые конечные числовые ряды

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q+1-p)}{2}$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$;

4) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$;

5) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

7) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

8) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-3)^2 + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

9) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

10) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$;

11) $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}$;

12) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$;

13) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - (n+2)}{2^n}$.

ПРОПОРЦИИ

Если два отношения $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ равны, то, соединяя их знаком равенства, получим *пропорцию* (геометрическую)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Основное свойство пропорции: $a_1 b_2 = a_2 b_1$ — произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов. Следовательно, для определения любого члена пропорции необходимо и достаточно знать три остальных члена ее.

Из равенства $a_1 b_2 = a_2 b_1$ следует:

1) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$; 2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$;

3) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$; 4) $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1}$,

т. е. в пропорции можно менять местами: а) или средние члены, б) или крайние члены, в) или одновременно те и другие.

Из того же равенства следует:

5) $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$; 6) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$;

7) $\frac{b_1}{b_2}=\frac{a_1}{a_2}$; 8) $\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1}{b_1}$,

т. е. в пропорции можно обменивать местами предыдущие члены обоих отношений (a_1 и a_2) с последующими (b_1 и b_2) (ср. 5 с 1, 6 с 2 и т. д.).

Из пропорции $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ следует также:

9) $\frac{p\cdot a_1+q\cdot b_1}{r\cdot a_1+t\cdot b_1}=\frac{p\cdot a_2+q\cdot b_2}{r\cdot a_2+t\cdot b_2}$ и

10) $\frac{p\cdot a_1+q\cdot a_2}{r\cdot a_1+t\cdot a_2}=\frac{p\cdot b_1+q\cdot b_2}{r\cdot b_1+t\cdot b_2}$,

где p, q, r, t — произвольные множители — положительные или отрицательные, целые или дробные, действительные или комплексные. Из *производных* пропорций (9) и (10) получается, в частности:

11) $\frac{a_1\pm b_1}{a_1}=\frac{a_2\pm b_2}{a_2}$;

12) $\frac{a_1+b_1}{b_1}=\frac{a_2\pm b_2}{b_2}$;

13) $\frac{a_1\pm b_1}{a_2\pm b_2}=\frac{a_1}{a_2}$;

14) $\frac{a_1\pm b_1}{a_2\pm b_2}=\frac{b_1}{b_2}$;

15) $\frac{a_1\pm b_1}{a_1\mp b_1}=\frac{a_2\pm b_2}{a_2\mp b_2}$;

16) $\frac{a_1\pm a_2}{a_1}=\frac{b_1\pm b_2}{b_1}$;

17) $\frac{a_1\pm a_2}{a_2}=\frac{b_1\pm b_2}{b_2}$;

18) $\frac{a_1\pm a_2}{a_1\mp a_2}=\frac{b_1\pm b_2}{b_1\mp b_2}$;

19) $\frac{a_1\pm a_2}{b_1\pm b_2}=\frac{a_1}{b_1}$;

20) $\frac{a_1\pm a_2}{b_1\pm b_2}=\frac{a_2}{b_2}$.

Из пропорции $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ следует также:

$$\frac{a_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m}{b_2^m}\quad\text{и}\quad\frac{\sqrt[m]{a_1}}{\sqrt[m]{b_1}}=\frac{\sqrt[m]{a_2}}{\sqrt[m]{b_2}},$$

откуда по указанным выше правилам получаются различные производные пропорции, например:

$$\frac{a_1^m-a_2^m}{a_1^m}=\frac{b_1^m-b_2^m}{b_1^m};$$

$$\frac{a_1^m-b_1^m}{b_1^m}=\frac{a_2^m-b_2^m}{b_2^m};$$

$$\frac{\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{b_1}}{\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{b_1}}=\frac{\sqrt[m]{a_2}+\sqrt[m]{b_2}}{\sqrt[m]{a_2}-\sqrt[m]{b_2}}$$

и т. д.

Из равенства нескольких отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_\kappa}{b_\kappa}$$

следует:

$$\frac{\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_\kappa^n}}{\sqrt[n]{b_1^n+b_2^n+\ldots+b_\kappa^n}}=\frac{a_1}{b_1}=$$

$$=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_\kappa}{b_\kappa},$$

где n и κ — любые натуральные числа.

В частности, справедливы равенства

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_\kappa}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_\kappa}=\frac{a_1}{b_1}=$$

$$=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_\kappa}{b_\kappa},$$

и если известны сумма $\sum_{j=1}^{\kappa}a_j=S_\kappa$ и числа b_j, пропорциональные a_j, то из этой формулы можно определить все a_j.

Пример. Разделить 140 на части, пропорциональные 3, 5, 8, 9 и 10.

Пользуясь последней формулой, получаем:

$$\frac{a_1}{3}=\frac{140}{3+5+8+9+10}=\frac{140}{35}=\frac{4}{1};\quad a_1=3\cdot4=12;$$

$$\frac{a_2}{5}=\frac{4}{1};\quad a_2=5\cdot4=20;\quad \frac{a_3}{8}=\frac{4}{1};$$

$$a_3=4\cdot8=32$$

и т. д.

Если оба средних (или оба крайних) члена пропорции равны, т. е. $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ $\left(\text{или, что то же, } \frac{x}{a}=\frac{b}{x}\right)$, то $x=\sqrt{a\cdot b}$ — *среднее геометрическое* чисел a и b.

ПРОЦЕНТЫ

При начислении *простых процентов* по процентной таксе $p\%$ начальная сумма K обращается через t лет в

$$K_t = K\left(1+\frac{p}{100}t\right).$$

При начислении *сложных процентов* один раз в год начальная сумма K через t лет обращается при процентной таксе $p\%$ в

$$K_t = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^t, \text{ или } K_t = K\cdot q^t,$$

если обозначить

$$1+\frac{p}{100}=q.$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Комплексное число — выражение вида $\alpha+\beta i$, где α и β — вещественные (действительные) числа: i — так называемая „мнимая единица", определяемая условием $i^2=-1$.

Если n—любое целое число, то $i^{4n}=+1$; $i^{4n+1}=i$; $i^{4n+2}=-1$; $i^{4n+3}=-i$. Вещественные числа α и β называются соответственно вещественной (действительной) и мнимой частью комплексного числа $a=\alpha+\beta i$; обозначения: $\alpha=R(a)$, $\beta=I(a)$ или $\alpha=Re\,a$, $\beta=Im\,a$.

Если $\beta=0$, то $a=\alpha$ (действительные числа — частный случай комплексных чисел); если $\alpha=0$, то $a=\beta i$ (чисто мнимые числа).

Геометрически комплексное число $a=\alpha+\beta i$ изображается точкой с координатами $x=\alpha$, $y=\beta$ на так называемой комплексной плоскости (точка эта называется *аффиксом* комплексного числа); действительные числа изображаются точками оси абсцисс (действительная ось), чисто мнимые — точками оси ординат (мнимая ось). Так как каждая точка плоскости вполне определяется радиусом-вектором этой точки, то каждому комплексному числу соответствует определенный *вектор*, лежащий в комплексной плоскости и идущий из полюса в точку, соответствующую комплексному числу. Таким образом, комплексные числа могут изображаться как точками, так и векторами. Часто говорят о *точке* $a=\alpha+\beta i$ вместо того, чтобы говорить о *числе* $a=\alpha+\beta i$.

Два комплексных числа считаются *равными*, если равны отдельно их действительные и их мнимые части, т. е. $\alpha_1+\beta_1 i=\alpha_2+\beta_2 i$, если $\alpha_1=\alpha_2$ и $\beta_1=\beta_2$; отсюда следует $\alpha+\beta i=0$, если $\alpha=0$ и $\beta=0$.

Равным комплексным числам соответствуют равные векторы, их изображающие. Понятия „больше" и „меньше" для комплексных чисел не существуют.

Выражение комплексного числа $a=\alpha+\beta i$ называется *алгебраической формой* его записи.

Если вместо декартовых координат точки, изображающей комплексное число, ввести ее полярные координаты (ρ, φ), то получим тригонометрическую форму записи комплексного числа:

$$a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

ρ — длина радиуса-вектора соответствующей точки — называется *модулем* комплексного числа; угол φ (в радианах) — *аргументом* комплексного числа. Обозначения: $\rho=|a|$, $\varphi=\arg a$.

Связь между ρ, φ и α, β — та же, что и между декартовыми и полярными координатами точки:

$$\alpha=\rho\cos\varphi;\quad \beta=\rho\sin\varphi;$$

$$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2};\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha};$$

при этом $0\leqslant\rho<\infty$, $-\infty<\varphi<+\infty$; для данного комплексного числа аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$ (k — целое). *Главное значение* аргумента заключено в промежутке $-\pi<\varphi\leqslant+\pi$. Число *нуль* имеет модуль, равный нулю; $\arg 0$ — величина неопределенная.

Норма комплексного числа $N(a)=\alpha^2+\beta^2=\rho^2$.

Показательная форма записи комплексного числа: $a=\rho e^{\varphi i}$, где ρ — модуль, φ — аргумент; эта форма записи основана на применении формулы Эйлера

$$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Пример. $1+\sqrt{3}i$ (алгебраическая форма) $=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ (тригонометрическая форма) $=2e^{\frac{\pi}{3}i}$ (показательная форма).

Если не ограничиваться главным значением аргумента, то

$$1+\sqrt{3}i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]=2e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}.$$

Два комплексных числа называются *взаимно сопряженными* (обозначаются a и $\bar{a}$), если их действительные части равны, а мнимые отличаются знаком. Точки, изображающие на комплексной плоскости сопряженные числа, расположены симметрично относительно действительной оси. Модули сопряженных чисел равны, аргументы отличаются знаком:

$$a=\alpha+\beta i=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{\varphi i};$$
$$\bar{a}=\alpha-\beta i=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-\varphi i}.$$

Сложение и вычитание двух или нескольких комплексных чисел выполняется по формуле

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)-(\alpha_3+\beta_3 i)+\ldots=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ldots)+$$
$$+(\beta_1+\beta_2-\beta_3+\ldots)i.$$

Умножение двух комплексных чисел выполняется по формуле

$$(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+$$
$$+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)i.$$

Если числа даны в тригонометрической форме, то

$$[\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2+$$
$$+i\sin\varphi_2)]=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей, аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.

В частности, произведение двух сопряженных комплексных чисел дает квадрат модуля (т. е. норму) каждого из них:

$$a\bar{a}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=$$
$$=\alpha^2+\beta^2=N(a)=N(\bar{a}).$$

Деление двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению.

В тригонометрической форме

$$[\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]:[\rho_2(\cos\varphi_2+$$
$$+i\sin\varphi_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

т. е. модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, аргумент частного равен разности их аргументов.

При делении комплексных чисел в алгебраической форме „уничтожают мнимость в знаменателе“ (аналогично уничтожению иррациональности в знаменателе), для чего умножают числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, и получают в знаменателе вещественное число.

Вообще вычисления над комплексными числами $\alpha+\beta i$ можно производить так же, как и над обыкновенными двучленами, полагая $i^2=-1$.

Примеры:

1) $$\frac{1}{\alpha+\beta i}=\frac{\alpha-\beta i}{(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)}=$$
$$=\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}i.$$

2) $$\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}{\alpha_2^2+\beta_2^2}=$$
$$=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1}{\alpha_2^2+\beta_2^2}i.$$

3) $$\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i}=$$
$$=\frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i}+\frac{(10+7i)i}{5i^2}=$$
$$=\frac{-2(3-4i)(12.+5i)}{1+3i}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{-2(-43-201i)}{10}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{1}{5}(50+191i)=10+38{,}2i.$$

Возведение в n степень комплексного числа в тригонометрической форме производится по формуле

$$[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=$$
$$=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

т. е. модуль возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n. Эта формула применима при любом значении n: целом, дробном, положительном, отрицательном (при дробном n необходимо

учитывать многозначность результата — см. ниже).

В частности, при $\rho = 1$ получается *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Извлечение корня n-й степени производится по формуле

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2\ldots, n-1.$$

В этой формуле $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметическое значение корня n-й степени из положительного числа $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; φ_0 — главное значение аргумента комплексного числа; каждому из n различных значений числа k соответствует одно из значений корня n-й степени комплексного числа, который, следовательно, имеет n различных значений. Точки, изображающие на комплексной плоскости $\sqrt[n]{a}$, являются вершинами правильного n-угольника с центром в полюсе, следовательно, лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ и делят ее на n равных частей.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$;

$k = 0, 1, 2$ (три значения: 1; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$).

2) $\sqrt{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$;

$k = 0,1$ (два значения: $+\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$).

3) $\sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right)$:

$k = 0,1$ $\left[\text{два значения: } \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]$.

В частности,

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon^k,\ k = 0, 1, 2\ldots, n-1,$$

где

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

$$\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{a}\right)_1 \varepsilon^k,$$

где $\left(\sqrt[n]{a}\right)_1$ — одно из n значений корня (безразлично, какое), а ε^k принимает все значения корня n-й степени из единицы.

Всякое равенство между комплексными числами, обе части которого составлены только при помощи действий сложения, вычитания, умножения и деления, остается верным, если каждое из комплексных чисел заменить сопряженным с ним числом.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ *

ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ

Совокупность вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (или *сегментом*), а удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$ — *промежутком* (или *интервалом*). Символ отрезка: $[a, b]$; символ промежутка: (a, b). Переменная y называется *функцией* переменной x (аргумента), определенной на отрезке $[a, b]$ или в промежутке (a, b), если каждому значению x из указанного отрезка или промежутка поставлено в соответствие одно (если функция однозначная) или несколько (если функция многозначная) значений переменной y. Отрезок $[a, b]$ или промежуток (a, b) — *область определения* (или *область существования*) функции. Символ функциональной зависимости: $y = f(x)$; вместо буквы f ставят любую другую букву, например F, Φ, φ, ψ и т. д.; пишут также $y = y(x)$. Значение функции $f(x)$ при значении аргумента $x = a$ обозначают символом $f(a)$; например, если $f(x) = \cos x$, то $f(0) = \cos 0 = 1$. Если переменная u является функцией нескольких независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$, то пишут $u = f(x, y, z, \ldots, t)$. Численное значение этой функции при $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots, t = k$ обозначают символом $f(a, b, c, \ldots, k)$; например, если $f(x, y) = x^2 + y^2$, то $f(1,2) = 1^2 + 2^2 = 5$.

Функция может быть задана *формулой*, *таблицей*, *графиком*. Среди функций, заданных формулой, различают функции, заданные *явно*, когда дано выражение y через x [$y = f(x)$]; *неявно*, когда x и y связаны уравнением [$F(x, y) = 0$] (например, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$) и *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через некоторую третью величину t, называемую *параметром* [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$] (например, $x = a \cos t$; $y = a \sin t$).

Функцию можно задать *таблицей*, если указать два множества соответствующих друг другу числовых значений переменных x и y (см., например, математические таблицы в главе I). Если функция задана формулой, то, задавая аргументу x различные числовые значения (из области определения функции), можно вычислить при помощи формулы соответствующие значения функции y; совокупность всех полученных пар значений x и y опять составит таблицу.

Пользуясь той или иной системой координат (см. главу XI), можно изобразить каждую пару соответствующих друг другу числовых значений переменных x и y, взятых из таблицы, *точкой* плоскости; соединив полученные точки плавной кривой линией, получим *график функции*, заданной формулой или таблицей. Иногда функцию непосредственно задают графиком без формулы и таблицы. Нередко графики получаются автоматически при помощи самопишущих приборов.

ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Явная функция, выражаемая многочленом

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

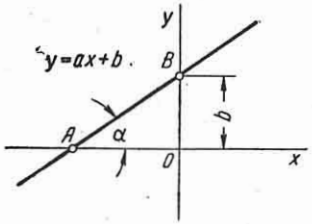
где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — какие угодно постоянные, а n — целое положительное постоянное число, называется *целой рациональной функцией* одного аргумента, а ее график — *параболой* n-го *порядка*.

Частные случаи:

1) *Линейная функция* $y = ax + b$; график ее — прямая линия AB (фиг. 1); $a = \operatorname{tg} \alpha$ — *угловой коэффициент* прямой, $b = OB$ — *начальная ордината*. При

* См. литературу на стр. 349 [5], [30], [35], [37].

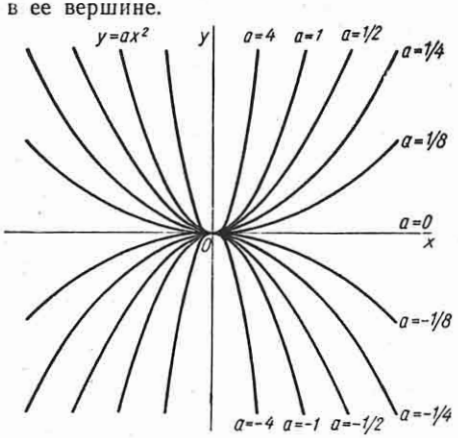
$b = 0$ линейная функция выражает *прямую пропорциональность* $y = ax$; график ее — прямая, проходящая через начало координат; коэффициент прямой пропорциональности a является угловым



Фиг. 1. График линейной функции.

коэффициентом прямой—графика прямой пропорциональности.

2) *Квадратная функция* $y = ax^2 + bx + c$; график ее — квадратная парабола. Парабола $y = ax^2$ (фиг. 2) симметрична относительно оси ординат; в начале координат лежит *вершина* параболы, а ось абсцисс касается параболы в ее вершине.



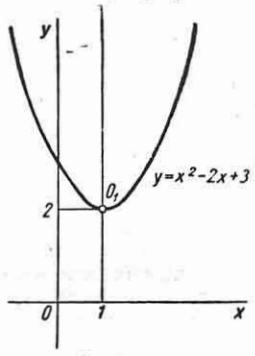
Фиг. 2. Графики функции $y = ax^2$ для различных значений параметра a.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ — та же парабола, но с вершиной в точке $O_1\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ и с осью симметрии, параллельной оси Oy (фиг. 3).

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и служит для исследования корней квадратного трехчлена (корнями функции называются те значения аргумента, при которых функция обращается в нуль). Если $b^2 - 4ac < 0$, то корни квадратного трехчлена мнимые, трехчлен при всех значениях x сохраняет тот же знак, какой имеет коэффициент a; график (парабола) нигде не пересекает оси Ox. Если $b^2 - 4ac > 0$, то трехчлен имеет два вещественных корня

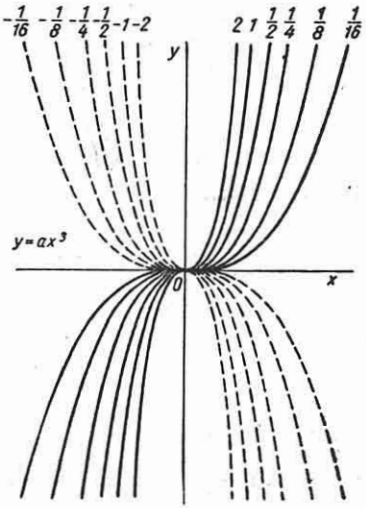
$$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

и принимает как положительные, так и отрицательные значения; график пересекает ось Ox в двух точках. Если $b^2-4ac=0$, то трехчлен обращается в нуль при одном только значении $x = -\frac{b}{2a}$, а при прочих совпадает по знаку с a; график касается оси Ox.

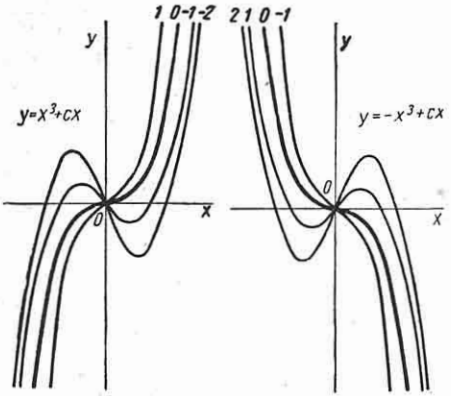


Фиг. 3. График квадратного трехчлена $y = x^2 - 2x + 3$.

3) Простейший случай многочлена третьей степени представляет функция $y = ax^3$ (фиг. 4). Путем преобразования координат по формулам $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, где $\alpha = -\frac{a_1}{3a_0}$, $\beta = a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3$, придем от функции $y =$



Фиг. 4. Графики функции $y = ax^3$ для различных значений параметра a.



Фиг. 5. Графики функции $y = x^3 + cx$ для различных значений параметра c.

Фиг. 6. Графики функции $y = -x^3 + cx$ для различных значений параметра c.

$= a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ к функции $y' = a_0x'^3 + cx'$, где $c = 3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2$ (на фиг. 5 и 6 даны кривые $y=x^3+cx$ и $y=-x^3+cx$ для различных значений c). Все параболы n-го порядка имеют *параболические бесконечные ветви* (см. стр. 261).

Пример. Функцию $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ привести к виду $y = x^3 + cx$. Полагая

$$y = y' + \beta, \quad x = x' + \alpha,$$

где $\beta = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + 1$, получим

$$y' + \alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = x'^3 + 3x'^2\alpha + 3x'\alpha^2 + \alpha^3 - 3x'^2 - 6x'\alpha - 3\alpha^2 + 2x' + 2\alpha + 1,$$

откуда

$$y' = x'^3 + 3x'^2\alpha + 3x'\alpha^2 - 3x'^2 - 6x'\alpha + 2x';$$

полагая, далее, $\alpha = 1$, получим

$$y' = x'^3 + 3x'^2 + 3x' - 3x'^2 - 6x' + 2x',$$

откуда

$$y' = x'^3 - x';$$

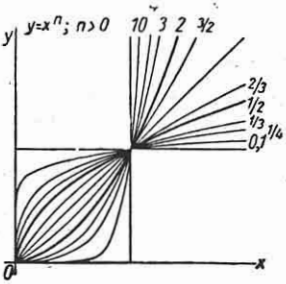
для контроля подсчитаем непосредственно:

$$c = 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 2(-3)1 + 2 = -1.$$

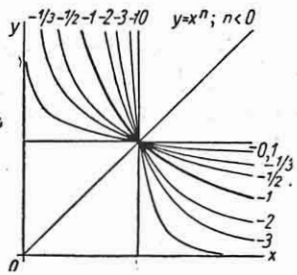
СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Так называется функция вида $y = ax^n$, где показатель n может быть как положительным, так и отрицательным, целым или дробным. При n целом положительном имеем целую рациональную функцию, при n целом отрицательном — дробную функцию, при n дробном — иррациональную функцию (если дробный показатель n не преобразуется в целое число). При $a = 1$ имеем кривые, изображенные для положительных значений x на фиг. 7 и 8, где отдельные кривые соответствуют разным значениям n. Эти кривые называются *политропами*.

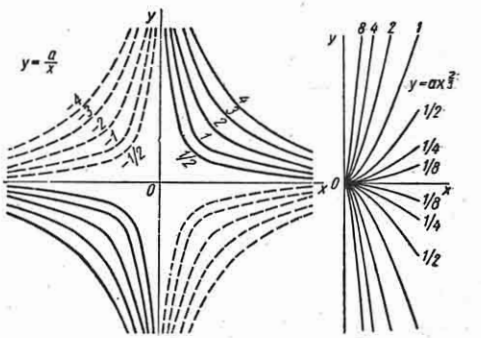
При $n > 0$ все кривые проходят через начало координат и через точку (1,1), имеют параболические бесконечные ветви. При $n < 0$ ни одна кривая не проходит через начало координат; оси координат являются *асимптотами* кривых (см. стр. 261); соответствующие ветви кривых называются *гиперболическими* по имени гиперболы, которая получается при $n = -1$. В последнем случае имеем функцию $y = \frac{a}{x}$, выражающую закон обратной пропорциональности. Графиком ее будет равносторонняя (или равнобочная) гипербола (фиг. 9, *а*).



Фиг. 7. Графики функции $y = x^n$ для различных значений $n > 0$.



Фиг. 8. Графики функции $y = x^n$ для различных значений $n < 0$.



Фиг. 9. Графики функции y для различных значений параметра a: *а*) $y = \frac{a}{x}$; *б*) $y = ax^{1/3}$.

$\frac{3}{2}$

График функции $y = ax$ называется полукубической параболой. На фиг. 9, *б* изображены полукубические параболы, соответствующие различным значениям параметра a.

РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

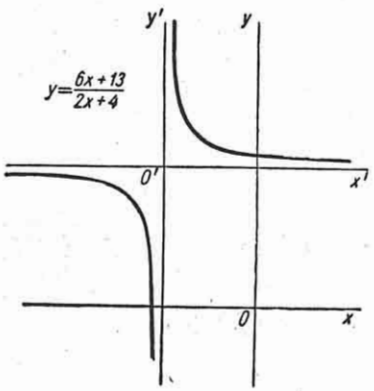
Функция вида

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

называется *дробной рациональной функцией*, или просто рациональной функцией. Простейший случай этой функции представляет *дробнолинейная* функция

$$y = \frac{mx + n}{px + q},$$

которая приводится к виду $y = \frac{a}{x}$ при помощи преобразования координат $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, где $\alpha = -\frac{q}{p}$, $\beta = \frac{m}{p}$ $(p \neq 0)$, причем $a = \frac{np - mq}{p^2}$. Графиком всякой дробнолинейной функции будет равнобочная гипербола, а



Фиг. 10. График дробнолинейной функции $y = \frac{6x + 13}{2x + 4}$.

полученное после преобразования уравнение $y = \frac{a}{x}$ будет ее уравнением относительно асимптот, проходящих через точку (α, β) и параллельных старым осям координат (фиг. 10).

Пример. Привести функцию $y = \frac{6x + 13}{2x + 4}$ к простейшему виду.

Положим $y = y' + \beta$, $x = x' + \alpha$, где $\alpha = -2$, $\beta = +3$; получим

$$y' + 3 = \frac{6(x' - 2) + 13}{2(x' - 2) + 4},$$

или

$$y' + 3 = \frac{6x' + 1}{2x'},$$

откуда

$$y' = \frac{\frac{1}{2}}{x'}.$$

Действительно, здесь

$$a = \frac{np - mq}{p^2} = \frac{26 - 24}{4} = \frac{1}{2}.$$

ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ

Все рассмотренные функции относятся к числу явных алгебраических (за исключением случая степенной функции, когда n — иррациональное).

Явная функция от x называется *алгебраической*, если над аргументом последовательно выполняются в конечном числе только основные действия (сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в целую положительную степень и извлечение корня с целым положительным показателем). Если в формулу, которой задана явная алгебраическая функция, не входят радикалы, то явная алгебраическая функция называется рациональной, в противном случае иррациональной. Например, явная алгебраическая функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ есть функция иррациональная.

Если x и y удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где F — символ целой рациональной функции от x и y, то одну из переменных называют *алгебраической неявной* функцией от другой. Считая y за функцию, уравнению можно придать вид

$$\varphi_0(x)\, y^n + \varphi_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + \varphi_{n-1}(x)\, y + \varphi_n(x) = 0,$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_n(x)$ — целые рациональные функции от x.

Всякая неалгебраическая функция (явная или неявная) называется *трансцендентной*; среди них выделяют *элементарные трансцендентные* функции,

к числу которых относятся *степенная трансцендентная* функция (x^α, где α — иррациональное число, например, $x^{\sqrt{3}}$), а также показательные, логарифмические, тригонометрические, гиперболические функции. Все алгебраические функции также относятся к числу элементарных.

Любую функцию можно взять за аргумент для другой и получить *сложную функцию* $y = F[f(x)]$, например $y = \operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}$, $y = \lg \sin x$. Такие комбинации дают всевозможные элементарные функции.

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

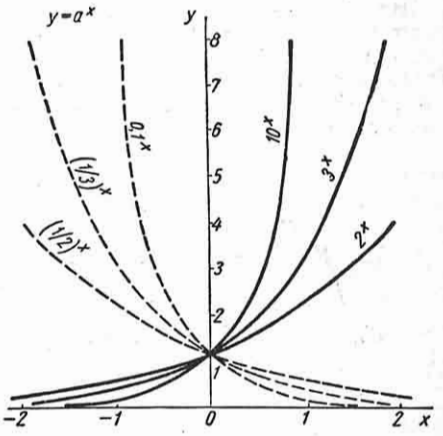
Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут *взаимно обратными*, если $f[\varphi(x)] = x$ и $\varphi[f(x)] = x$. Например, функции x^n и $x^{\frac{1}{n}}$ взаимно обратные, так как $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ и $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$. Имея явную функцию $y = f(x)$, можно получить обратную ей, если принять y за аргумент, а x считать функцией от y и решить относительно x написанное уравнение.

Для получения графика функции $\varphi(x)$, обратной данной функции $f(x)$, достаточно построить кривую, симметричную графику функции $f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Если прямая, параллельная оси Ox, пересекает график функции $y = f(x)$ больше чем в одной точке, то обратная функция будет *многозначной*: прямая, параллельная оси Oy, пересекает график функции в нескольких точках. Например, квадратной функции $y = x^2$ соответствует обратная двузначная функция $y = \pm\sqrt{x}$, графиком которой будет та же квадратная парабола, но симметричная относительно оси x.

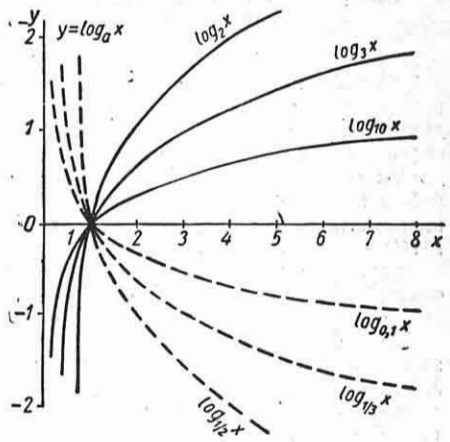
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Функция $y = a^x$, где a — постоянная, называется *показательной*. При положительном a всегда $y > 0$ (фиг. 11). Функция, обратная показательной, называется *логарифмической*: $y = \log_a x$ (фиг. 12). Наибольшее употребление имеют показательная и логарифмическая функции с натуральным основанием e (см. стр. 135).

Если $y = e^x$, то отсюда $x = \ln y$ (логарифмическая функция с натуральным основанием). Итак, функции e^x и $\ln x$ — взаимно обратны.



Фиг. 11. Графики показательной функции $y = a^x$ для различных значений параметра a.



Фиг. 12. Графики логарифмической функции $y = \log_a x$ для различных значений параметра a.

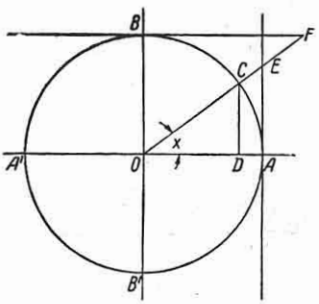
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тригонометрические, или *круговые*, функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ являются простейшими периодическими трансцендентными функциями. Функция $y = f(x)$ называется *периоди-*

ческой, если при некоторых значениях h и при любых значениях аргумента x имеет место равенство $f(x+h)=f(x)$.

Наименьшее из чисел h, обладающее указанным свойством, называется *периодом* функции.

Для вещественных значений аргумента тригонометрические функции определяются геометрически при помощи круга (тригонометрического круга) и построенных в нем отрезков (тригонометрических линий) (фиг. 13).



Фиг. 13. Геометрическое истолкование тригонометрических функций.

При радиусе круга, равном единице, аргумент x представляет собой длину дуги AC, а функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ соответственно длины отрезков CD, OD, AE, BF, OE и OF, взятые со знаком + или — в зависимости от направления этих отрезков (см. таблицу на стр. 93).

Аргумент x равен удвоенной площади сектора AOC (в круге единичного радиуса).

Длина дуги AC является (при $OA=1$) мерой в радианах центрального угла AOC.

Один радиан равен приблизительно $57°17'44'',8$.

Радианное измерение дуг и углов употребляется в анализе.

При решении геометрических задач за аргумент тригонометрических функций чаще всего принимается величина центрального угла AOC, выраженная в градусах, минутах и секундах ($1°=60'=3600''\approx 0{,}01745$ радиана; $180°=\pi$ радиан).

Перевод градусов в радианы и обратно см. в табл. VII и XIV.

Зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных углов

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha);$$

$$\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha);$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}(90°-\alpha);$$

$$\operatorname{tg}(45°+\alpha)=\operatorname{ctg}(45°-\alpha).$$

При $\alpha>90°\left(\alpha>\frac{\pi}{2}\right)$ следует пользоваться *формулами приведения*:

$$\sin\alpha=\cos(\alpha-90°)=\sin(180°-\alpha)=$$
$$=-\cos(270°-\alpha)=-\sin(360°-\alpha);$$
$$\cos\alpha=-\sin(\alpha-90°)=-\cos(180°-\alpha)=$$
$$=-\sin(270°-\alpha)=\cos(360°-\alpha);$$
$$\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{ctg}(\alpha-90°)=-\operatorname{tg}(180°-\alpha)=$$
$$=\operatorname{ctg}(270°-\alpha)=-\operatorname{tg}(360°-\alpha);$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{tg}(\alpha-90°)=-\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=$$
$$=\operatorname{tg}(270°-\alpha)=-\operatorname{ctg}(360°-\alpha).$$

Пример. $\cos 210°=-\sin(270°-210°)=-\sin 60°=-0{,}86603$.

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ — периодические с периодом 2π; функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — периодические с периодом π.

Для $\alpha>360°$ ($x>2\pi$) следует использовать свойства периодичности тригонометрических функций; при любом целом n

$$\sin\alpha=\sin(\alpha-360°n);$$
$$\cos\alpha=\cos(\alpha-360°n);$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha-180°n);$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha-180°n).$$

Пример. $\sin 1185°=\sin(1185°-3\cdot360°)=\sin 105°=\sin(180°-105°)=\sin 75°=0{,}96593$.

Функции $\cos x$ и $\sec x$ — четные функции; $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$ — нечетные, т. е.

$$\cos(-x)=\cos x;\ \sec(-x)=\sec x;$$
$$\sin(-x)=-\sin x;\ \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x;$$
$$\operatorname{cosec}(-x)=-\operatorname{cosec} x.$$

Значения тригонометрических функций для некоторых аргументов

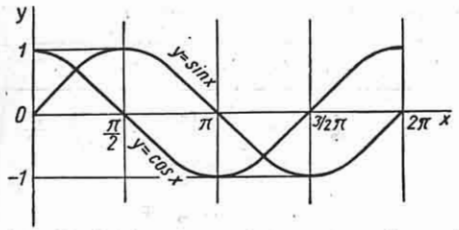
$\alpha°$	0°	15°		30°		45°		60°		75°		90°
x	0	$\frac{\pi}{12}$	0,26180	$\frac{\pi}{6}$	0,52360	$\frac{\pi}{4}$	0,78540	$\frac{\pi}{3}$	1,04720	$\frac{5\pi}{12}$	1,30900	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0,25882	$\frac{1}{2}$	0,50000	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,70711	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,86603	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	0,96593	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	0,96593	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,86603	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,70711	$\frac{1}{2}$	0,50000	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0,25882	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$2-\sqrt{3}$	0,26795	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0,57735	1	1,00000	$\sqrt{3}$	1,73205	$2+\sqrt{3}$	3,73205	∞
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$2+\sqrt{3}$	3,73205	$\sqrt{3}$	1,73205	1	1,00000	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0,57735	$2-\sqrt{3}$	0,26795	0

Изменение тригонометрических функций по знаку и величине по четвертям тригонометрического круга

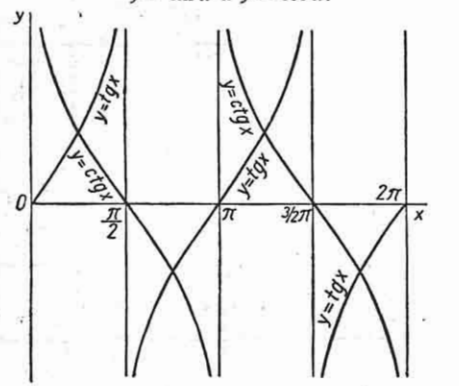
Функции	0	I четв.	90°	II четв.	180°	III четв.	270°	IV четв.	360°
$\sin\alpha$	0	+ возрастает	+1	+ убывает	0	− убывает	−1	− возрастает	0
$\cos\alpha$	+1	+ убывает	0	− убывает	−1	− возрастает	0	+ возрастает	+1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	+ возрастает	$\pm\infty$	− возрастает	0	+ возрастает	$\pm\infty$	− возрастает	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\infty$	+ убывает	0	− убывает	$\mp\infty$	+ убывает	0	− убывает	$\mp\infty$
$\sec\alpha$	+1	+ возрастает	$\pm\infty$	− возрастает	−1	− убывает	$\mp\infty$	+ убывает	+1
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\mp\infty$	+ убывает	+1	+ возрастает	$\pm\infty$	− возрастает	−1	− убывает	$\mp\infty$

При всех действительных значениях аргумента функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны, их значения заключены в отрезке $[-1, +1]$; функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ имеют разрывы непрерывности второго рода (см. стр. 137).

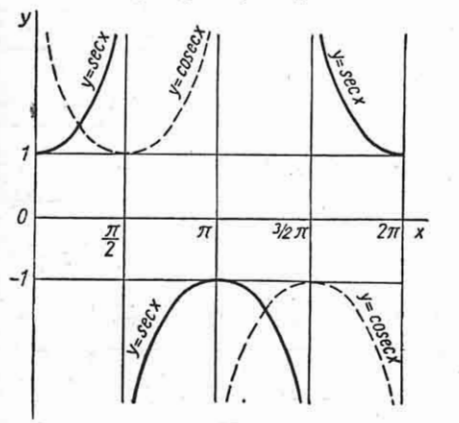
Графики тригонометрических функций даны на фиг. 14—16. Графики $\sin x$ и $\cos x$ отличаются друг от друга лишь расположением относительно оси ординат, так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.



Фиг. 14. Графики тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.



Фиг. 15. Графики тригонометрических функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.



Фиг. 16. Графики тригонометрических функций $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$.

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \sec x = \frac{1}{\cos x};$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}; \; 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Функции $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ употребляются редко.

В формулах

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}};$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$$

знаки перед радикалами следует брать в соответствии со знаком тригонометрической функции при данном значении аргумента (см. данную выше схему).

Пример. $\sin 120° = \dfrac{\operatorname{tg} 120°}{-\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 120°}}$, так как $\sin 120°$ положителен, а $\operatorname{tg} 120°$ — отрицателен.

ФОРМУЛЫ ПЛОСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ (ГОНИОМЕТРИЯ)

Указанные ниже формулы преобразований тригонометрических функций справедливы как для действительных, так и для комплексных значений аргументов.

Функции суммы и разности:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma}.$$

Пример. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\delta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\delta \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \delta)$, если δ малая величина (см. стр. 70).

Функции кратного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Чтобы найти $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$ при любом целом положительном n, пользуются формулой

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n.$$

Применив к правой части биномиальную формулу (см. стр. 74) и сравнивая *вещественные части между собой*, а *мнимые между собой*, получим общие формулы для $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$.

Пример. $\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = \cos^4\alpha + 4i\cos^3\alpha\sin\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha - 4i\cos\alpha\sin^3\alpha + \sin^4\alpha,$

откуда

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha;$$

$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha = 4\cos\alpha\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Функции половины аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Все тригонометрические функции данного аргумента выражаются рационально через тангенс половины аргумента:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Степени $\sin x$ и $\cos x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x;$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x;$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x;$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x;$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x;$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x;$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x;$$

$$\sin^6 x = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x;$$

$$\cos^6 x = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x;$$

$$\sin^2 x\cos x = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\cos 3x;$$

$$\cos^2 x\sin x = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Пример.

$$\cos^2 x\sin^2 x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Легко выразить через синусы и косинусы кратных дуг любые степени, а также произведения степеней синуса и косинуса, если воспользоваться формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

откуда

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x;$$
$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Пример.

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{8i^3}(e^{3xi} - 3e^{2xi} \cdot e^{-xi} +$$
$$+ 3e^{xi} \cdot e^{-2xi} - e^{-3xi}) =$$
$$= -\frac{1}{8i}(e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} - e^{-3xi}) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} - 3 \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3 \sin x) =$$
$$= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$

Преобразование сумм в произведения и произведений в суммы

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha =$$
$$= \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta);$$
$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha =$$
$$= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta);$$

$$\sin \alpha \sin \beta =$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta =$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta =$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Пример.

$$1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = (1 + \cos \alpha) +$$
$$+ (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos \alpha) =$$
$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}(1 + \operatorname{tg} \alpha) =$$
$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}(\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times$$
$$\times \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

Для преобразования суммы в произведение иногда приходится применять *метод введения вспомогательного угла.*

Пусть A и B — какие угодно выражения (не только тригонометрические). Тогда $A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$; полагая $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi$ (что возможно, так как тангенсом может быть всякое число), получим

$$A + B = A(1 + \operatorname{tg} \varphi) = A \frac{\sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi};$$

для вычисления правой части равенства найдем сначала при помощи таблиц вспомогательный угол φ, пользуясь соотношением $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$.

Тем же способом получим

$$A - B = A \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi};$$

$$\frac{A + B}{A - B} = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi).$$

Выражение $A + B$ преобразуется проще, если известно, что A и B —

одного знака. Тогда полагаем $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi$ и получаем

$$A+B=A(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=$$

$$=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Если A и B положительны и $A>B$, то, полагая $\frac{B}{A}=\sin^2\varphi$, получим

$$A-B=A(1-\sin^2\varphi)=A\cos^2\varphi.$$

Если $A<B$ (при $A>0$, $B>0$), то берем сначала $A-B=-(B-A)$, после чего $B-A$ преобразуем, как раньше.

Примеры:

1) $$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=a\left(\sin\alpha\pm\frac{b}{a}\cos\alpha\right)=$$

$$=a(\sin\alpha\pm\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha)=$$

$$=\frac{a(\sin\alpha\cos\varphi\pm\cos\alpha\sin\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{a\sin(\alpha\pm\varphi)}{\cos\varphi}$$

при $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$;

2) $$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}=$$

$$=\sqrt{(a+b)^2-2ab(1+\cos\alpha)}=$$

$$=\sqrt{(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=(a+b)\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=(a+b)\sqrt{1-\sin^2\varphi}=(a+b)\cos\varphi,$$

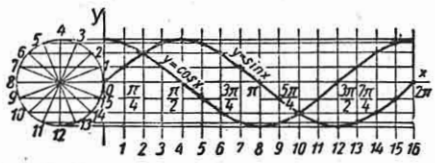
причем

$$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ГРАФИКИ

Из определения тригонометрических функций при помощи тригонометрического круга единичного радиуса вытекает способ построения графиков.

Для построения графика функции $y=\sin x$ (синусоида) необходимо построить слева от оси Oy круг единичного радиуса с центром на оси Ox (фиг. 17); разделить окружность на произвольное число равных частей, например, на 16; полученные на окружности точки перенумеровать в последовательном порядке, начиная с нуля, идя по окружности в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки), причем отметку 0 поставить на оси Ox; через точки деления на окружности провести прямые, параллельные оси Ox (горизонтали), которые окажутся перенумерованными (нулевая горизонталь совпадает с осью Ox); отложить на оси Ox длину окружности и также разделить ее на такое же число равных частей (в данном случае на 16); точки деления перенумеровать, причем нулевая точка совпадет с началом координат; через все точки деления оси Ox провести вертикали, которые также окажутся перенумерованными; точки пересечения горизонталей и вертикалей с одинаковыми номерами будут лежать на синусоиде; плавная линия, соединяющая эти точки, образует график функции $y=\sin x$.



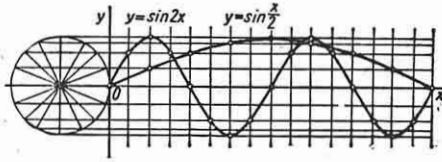
Фиг. 17. Построение графиков функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

График тригонометрической функции $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ можно получить, передвинув только что построенный график на отрезок $\frac{\pi}{2}$ влево по оси Ox или перенеся начало координат на такой же отрезок вправо.

Для построения графиков функций

$$y=\sin\omega x,\quad y=\cos\omega x$$

можно применить прежний метод, нумеруя, однако, точки на окружности (и горизонтали) не подряд, а через каждые ω делений.

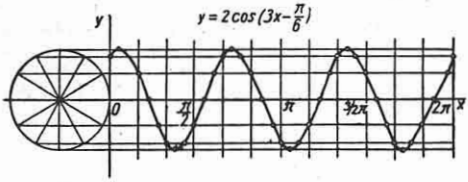


Фиг. 18. Построение графиков функций $y=\sin 2x$ и $y=\sin\frac{x}{2}$.

На фиг. 18 построены графики функций $y=\sin 2x$, $y=\sin\frac{x}{2}$.

Так же можно построить и кривые $y = A \sin \omega x$, $y = A \cos \omega x$, нужно только вспомогательную окружность описать радиусом A вместо единицы.

Кривая $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ заключает, как частный случай, все рассмотренные кривые и может быть построена тем же методом, если только вспомогательную окружность построить радиусом A, точки деления на окружности нумеровать через каждые ω делений и отметку 0 на окружности поставить в конце дуги α.



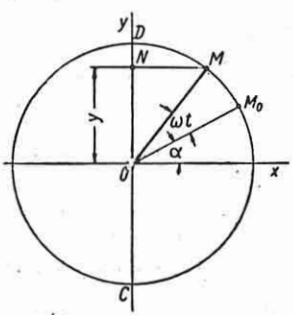
Фиг. 19. Построение графика функции $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.

На фиг. 19 дан график функции

$$y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Синусоидальные величины встречаются при изучении колебательных движений, явлений переменного тока и т. п.

Пусть точка M движется по окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω, причем при $t = 0$ точка M находилась в точке M_0 (конец дуги α) (фиг. 20). Проекция точки M на ось Oy



Фиг. 20. Механизм простого гармонического колебания.

(точка N) совершает колебательное движение по отрезку CD оси Oy; это движение называется простым *гармоническим колебанием* и совершается по закону $y = A \sin(\omega t + \alpha)$, где t означает время. В этой формуле A называется *амплитудой* колебания, ω — *частотой* (ω есть угловая скорость вращения радиуса).

Период T функции y соответствует времени полного оборота радиуса вокруг центра и определяется из соотношения $\omega T = 2\pi$, так что $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и $\omega = \frac{2\pi}{T}$; выражение $\frac{2\pi}{\omega}$ дает также *длину волны* синусоиды. Очень часто вместо частоты ω вводят число периодов или число оборотов в единицу времени; это число n определяется по формуле

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

откуда $\omega = 2\pi n$.

Переменный угол $\omega t + \alpha$ называется *фазой* синусоидальной величины, α — *начальной фазой*; изменив начало отсчета времени, всегда можно начальную фазу привести к нулю; так как $\omega t + \alpha = \omega\left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right)$, то для этого достаточно отсчитывать время от момента $t = -\frac{\alpha}{\omega}$.

Если даны две синусоидальные величины одинаковой частоты ω

$$y_1 = A_1 \sin \omega t, \quad y_2 = A_2 \cos \omega t,$$

но с разностью фаз $\frac{\pi}{2}$, то их сумма также представляет синусоидальную величину той же частоты:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}.$$

Сумма синусоидальных величин $y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$, $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$ есть синусоидальная величина

$$y = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где

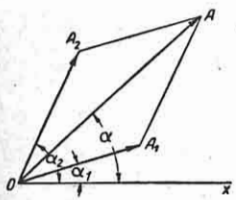
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

а угол α определяется равенствами

$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A},$$

$$\sin \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A}.$$

Для фактического определения величин A и α удобнее использовать геометрическое представление синусоидальных величин одинаковой частоты. Из точки O плоскости (фиг. 21) строим два вектора: один — длиной A_1 (наклоненный к оси Ox под углом α_1), другой — длиной A_2 (наклоненный к оси Ox под углом α_2); тогда длина вектора, полученного сложением двух названных векторов, даст амплитуду A искомой синусоидальной величины, а угол наклона этого вектора-суммы к оси Ox даст начальную фазу величины y.



Фиг. 21. Геометрическое сложение простых гармонических колебаний одинаковой частоты.

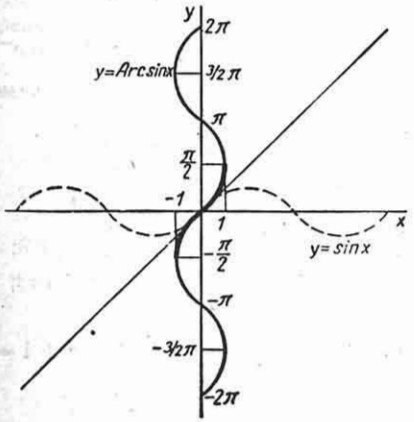
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Обратные тригонометрические (или *обратные круговые*) функции — арксинус, арккосинус, арктангенс и т. д. — определяются следующим образом:

$$y = \operatorname{Arcsin} x, \text{ если } x = \sin y;$$
$$y = \operatorname{Arccos} x, \text{ если } x = \cos y;$$
$$y = \operatorname{Arctg} x, \text{ если } x = \operatorname{tg} y$$

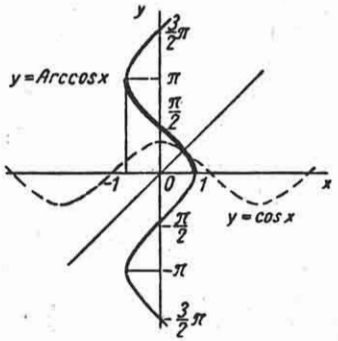
и т. д.

Таким образом, арксинус от x есть дуга, синус которой равен x („аркус" означает „дуга").



Фиг. 22. График функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ и сопоставление его с графиком функции $y = \sin x$.

Функции $\operatorname{Arcsin} x$ и $\operatorname{Arccos} x$ имеют вещественные значения, если $-1 \leqslant x \leqslant +1$; функции $\operatorname{Arctg} x$ и $\operatorname{Arcctg} x$ имеют вещественные значения при любом вещественном значении x. Обратные тригонометрические функции суть функции многозначные (фиг. 22—24).

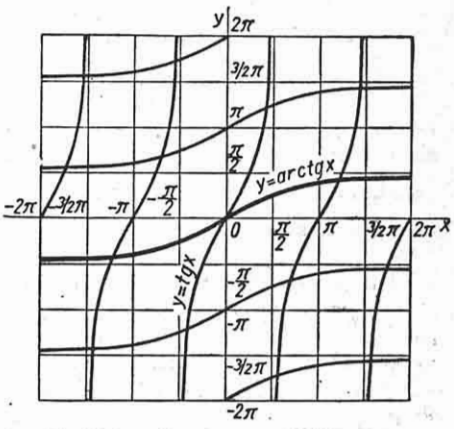


Фиг. 23. График функции $y = \operatorname{Arccos} x$ и сопоставление его с графиком функции $y = \cos x$.

Главными значениями функций $\operatorname{Arcsin} x$ и $\operatorname{Arctg} x$ называются такие их значения, которые берутся на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$; они обозначаются $\operatorname{arcsin} x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Главными значениями функций $\operatorname{Arccos} x$ и $\operatorname{Arcctg} x$ называются такие их значения, которые берутся на отрезке $[0, \pi]$; они обозначаются $\operatorname{arccos} x$ и $\operatorname{arcctg} x$.

Связь между любыми значениями обратных тригонометрических функций



Фиг. 24. График функции $y = \operatorname{Arctg} x$ и сопоставление его с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$.

и их главными значениями выражается формулами

$$\operatorname{Arcsin} x = \pi n + (-1)^n \arcsin x;$$
$$\operatorname{Arccos} x = 2\pi n \pm \arccos x;$$
$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n.$$
$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n.$$

Для вычисления главных значений обратных тригонометрических функций полезны формулы

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

При вычислениях с обратными тригонометрическими функциями нужно учитывать их многозначность. Так, например, нужно иметь в виду, что формулы

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2};$$
$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$
$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

справедливы только для $x > 0$.

Точно так же формулы

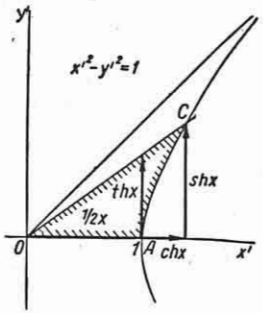
$$\arcsin u + \arcsin v = \arcsin\left(u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}\right);$$
$$\arccos u + \arccos v = \arccos\left(uv - \sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}\right);$$
$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u+v}{1-uv}$$

всегда справедливы, если u и v положительны, а сумма членов, стоящих слева, не больше $\frac{\pi}{2}$; в других случаях они верны не всегда.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

К элементарным трансцендентным функциям относятся также гиперболические функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ (последняя функция употребляется редко).

Для вещественных значений аргумента они могут быть определены геометрически как длины некоторых отрезков (фиг. 25), связанных с равнобочной гиперболой $x'^2 - y'^2 = 1$, причем аргументом функции является удвоенная площадь гиперболического сектора OAC. Для любых значений аргумента (вещественных и комплексных) гиперболические функции определяются формулами



Фиг. 25. Геометрическое истолкование гиперболических функций.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$
$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1};$$
$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x; \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

Гиперболические функции связаны следующими соотношениями:

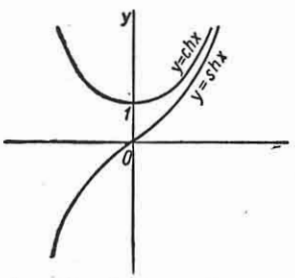
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$
$$\operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$
$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta;$$
$$\operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta \pm \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta;$$
$$\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha;$$
$$\operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha = 2\operatorname{sh}^2\alpha + 1 = 2\operatorname{ch}^2\alpha - 1;$$
$$\operatorname{th}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{th}\alpha \pm \operatorname{th}\beta}{1 \pm \operatorname{th}\alpha \operatorname{th}\beta};$$

$$\operatorname{cth}(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \pm \operatorname{cth}\alpha \operatorname{cth}\beta}{\operatorname{cth}\alpha \pm \operatorname{cth}\beta};$$

$$\operatorname{sh}\alpha \pm \operatorname{sh}\beta = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha \pm \beta}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{ch}\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha - \beta}{2};$$



Фиг. 26. Графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$.

$$\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha;\ \operatorname{ch}(-\alpha) = \operatorname{ch}\alpha;$$

$$\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{th}\alpha;$$

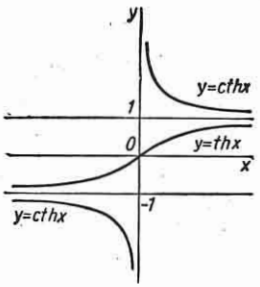
$$\operatorname{cth}(-\alpha) = -\operatorname{cth}\alpha.$$

Графики гиперболических функций даны на фиг. 26 и 27. Для всех вещественных значений x

$$\operatorname{ch} x \geqslant 1;\ -1 < \operatorname{th} x < +1;$$

$\operatorname{cth} x < -1$ при $x < 0$ и $\operatorname{cth} x > +1$ при $x > 0$; $\operatorname{sh} x$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Обратные гиперболические функции Arsh u, Arch u, Arth u (*ареа-синус, ареа-косинус, ареа-тангенс гиперболический*) определяются соответственно решениями уравнений $u = \operatorname{sh} x$; $u = \operatorname{ch} x$; $u = \operatorname{th} x$. В области вещественных значений функция Arsh u однозначна и



Фиг. 27. Графики функций $y = \operatorname{th} x$ и $y = \operatorname{cth} x$.

может быть выражена через логарифмическую функцию посредством формулы

$$\operatorname{Arsh} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right).$$

Функция Arch u имеет в той же области два значения:

$$\operatorname{Arch} u = \pm \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right) =$$

$$= \mp \ln\left(u - \sqrt{u^2 - 1}\right)\ (u \geqslant 1).$$

Функция Arth u имеет действительные значения только при $|u| < 1$; она может быть представлена в виде

$$\operatorname{Arth} u = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + u}{1 - u}.$$

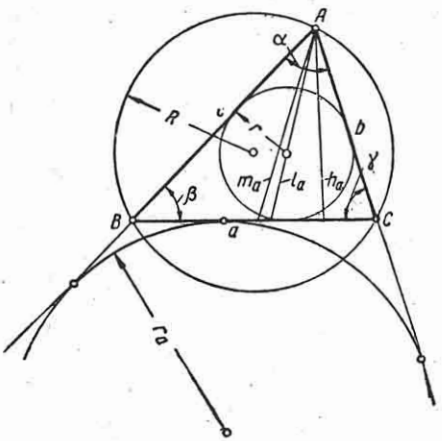
ГЛАВА IV

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ФИГУР *

ЧИСЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

Треугольники (фиг. 1)

Обозначения: a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие углы; h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные соответственно на стороны a, b, c; m_a, m_b, m_c — медианы, делящие пополам соответственно стороны a, b, c; l_a, l_b, l_c — биссектрисы углов α, β, γ; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной



Фиг. 1. Треугольник и его элементы.

окружности; r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a и продолжений сторон b и c; аналогично r_b и r_c; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; $q = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$ — полусумма медиан; S — площадь; d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей; d_a, d_b, d_c — расстояния между центрами описанной и вневписанных окружностей. Если треугольник прямоугольный, то a и b — катеты, c — гипотенуза, γ — прямой угол.

Зависимости между элементами треугольника:

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;

2) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

(теорема синусов);

3) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

(теорема косинусов);

4) $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

(теорема тангенсов);

5) $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};$$

6) $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};$$

7) $$a + b = 4R\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

8) $$a - b = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

9) $$p = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

10) $$p - a = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

11) $$p - b = 4R\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

12) $$p - c = 4R\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2};$$

* См. литературу на стр. 349 [5], [6], [7].

13) $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{bc}{2h_a}$;

14) $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{abc}{4Rp} = \frac{S}{p} = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

15) $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = \frac{pr}{p-a} = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

аналогичные формулы — для r_b и r_c;

16) $r_a r_b r_c = p^2 r$;

17) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$;

18) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$,

аналогичные формулы — для h_b и h_c;

19) $\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$;

аналогичные формулы — для r_b и r_c;

20) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$;

21) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера);

22) $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$;

аналогичные формулы — для d_b и d_c;

23) $h_a = 2R\sin\beta\sin\gamma = b\sin\gamma = c\sin\beta = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2pr}{a} = \frac{2(p-a)r_a}{a} = \frac{2(p-b)r_b}{a} = \frac{2(p-c)r_c}{a}$;

аналогичные формулы — для h_b и h_c;

24) $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left|(b+c)^2 - a^2\right|} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\beta+\sin\gamma)\sin\frac{\alpha}{2}}$;

аналогичные формулы — для l_b и l_c;

25) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$;

аналогичные формулы — для m_b и m_c;

26) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$;

27) $m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$;

28) $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

аналогичные формулы — для $\cos\beta$ и $\cos\gamma$;

29) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$,

аналогичные формулы — для $\sin\frac{\beta}{2}$ и $\sin\frac{\gamma}{2}$;

30) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$,

аналогичные формулы — для $\cos\frac{\beta}{2}$ и $\cos\frac{\gamma}{2}$;

31) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$;

аналогичные формулы для $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Для прямоугольного треугольника $\alpha + \beta = 90°$: $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора); $a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{ctg}\beta$; аналогичные формулы для b:

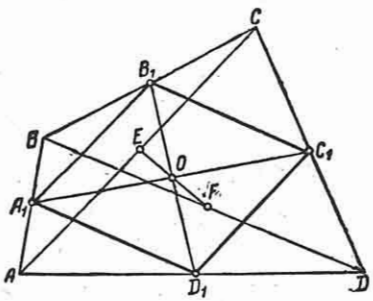
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}};\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}.$$

Четырехугольники

1) Во всяком четырехугольнике середины сторон служат вершинами параллелограмма; отрезки, соединяющие середины двух пар противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходят через одну точку и делятся в этой точке пополам (фиг. 2); при этом $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.

2) Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

3) В выпуклом четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птоломея).



Фиг. 2. Свойства четырехугольника.

Правильные многоугольники

Обозначения: n — число сторон; a — длина стороны; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; α — центральный угол; β — внутренний угол многоугольника; S — площадь многоугольника; a_n и b_n — длины сторон правильных n-угольников, из которых один вписан в круг радиуса R, а другой описан около него.

Зависимости между элементами правильного многоугольника:

1) $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$;

2) $\beta = 180^\circ - \alpha$ [сумма внутренних углов во всяком многоугольнике равна $180^\circ (n-2)$];

3) $a = 2R \sin\frac{180^\circ}{n} = 2r \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} = 2\sqrt{R^2 - r^2}$;

4) $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{r}{\cos\frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$;

5) $r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = R\cos\frac{180^\circ}{n} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$;

6) $b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$;

7) $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$.

Окружность

Обозначения: r — радиус; d — диаметр; L — длина окружности; S — площадь круга.

Числовые зависимости:

$$r = \frac{L}{2\pi} = \frac{L}{6{,}28318} = 0{,}56419\sqrt{S};$$

$$d = \frac{L}{\pi} = \frac{L}{3{,}14159} = 1{,}12838\sqrt{S}.$$

Пример. Разделить на 33 части окружность круга, диаметр которого 24 *см*. Для этого надо откладывать по окружности циркулем отрезок, равный $24 \cdot 0{,}0951 \approx 2{,}28$ *см* (см. таблицу на стр. 105).

Проекции

Обозначения: a — длина проектируемого отрезка; a_1 — длина его проекции на ось; α — угол между проектируемым отрезком и осью; S — площадь проектируемой плоской фигуры; S_1 — площадь ее проекции на другую плоскость; φ — угол между плоскостями.

Формулы: $a_1 = a\cos\alpha$; $S_1 = S\cos\varphi$.

Телесный угол представляет собой часть пространства, заключенную внутри одной полости конической или пирамидальной поверхности с замкнутой направляющей. За меру α телесного угла принимают отношение площади S, вырезаемой телесным углом на поверхности шара произвольного радиуса с центром в вершине телесного угла, к квадрату радиуса этого шара: $\alpha = \frac{S}{R^2}$. Телесный угол, образованный тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, равен $\frac{\pi}{2}$. Единица меры телесного угла (стереорадиан) есть телесный угол, для которого $S = R^2$.

Таблица значений элементов правильных многоугольников

n	a		R		r		S		
3	1,732 R	3,464 r	0,577 a	2,000 r	0,289 a	0,500 R	0,433 a^2	1,299 R^2	5,196 r^2
4	1,414 R	2,000 r	0,707 a	1,414 r	0,500 a	0,707 R	1,000 a^2	2,000 R^2	4,000 r^2
5	1,176 R	1,453 r	0,850 a	1,236 r	0,688 a	0,809 R	1,721 a^2	2,378 R^2	3,633 r^2
6	1,000 R	1,155 r	1,000 a	1,155 r	0,866 a	0,866 R	2,598 a^2	2,598 R^2	3,464 r^2
7	0,868 R	0,963 r	1,152 a	1,110 r	1,038 a	0,901 R	3,635 a^2	2,736 R^2	3,371 r^2
8	0,765 R	0,828 r	1,307 a	1,082 r	1,207 a	0,924 R	4,828 a^2	2,828 R^2	3,314 r^2
9	0,684 R	0,728 r	1,462 a	1,064 r	1,374 a	0,940 R	6,182 a^2	2,893 R^2	3,276 r^2
10	0,618 R	0,650 r	1,618 a	1,052 r	1,539 a	0,951 R	7,694 a^2	2,939 R^2	3,249 r^2
11	0,563 R	0,587 r	1,776 a	1,042 r	1,703 a	0,960 R	9,364 a^2	2,974 R^2	3,230 r^2
12	0,518 R	0,536 r	1,932 a	1,035 r	1,866 a	0,966 R	11,196 a^2	3,000 R^2	3,215 r^2
16	0,390 R	0,398 r	2,563 a	1,020 r	2,514 a	0,981 R	20,109 a^2	3,062 R^2	3,183 r^2
20	0,313 R	0,317 r	3,196 a	1,013 r	3,157 a	0,988 R	31,569 a^2	3,090 R^2	3,168 r^2
24	0,261 R	0,263 r	3,831 a	1,009 r	3,798 a	0,991 R	45,575 a^2	3,106 R^2	3,160 r^2
32	0,196 R	0,197 r	5,102 a	1,005 r	5,077 a	0,995 R	81,225 a^2	3,121 R^2	3,152 r^2
48	0,131 R	0,131 r	7,645 a	1,002 r	7,629 a	0,998 R	183,08 a^2	3,133 R^2	3,146 r^2
64	0,098 R	0,098 r	10,190 a	1,001 r	10,178 a	0,999 R	325,69 a^2	3,137 R^2	3,144 r^2

Деление окружности на n частей (хорда = диаметру $\times \sin \frac{180^\circ}{n}$)

n	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	n	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	n	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	n	$\sin \frac{180^\circ}{n}$	n	$\sin \frac{180^\circ}{n}$
1	0,0000	21	0,1490	41	0,0766	61	0,0515	81	0,0388
2	1,0000	22	0,1423	42	0,0747	62	0,0507	82	0,0383
3	0,8660	23	0,1362	43	0,0730	63	0,0498	83	0,0378
4	0,7071	24	0,1305	44	0,0713	64	0,0491	84	0,0374
5	0,5878	25	0,1253	45	0,0698	65	0,0483	85	0,0369
6	0,5000	26	0,1205	46	0,0682	66	0,0476	86	0,0365
7	0,4339	27	0,1161	47	0,0668	67	0,0469	87	0,0361
8	0,3827	28	0,1120	48	0,0654	68	0,0462	88	0,0357
9	0,3420	29	0,1081	49	0,0641	69	0,0455	89	0,0353
10	0,3090	30	0,1045	50	0,0628	70	0,0449	90	0,0349
11	0,2817	31	0,1012	51	0,0616	71	0,0442	91	0,0345
12	0,2588	32	0,0980	52	0,0604	72	0,0436	92	0,0341
13	0,2393	33	0,0951	53	0,0592	73	0,0430	93	0,0338
14	0,2225	34	0,0923	54	0,0581	74	0,0424	94	0,0334
15	0,2079	35	0,0896	55	0,0571	75	0,0419	95	0,0331
16	0,1951	36	0,0872	56	0,0561	76	0,0413	96	0,0327
17	0,1838	37	0,0848	57	0,0551	77	0,0408	97	0,0324
18	0,1736	38	0,0826	58	0,0541	78	0,0403	98	0,0320
19	0,1646	39	0,0805	59	0,0532	79	0,0398	99	0,0317
20	0,1564	40	0,0785	60	0,0523	80	0,0393	100	0,0314

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИМЕТРОВ И ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Обозначения: S — площадь; L — периметр (см. также стр. 102).

Треугольник:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} ab \sin \gamma =$$

$$= \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma =$$

$$= \frac{abc}{4R} = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} =$$

$$= p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = pr =$$

$$= (p-a) r_a = (p-b) r_b = (p-c) r_c =$$

$$= \sqrt{r r_a r_b r_c} =$$

$$= \sqrt{p (p-a) (p-b) (p-c)} =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{q (q-m_a) (q-m_b) (q-m_c)}.$$

Если угол γ прямой, то

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha.$$

Если треугольник задан координатами его вершин (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то

$$S = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) +$$

$$+ (x_3 y_1 - x_1 y_3)] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^*,$$

причем площадь получится положительной при положительном обходе вершин треугольника, т. е. если при движении по периметру от 1-й вершины ко 2-й и от 2-й к 3-й треугольник будет находиться с левой стороны.

Четырехугольник:

$$S = \frac{1}{2} uv \sin \varphi = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) v,$$

где u и v — длины диагоналей; φ — угол между ними; h_1 и h_2 — длины перпендикуляров, опущенных из противоположных вершин на одну и ту же диагональ длины v.

Трапеция:

$$S = \frac{1}{2} h (a + b) = mh,$$

где a и b — длины параллельных сторон; h — высота; $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.

Параллелограмм:

$$S = ab \sin \alpha = ah,$$

где α — угол между двумя непараллельными сторонами a и b; h — высота, опущенная на сторону a.

Ромб (и *дельтоид* — четырехугольник, симметричный относительно одной из своих диагоналей):

$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба (или дельтоида).

Многоугольник:

$$S = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) +$$

$$+ \ldots + (x_n y_1 - x_1 y_n)],$$

где (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) — координаты вершин многоугольника. Порядок следования этих вершин соответствует положительному обходу периметра многоугольника.

Правильный многоугольник:

$$S = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} =$$

$$= \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

где a — сторона; n — число сторон; R и r — радиусы описанного и вписанного кругов.

Круг:

$$L = 2\pi R = \pi D; \quad S = \pi R^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{4} LD = 0{,}78539816\, D^2,$$

где D — диаметр, R — радиус круга.

Круговое кольцо:

$$S = \pi (R^2 - r^2) =$$

$$= \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta,$$

где R, D и r, d — соответственно внеш-

* Здесь — определитель 3-го порядка; см. стр. 116.

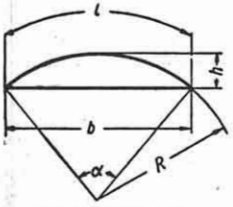
ние и внутренние радиусы и диаметры кольца; $\rho = \frac{R+r}{2}$ — средний радиус кольца; $\delta = R - r$ — ширина кольца.

Круговой сектор:

$$S = \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} \alpha R^2 = \frac{\alpha^\circ \pi R^2}{360^\circ} =$$

$$= 0{,}0087266 \cdot R^2 \cdot \alpha^\circ,$$

где l — длина дуги сектора; α° и α — центральный угол соответственно в градусном и в радианном измерении.



Фиг. 3. Круговой сегмент.

Круговой сегмент (фиг. 3)

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\alpha^\circ \pi}{180^\circ} - \sin\alpha \right) = \frac{R(l-b) + bh}{2}.$$

Кольцевой сектор:

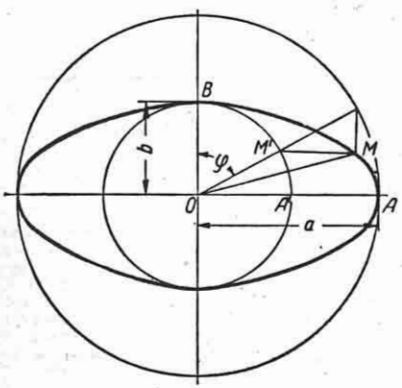
$$S = \frac{\alpha^\circ \pi}{360^\circ} (R^2 - r^2) = \frac{\alpha^\circ \pi}{180^\circ} \rho\delta = \alpha\rho\delta,$$

где α — центральный угол; ρ и δ — средний радиус и ширина кольца.

Эллипс. Длина дуги между точками B и M (фиг. 4)

$$l = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha = aE(\varphi, \varepsilon),$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет; a и b — полуоси эллипса; φ — угол между полуосью эллипса OB и радиусом-вектором OM'; $\varphi = \arcsin \frac{x}{a}$, где x — абсцисса точки M; $E(\varphi, \varepsilon) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\alpha}\, d\alpha$ — *эллиптический интеграл второго рода* (см. табл. XVII, стр. 59).



Фиг. 4. Построение эллипса.

Полная длина эллипса

$$L = 4aE\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots\right] =$$

$$= af\left(\frac{b}{a}\right),$$ причем функция $f\left(\frac{b}{a}\right)$ дается таблицей:

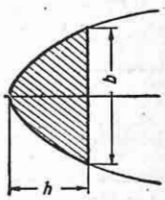
$\frac{b}{a}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	4,0640	4,2020	4,3860	4,6026	4,8442
$\frac{b}{a}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f\left(\frac{b}{a}\right)$	5,1054	5,3824	5,6723	5,9723	6,2832

Площадь эллипса: $S = \pi ab$.

Площадь эллиптического сектора OAM: $S = \frac{a}{b} S'$, где S' — площадь соответствующего кругового сектора $OA'M'$ ($M'M \parallel OA$).

Параболический сегмент (фиг. 5): $S = \frac{2}{3} bh$; если $\frac{h}{b}$ мало, то длина дуги

$$l \approx b \left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{b}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{b}\right)^4\right].$$



Фиг. 5. Параболический сегмент.

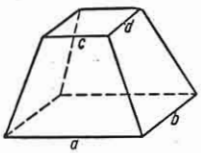
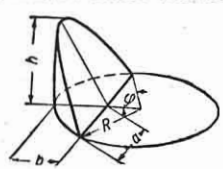
Площади фигур произвольного вида и длины дуг находятся интегрированием — аналитически или при помощи математических инструментов (см. стр. 189 и 342).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМОВ ТЕЛ

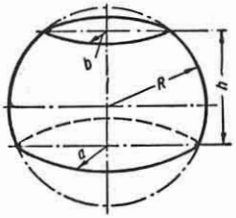
Геометрическое тело и обозначения	Боковая поверхность $S_б$ Полная поверхность $S_п$	Объем V
Призма: B — площадь основания; B' — площадь перпендикулярного сечения; h — высота; l — боковое ребро; P' — периметр перпендикулярного сечения	$S_б = P' \cdot l$	$V = Bh = B'l$
Куб: a — ребро; d — диагональ	$S_п = 6a^2$; $d = a\sqrt{3}$	$V = a^3$
Прямоугольный параллелепипед: a, b, c — ребра; d — диагональ	$S_п = 2(ab+bc+ca)$; $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$	$V = abc$
Призма, усеченная плоскостью, не параллельной основанию: B' — площадь перпендикулярного сечения; l — расстояние между центрами тяжести верхнего и нижнего оснований	—	$V = B' \cdot l$ В случае треугольной призмы $V = \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot B'$, где a, b, c — длины боковых ребер
Пирамида: B — площадь основания; P — периметр основания; h — высота; a — апофема (высота боковой грани в правильной пирамиде)	Если пирамида правильная, то $S_б = \frac{1}{2} Pa$	$V = \frac{1}{3} Bh$
Усеченная пирамида: B и b — площади оснований; h — высота; P и p — периметры оснований; a — апофема	Если усеченная пирамида правильная, то $S_б = \frac{1}{2}(P+p)\, a$	$V = \frac{1}{3} h (B+b+\sqrt{Bb})$
Призматоид *: B, B_1, B_2 — площади оснований и среднего сечения	—	$V = \frac{h}{6}(B+B_1+4B_2)$

* Призматоид — тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями (основания) и несколькими пересекающимися плоскостями (боковые грани); в основаниях могут лежать многоугольники с произвольным числом сторон, боковыми гранями могут быть треугольники или трапеции. Призматоид, в основаниях которого — многоугольники с одинаковым числом сторон, а боковые грани — трапеции, называется обелиском. Обелиск, в основаниях которого — подобные многоугольники, есть усеченная пирамида. Если в основаниях обелиска — прямоугольники, то обелиск называется понтоном. Клином называется тело, верхнее основание которого — прямая линия, нижнее — плоскость, ей параллельная, а боковые грани — треугольники, трапеции или параллелограммы; клин также является частным случаем призматоида.

Продолжение

Геометрическое тело и обозначения	Боковая поверхность $S_б$ Полная поверхность $S_п$	Объем V
Понтон:  	—	$V=\frac{h}{6}\,[ab+cd+(a+c)\,(b+d)]$
Прямой цилиндр: B и P — площадь и периметр основания; h — высота	$S_б=Ph$	$V=Bh$
Прямой круговой цилиндр: R и D — радиус и диаметр основания; h — высота	$S_б=2\pi Rh=\pi Dh$; $S_п=2\pi R\,(R+h)=\frac{1}{2}\,\pi D\,(D+2h)$	$V=\pi R^2h=\frac{\pi D^2h}{4}$
Прямой круговой цилиндр, усеченный непараллельно основанию: h_1 и h_2 — длины наибольшей и наименьшей образующей; h — длина оси	$S_б=\pi R\,(h_1+h_2)=\frac{1}{2}\,\pi D\,(h_1+h_2)$	$V=\pi R^2\,\frac{h_1+h_2}{2}=\pi R^2h=\frac{\pi D^2h}{4}$
Полый круглый цилиндр (труба): R и r, D и d — внешний и внутренний радиусы и диаметры; δ — толщина стенки; h — высота цилиндра	$S_б=2\pi h\,(R+r)$; $S_п=2\pi\,(R+r)\,(R-r+h)$	$V=\pi h\,(R^2-r^2)=\pi h\delta\,(R+r)=$ $=\frac{\pi h}{4}\,(D^2-d^2)=\frac{\pi h\delta}{2}\,(D+d)$
Цилиндрическое копыто:  	$S_б=\frac{2hR}{b}\,[a-(R-b)\,\varphi]$; если основание копыта полуокружность ($a=b=R$), то $S_б=2Rh$	$V=\frac{h}{3b}\,[a\,(3R^2-a^2)-3R^2\,(R-b)\,\varphi]$; если основание копыта полуокружность ($a=b=R$), то $V=\frac{2}{3}\,R^2h$
Круглый конус: R, D, h, l — радиус и диаметр основания, высота и образующая конуса	$S_б=\pi R\sqrt{R^2+h^2}=\pi Rl=\frac{1}{2}\,\pi Dl$	$V=\frac{1}{3}\,\pi R^2h=\frac{1}{12}\,\pi D^2h=0{,}2618D^2h$

Продолжение

Геометрическое тело и обозначения	Боковая поверхность $S_б$ Полная поверхность $S_п$	Объем V
Усеченный конус: R, r, D, d — радиусы и диаметры нижнего и верхнего оснований; h, l — высота и образующая усеченного конуса	$S_б = \pi (R + r)\, l = \frac{\pi}{2} (D + d)\, l$; $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$	$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr) =$ $= \frac{1}{12} \pi h (D^2 + d^2 + Dd)$
Тетраэдр (четырехгранник), одна из вершин которого находится в начале координат, а координаты остальных (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)	—	$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \\ x_3 y_3 z_3 \end{vmatrix}$ *
Шар: R и D — радиус и диаметр шара	$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 = \frac{3V}{R} = \frac{6V}{D}$	$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = 4{,}1888 R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3 =$ $= 0{,}5236\, D^3$; $R = 0{,}62035 \sqrt[3]{V}$
Шаровой сегмент: R — радиус шара; h — высота сегмента; $a = \sqrt{h\,(2R - h)}$ — радиус основания сегмента	$S_б = 2\pi Rh = \pi (a^2 + h^2)$; $R = \frac{a^2 + h^2}{2h}$	$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + h^2)$
Шаровой слой:  	$S_б = 2\pi Rh$; $R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h}\right)^2$; $(a > b)$	$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi a^2 h +$ $+ \frac{1}{2} \pi b^2 h = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3a^2 + 3b^2)$. Если $a = R$, то $V = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{3}\right)$
Шаровой сектор: R — радиус шара; h — высота соответствующего сегмента; $a = \sqrt{h\,(2R - h)}$ — радиус основания сегмента (т. е. радиус кругового ребра сектора)	$S_п = \pi R\,(2h + a)$	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h = 2{,}0944 R^2 h =$ $= \frac{\pi D^2 h}{6} = 0{,}5236 D^2 h$.

* Здесь — определитель 3-го порядка; см. стр. 116.

Продолжение

Геометрическое тело и обозначения	Боковая поверхность $S_б$ Полная поверхность $S_п$	Объем V
Сферический клин (часть шара, заключенная между двумя большими кругами): φ — угол между плоскостями больших кругов	$S_б = 2R^2\varphi = \frac{\pi R^2\varphi^\circ}{90^\circ} =$ $= 0{,}034907\ R^2\varphi^\circ$	$V = \frac{2}{3}R^3\varphi = \frac{\pi R^3\varphi^\circ}{270^\circ} =$ $= 0{,}011636\ R^3\varphi^\circ$
Эллипсоид: a, b, c — полуоси	Если $b = c$ (эллипсоид вращения), то $S_п = 2\pi ab \times$ $\times\left[\frac{b}{a} + \frac{a \cdot \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$, или, приближенно: $S_п = 2\sqrt{2\pi}\ b\sqrt{a^2+b^2}$	$V = \frac{4}{3}\pi abc$
Параболоид вращения: R — радиус основания; h — высота	$S_б = \frac{2\pi}{3p}\left\lvert\sqrt{(R^2+p^2)^3} - p^3\right\rvert$, где $p = \frac{R^2}{2h}$	$V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = 1{,}570796\ R^2h$
Усеченный параболоид вращения: R и r — радиусы оснований; h — высота	—	$V = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)\,h$
Усеченный эллиптический конус: Основания — эллипсы, главные полуоси которых a, b и a_1, b_1; высота усеченного конуса h	—	$V = \frac{\pi h}{6}\left[(2a + a_1)\,b + (2a_1 + a)\,b_1\right]$
Бочка: d — диаметр дна; D — диаметр среднего сечения (втулочный); h — длина (высота) бочки	—	Для бочки параболической формы $V = 0{,}05236\ h\ (8D^2 + 4Dd + 3d^2)$. Для бочки сферической формы $V = 0{,}2618\ h\ (2D^2 + d^2)$
Тор (кольцо кругового сечения): r — радиус кругового сечения; R — расстояние центра сечения от центра кольца	$S_п = 4\pi^2 Rr = 39{,}478Rr$	$V = 2\pi^2 \cdot Rr^2 = 19{,}739\ Rr^2$

Поверхности и объемы тел вращения; правила Гюльдена

а) Поверхность, образованная вращением линии длиной l вокруг оси, имеет площадь $S = 2\pi x_0 l$, где x_0 — расстояние центра тяжести линии до оси вращения (образующая расположена в одной плоскости с осью и ее не пересекает).

б) Объем тела, образованного вращением плоской фигуры площадью S относительно оси, лежащей в плоскости фигуры и ее не пересекающей, равен $V = 2\pi x_0 S$, где x_0 — расстояние между осью вращения и центром тяжести фигуры.

Если известно уравнение образующей кривой, то площадь поверхности и объем тела вращения находят интегрированием (см. стр. 190).

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$$

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma = -4\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1$$

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решение прямоугольных треугольников (обозначения см. на стр. 102)

Задано	Найти	Решение
a, α	β	$\beta = 90° - \alpha$
	b	$b = a\operatorname{ctg}\alpha$
	c	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
	S	$S = \dfrac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$
b, α	β	$\beta = 90° - \alpha$
	a	$a = b\operatorname{tg}\alpha$
	c	$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
	S	$S = \dfrac{b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$
c, α	β	$\beta = 90° - \alpha$
	a	$a = c\sin\alpha$
	b	$b = c\cos\alpha$
	S	$S = \dfrac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{c^2}{4}\sin 2\alpha$
a, b	α	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\beta = 90° - \alpha$
	β	$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$; $\alpha = 90° - \beta$
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
	S	$S = \dfrac{ab}{2}$
a, c	α	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\beta = 90° - \alpha$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{c-b}{c+b}}$
	β	$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$; $\alpha = 90° - \beta$; $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}$
	b	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} = c\cos\alpha = c\sin\beta$
	S	$S = \dfrac{a}{2}\sqrt{(c+a)(c-a)} = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta$

Решение косоугольных треугольников

(обозначения см. на стр. 102)

Задано	Найти	Решение
a, b, γ	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$
	α	$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$
	β	$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$
	S	$S = \frac{ab\sin\gamma}{2}$
		При пользовании логарифмами удобнее формулы $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Найдя $\alpha-\beta$ и $\alpha+\beta$, получим α и β; затем $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$
a, β, γ, или a, α, β, или a, α, γ	$\alpha\ (\gamma, \beta)$	$\alpha = 180^\circ - (\beta+\gamma)$; $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$; $\beta = 180^\circ - (\alpha+\gamma)$
	b	$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$
	c	$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$
	S	$S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)}$
a, b, c	α	$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p-a}$
	β	$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \frac{1}{p-b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p-b}$
	γ	$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{1}{p-c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p-c}$
	S	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp$
a, b, α $(a \geqslant b)$	β	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$ (β — острый угол, $\beta \leqslant \alpha$)
	γ	$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$
	c	$c = a\cos\beta + b\cos\alpha = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\cos\alpha + \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha}$
	S	$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$
a, b, α $(a < b)$	β γ	Решение возможно лишь при условии, что $a \geqslant b\sin\alpha$. 1) Если $a = b\sin\alpha$, то $\beta = 90^\circ$ — решение единственное. 2) Если $a > b\sin\alpha$, то получаются два решения соответственно двум значениям угла β:
	c	$\beta_1 = \arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}$ (острый угол);
	S	$\beta_2 = 90^\circ - \arcsin\frac{b\sin\alpha}{a}$ (тупой угол); γ, c и S — как в предыдущем случае

РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Сферический треугольник образуется на сфере дугами трех больших кругов. Если радиус сферы равен единице, то длины сторон сферического треугольника (a, b, c) являются мерами углов между радиусами сферы, проведенными к соответствующим вершинам сферического треугольника. Углы при вершинах сферического треугольника (α, β, γ) являются мерами двугранных углов между плоскостями больших кругов, дуги которых образуют треугольник.

Сферический треугольник определяется любыми тремя из шести основных элементов a, b, c, α, β, γ, так как углы при вершинах треугольника не связаны друг с другом какими-либо соотношениями. Остальные три элемента определяются из следующих трех *основных соотношений*:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

(теорема синусов);

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

(теорема косинусов).

Углы α, β, γ противолежат сторонам a, b, c и не превосходят π.

Площадь сферического треугольника:

$$S = \varepsilon R^2,$$

где R — радиус сферы; $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ — *сферический избыток*, определяемый по формулам

$$\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \cos \gamma}{\sin \gamma};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Если угол γ прямой, то основные формулы принимают вид:

$$\sin a = \sin c \sin \alpha; \quad \sin b = \sin c \sin \beta;$$

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Из основных соотношений вытекают формулы

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a;$$

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos \gamma + \sin c \cos \alpha;$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \cos \gamma \cos b;$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \sin \gamma \cos a - \sin \alpha \cos \beta \cos c;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos \beta;$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}},$$

где $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$;

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-a)}},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Все формулы допускают циклическую замену букв a, b, c, α, β, γ соответственно буквами b, c, a, β, γ, α и c, a, b, γ, α, β.

Все шесть элементов сферического треугольника связаны соотношениями

$$\sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a+b}{2} = \sin \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \cos \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a-b}{2} = \sin \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \cos \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Отсюда следует:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}.$$

При решении прямоугольных сферических треугольников употребляются также формулы

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta; \quad \cos \beta = \cos b \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha;$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

ГЛАВА V

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ *

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Группы из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, называют перестановками.

Отмечая элементы индексами 1, 2, 3, . . . , n, рассмотрим перестановки индексов.

Перестановка 1 2 3 . . . n называется главной. Если больший индекс стоит впереди меньшего, то первый индекс образует со вторым инверсию, или беспорядок. Инверсии подсчитывают так: считают, сколько цифр стоит левее 1, и записывают; затем вычеркивают 1 и считают, сколько цифр стоит левее 2 (не считая зачеркнутой единицы), и т. д.

Пример. Число инверсий в перестановке 5 3 1 2 4 6 будет шесть.

Перестановка четная, если число ее инверсий четное, и нечетная, если число инверсий нечетное.

Пример. Перестановка 2 3 1 четная (две инверсии).

Главная перестановка всегда четная (нуль инверсий).

Квадра́тной *матрицей* из n^2 элементов называется таблица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Определителем n-го порядка из n элементов матрицы называется алгебраическая сумма n! членов, каждый из которых есть произведение n элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы, причем знак каждого члена будет + или — в зависимости от того, будет ли в этом члене четной или нечетной перестановка вторых индексов, когда элементы в каждом члене расположены в порядке возрастания первых индексов.

Знак каждого члена определяется множителем $(-1)^t$, где t — число инверсий во вторых индексах члена. Определитель n-го порядка имеет одинаковое число $\frac{n!}{2}$ положительных и отрицательных членов. Обозначение определителя n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \ (i, j = 1, 2, \dots, n);$$

n^2 элементов определителя n-го порядка образуют n горизонтальных рядов (строки) и n вертикальных (столбцы). Первый индекс в обозначении элемента есть номер строки, второй — номер столбца.

Минором M_{ij} определителя $|a_{ij}|$, соответствующим элементу a_{ij}, называется определитель, образованный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением (*адъюнктой*) A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со знаком плюс или минус, соответственно формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

* См. литературу на стр. 349—351 [2], [4], [35], [117].

Свойства определителей

1) Величина определителя не изменяется при замене строк столбцами.

2) Определитель меняет знак при перестановке двух столбцов (или строк).

3) Определитель равен нулю, если два его столбца (или две его строки) состоят из соответственно равных или пропорциональных элементов или если все элементы какого-нибудь столбца (или строки) — нули.

4) Множитель, общий всем элементам какой-либо строки (или столбца), можно выносить за знак определителя.

5) Определители можно складывать по формуле

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a'_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a''_{11} \dots a_{12} a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a''_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

где $a_{11} = a'_{11} \pm a''_{11}$, $a_{21} = a'_{21} \pm a''_{21}$, ..., $a_{n1} = a'_{n1} \pm a''_{n1}$

6) Определители можно перемножать по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{vmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

7) Величина определителя не изменится, если ко всем элементам какого-нибудь столбца (или строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число.

8) Определитель можно разложить по элементам любой (i-й) строки и любого (j-го) столбца по формулам

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in};$$

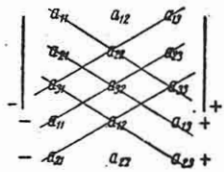
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов.

Вычисление определителей: 2-го порядка по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

3-го порядка — по правилу Саррюса (снизу приписываются первые две строки):



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Определители n-го порядка сводят к определителям 3-го или 2-го порядка, применяя свойство 8 необходимое число раз; предварительно определитель преобразуют, пользуясь остальными свойствами, преимущественно свойством 7, чтобы обратить в нуль возможно большее число элементов.

Пример.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Будем „делать нули" в последней строке, оставляя без изменения первый элемент: из элементов 2-го столбца вычтем соответственные элементы 1-го столбца, умноженные на 2; из элементов 4-го столбца вычтем элементы 1-го, умноженные на 5; получим

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & -1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(свойство 7)

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -9 \\ -2 & 1 & -3 \\ -7 & -1 & -15 \end{vmatrix} = (-1)(-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 108$$

(свойство 8) (свойство 4)

Применяя этот прием, можно свести вычисление определителя любого по-

рядка к вычислению одного определителя 3-го порядка, постепенно понижая порядок определителя.

Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\}$$

решается по формулам Крамера: $x_i = \frac{D_i}{D}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, где D — главный определитель — составляется из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix};$$

все D_i — дополнительные определители — получаются из главного заменой i-го столбца свободными членами уравнений

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1a_{12}\ldots a_{1n} \\ b_2a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_na_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}b_2\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и т. д.

При $D \neq 0$ система имеет единственное решение; при $D = 0$ и $D_i \neq 0$ система несовместна (т. е. не имеет решений); при $D = 0$ и $D_i = 0$ система неопределенна (имеет бесчисленное множество решений).

Пример. Решим систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 &= -2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0; \end{aligned}\right\}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -284;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -426;$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 142$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = 3; \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = -1.$$

Система m линейных уравнений с n неизвестными (m может быть равно или не равно n):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\}$$

Пусть A — матрица из коэффициентов системы, а B — расширенная матрица (получается из A присоединением столбца свободных членов):

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{Vmatrix};$$

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}b_m \end{Vmatrix}.$$

Определитель t-го порядка из элементов, принадлежащих одновременно каким-нибудь t строкам и t столбцам матрицы, называется *определителем матрицы*; каждый элемент матрицы называется *определителем 1-го порядка.*

Матрица имеет *ранг* r, если среди определителей r-го порядка матрицы есть хотя бы один, отличный от нуля, а все определители более высокого порядка равны нулю.

Пример. Для матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

ранг $r = 2$, так как все определители 3-го порядка матрицы — нули, но среди определителей 2-го порядка есть не равные нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Система m линейных уравнений с n неизвестными совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы B. Если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными; отбросив зависимые уравнения, решаем систему по формулам Крамера и получим единственное решение. Если $r < n$, то число независимых уравнений (r) будет меньше числа неизвестных; перенеся $n - r$ лишних неизвестных (свободные неизвестные) в правые части, решим систему относительно остальных r неизвестных; задавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесчисленное множество решений.

Примеры: 1. Система

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

совместна, так как матрицы A и B имеют одинаковый ранг $r = 3$, и допускает единственное решение. Отбрасывая четвертое уравнение, из первых трех получим $x_1 = \frac{10}{7}$; $x_2 = -\frac{1}{7}$; $x_3 = -\frac{2}{7}$.

2. Система

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

совместна, так как матрицы A и B имеют одинаковый ранг $r = 2$, но здесь $r < n$, поэтому система имеет бесчисленное множество решений; первые два уравнения независимы (определитель из коэффициентов при x_2 и x_3 в этих уравнениях не равен нулю); отбрасываем третье уравнение и переносим свободные неизвестные x_1 и x_4 в правую часть: получаем $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$; $x_3 = x_4 + \frac{1}{2}$,

Однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

всегда совместна ($x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ есть одно из решений системы — нулевое решение). Для того чтобы система n однородных линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы был равен нулю.

Для системы двух однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \end{aligned}\right\}$$

если ранг матрицы системы равен двум, получаем

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

или

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, y = k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

k — произвольный множитель пропорциональности, а все три определителя 2-го порядка получаются из матрицы $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$ последовательным вычеркиванием столбцов (для среднего неизвестного столбцы полученного таким образом определителя 2-го порядка меняются местами).

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Алгебраическое уравнение n-й степени

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

имеет n корней, вещественных или комплексных, различных или равных; корень уравнения $P(x) = 0$ называется *корнем многочлена* $P(x)$. Если α — корень $P(x)$, то $P(x)$ делится на $(x - \alpha)$ без остатка; в общем случае остаток от деления $P(x)$ на $(x - \alpha)$ равен $P(\alpha)$. Если $P(x)$ *делится* на $(x - \alpha)^k$, но не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$, то α называется k-кратным корнем уравнения $P(x) = 0$; в этом случае α является общим корнем многочлена $P(x)$ и его производных до $(k - 1)$-го порядка включительно, т. е. $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \ldots = P^{k-1}(\alpha) = 0$, но $P^k(\alpha) \neq 0$. Если $P(x)$ имеет корни α, β, γ, ... соответственно

кратностей k, l, m, ..., то $P(x) = a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x-\gamma)^m\ldots$ Комплексные корни уравнения с вещественными коэффициентами могут быть только попарно сопряженными, т. е. если такое уравнение имеет корень $\alpha = a + bi$, то оно имеет также корень $\beta = a - bi$ и притом той же кратности. Произведение $(x-\alpha)(x-\beta)$ в этом случае дает

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + px + q,$$

где $p = -(\alpha+\beta) = -2a$, $q = \alpha\beta = a^2 + b^2$, откуда $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. Поэтому многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение вещественных множителей первой и второй степени

$$P(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \times \times (x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \times \times (x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots,$$

где все числа α_l, p_l, q_l будут вещественными и $\left(\frac{p_l}{2}\right)^2 - q_l < 0$.

Уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень. Число вещественных корней, заключенных между любыми числами a и b, может быть точно определено при помощи *теоремы Штурма* (см. стр. 123).

Коэффициенты алгебраического уравнения и его корни связаны соотношениями

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = +\frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-3}x_{n-1}x_n + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Алгебраические уравнения 2-й, 3-й и 4-й степени можно решать по готовым формулам.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+(a-c)^2-(a+c)^2}}{2a}.$$

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Квадратное уравнение $ax^2 + 2\beta x + c = 0$ $(2\beta = b)$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}.$$

Если коэффициенты вещественны и $b^2 < 4ac$ (или соответственно $p^2 < 4q$, $\beta^2 < ac$), то корни — сопряженные комплексные числа.

Для квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p;$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

Кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ приводится к виду $y^3 + py + q = 0$, если положить $x = y - \frac{b}{3a}$, причем $p = \left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2$;

$$q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{d}{a}\right).$$

Если дискриминант уравнения $y^3 + py + q = 0$ положителен, т. е. $\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$, то это уравнение имеет один вещественный и два комплексных корня:

$$y_1 = u + v;$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v);$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v),$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86603\right).$$

где u и v — действительные значения кубических корней:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}.$$

Если $\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, то все три корня действительны и определяются формулами:

$$y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos\varphi;$$

$$y_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos(\varphi + 120^\circ);$$

$$y_3 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{|p|}\cos(\varphi - 120^\circ),$$

где

$$\varphi = \frac{1}{3}\arccos\frac{-3\sqrt{3}q}{2|p|^{3/2}}.$$

Примеры. 1. Решим уравнение $x^3 - 6x + 6 = 0$.

Здесь $p = -6$; $q = 6$; $\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 1$:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{-3+1} = -\sqrt[3]{2};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{-3-1} = -\sqrt[3]{4};$$

$$y_1 = u + v = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \approx -2{,}847;$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u+v) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \approx 1{,}424 + 0{,}283i;$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u+v) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \approx 1{,}424 - 0{,}283i.$$

2. Решим уравнение $x^3 + 12x^2 + 24x - 64 = 0$. Полагаем

$$x = y - \frac{b}{3a} = y - 4;$$

получим

$$y^3 - 24y - 32 = 0.$$

Здесь

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -256;$$

$$\cos 3\varphi = -\frac{3\sqrt{3}q}{2|p|^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 32}{2\cdot 24^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$3\varphi = 45^\circ;\quad \varphi = 15^\circ;$$

$$y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{24}\cos 15^\circ = 4\sqrt{2}\cos 15^\circ \approx 5{,}46;$$

$$y_2 = 4\sqrt{2}\cos 135^\circ = -4;$$

$$y_3 = 4\sqrt{2}\cos(-105^\circ) = 4\sqrt{2}\cos 105^\circ =$$

$$= -4\sqrt{2}\cos 75^\circ \approx -1{,}46.$$

Найдя один корень уравнения, можно свести решение уравнения 3-й степени к решению квадратного уравнения. Например, в данном случае мы нашли, что $y_2 = -4$. Делим $y^3 - 24y - 32$ на $y + 4$ и приходим к уравнению $y^2 - 4y - 8 = 0$; решая его, получим $y = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2\sqrt{3}$, что и даст остальные два корня.

Возвратное уравнение 3-й степени $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ имеет корень $x = -1$; два других корня являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + (b - a)x + a = 0$, которое получим, деля левую часть кубического уравнения на $x + 1$.

Уравнение $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ имеет корень $x = +1$ и два корня, являющиеся корнями уравнения $ax^2 + (b + a)x + a = 0$.

Уравнение 4-й степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ подстановкой $x = y - \frac{b}{4a}$ приводится к виду $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Корни этого уравнения имеют вид

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3});$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3});$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3});$$

$$y_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),$$

где z_1, z_2, z_3 — корни уравнения 3-й степени (*резольвенты*)

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Квадратные корни $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ выбираются с такими знаками, чтобы удовлетворялось равенство

$$\sqrt{z_1}\cdot\sqrt{z_2}\cdot\sqrt{z_3} = -q.$$

Пример. Решим уравнение $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$; здесь $p = -3$; $q = 6$; $r = -2$. Кубическая резольвента будет

$$z^3 - 6z^2 + 17z - 36 = 0.$$

Заметим, что целые корни уравнения с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом единицей являются делителями свободного члена;

подвергая испытанию делители свободного члена, находим, что уравнение имеет корень $z_1 = 4$. Деля левую часть уравнения на $z - 4$, придем к квадратному уравнению $z^2 - 2z + 9 = 0$, корни которого будут вторым и третьим корнями резольвенты: $z_2 = 1 + i\sqrt{8}$, $z_3 = 1 - i\sqrt{8}$. Таким образом, $\sqrt{z_1} = \pm 2$; $\sqrt{z_2} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{-8}}$; $\sqrt{z_3} = \pm\sqrt{1 - \sqrt{-8}}$. Если применим формулу

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

то получим

$$\sqrt{z_2} = \pm(\sqrt{2} + i); \quad \sqrt{z_3} = \pm(\sqrt{2} - i).$$

Так как должно быть выполнено условие $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -q = -6$, то можем положить $\sqrt{z_1} = -2$; $\sqrt{z_2} = \sqrt{2} + i$; $\sqrt{z_3} = \sqrt{2} - i$.

Окончательно имеем

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) = -1 + \sqrt{2};$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) = -1 - \sqrt{2};$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}) = 1 + i;$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}) = 1 - i.$$

Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ имеет корни

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})};$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}.$$

Если $b^2 - 4ac < 0$, то все корни являются комплексными числами с одним и тем же модулем.

Возвратное уравнение 4-й степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ подстановкой $x + \frac{1}{x} = y$ приводится к квадратному уравнению

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Уравнение степени выше 4-й в общем случае нельзя решить алгебраически (т. е. в радикалах), т. е. нельзя выразить его корни через коэффициенты с помощью конечного числа рациональных действий и извлечения корней. Уравнения с численными коэффициентами решаются либо графически, либо при помощи различных приближенных методов (см. стр. 125).

Решение системы двух алгебраических уравнений соответственно m-й и n-й степени с двумя неизвестными сводится к составлению уравнения $(m \cdot n)$-й степени с одним неизвестным путем исключения из системы другого неизвестного; после отыскания корней составленного уравнения они подставляются в одно из уравнений заданной системы для определения другого неизвестного.

Два уравнения с двумя неизвестными (алгебраические или трансцендентные) $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$ будут независимы, если их якобиан (см. стр. 185)

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль тождественно.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если $f(x)$ — трансцендентная функция, то уравнение $f(x) = 0$ называется трансцендентным. Оно может иметь бесконечное множество корней, из которых часть (или все) могут быть комплексными. Некоторые трансцендентные уравнения не имеют решений (например, уравнение $e^x = 0$). Большинство трансцендентных уравнений решается только приближенно и лишь некоторые сводятся к алгебраическим.

Показательными называются уравнения, в которых неизвестное входит в состав показателя степени. Пусть x или $P(x)$ (многочлен) находится только в показателях степени некоторых оснований a, b, c ...; такое уравнение сводится к алгебраическому в следующих случаях:

1) если над степенями $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$ ..., не производится сложения и вычитания; в этом случае уравнение следует прологарифмировать при любом основании;

2) если a, b, c, ... — целые или дробные степени числа k ($a = k^\alpha$, $b = k^\beta$, $c = k^\gamma$, ...); в этом случае, полагая $y = k^x$, решают алгебраическое уравнение относительно y и определяют x из таблиц: $x = \frac{\lg y}{\lg k}$; в некоторых случаях показательные уравнения решаются без таблиц.

Примеры:

1) $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $x \log 3 = (x-2)\cdot \log 4 + x \log 2$;

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}.$$

2) $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\frac{2^x}{2} = \frac{2^{3x}}{64} - \frac{2^{2x}}{16}$;

полагая $2^x = y$, получим $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$; откуда $y_1 = 2^{x_1} = 8$; $y_2 = 2^{x_2} = -4$; $y_3 = 2^{x_3} = 0$, $x_1 = 3$; других действительных решений не существует.

3) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; $2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 6^2$; $6^{\frac{x}{2}} = 6^2$; $\frac{x}{2} = 2$; $x = 4$.

4) $7^{2-3x} \cdot 5^{3x-2} = 1$; $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-2} \cdot 5^{3x-2} = 1$;

$\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^0$; $3x - 2 = 0$; $x = \frac{2}{3}$.

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма. Пусть x или $P(x)$ (многочлен) находятся только под знаком логарифма; такое уравнение сводится к алгебраическому в следующих случаях:

1) если уравнение содержит логарифм от одного и того же выражения; в этом случае, принимая логарифм за новое неизвестное, решают полученное алгебраическое уравнение и потенцируют его решение;

2) если уравнение будет вида $m \log_a P_1(x) + n \log_a P_2(x) + \ldots = 0$, где $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... — многочлены; в этом случае уравнение приводится к алгебраическому потенцированием.

Примеры:

1) $x^{\lg x} = 100x$; $(\lg x)^2 = 2 + \lg x$ обозначим $\lg x = y$, получим $y^2 = 2 + y$, откуда $y_1 = \lg x_1 = 2$; $y_2 = \lg x_2 = -1$; $x_1 = 100$; $x_2 = 0{,}1$.

2) $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$; $\lg[(3x-11)\times(x-27)] = \lg 1000$; $(3x-11)(x-27) = 1000$; $x_1 = 37$; $x_2 = -\frac{19}{3}$.

Тригонометрическим называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции. Применяя тригонометрические формулы, стремятся прийти к алгебраическому уравнению от какой-либо одной тригонометрической функции, определив которую находят далее x, вообще говоря, из таблиц; при этом следует иметь в виду многозначность решения.

Примеры:

1) $\operatorname{ctg}(270° - x) = 3 \operatorname{ctg} x$; $\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x}$; $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$; $x_1 = 60° + 180°n$; $x_2 = -60° + 180°n$, т. е. вообще $x = 180°n \pm 60°$ $\left(\text{или } \pi n \pm \frac{\pi}{3}\right)$.

2) $\sin 5x = \sin 4x$; $\sin 5x - \sin 4x = 0$; $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{9x}{2} = 0$; $\sin \frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = 180°n$; $x = 360°n$; $\cos \frac{9x}{2} = 0$; $\frac{9x}{2} = 90° + 180°n$; $x = 20° + 40°n$.

3) $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$; делим обе части на $\cos^2 x$ ($\neq 0$); $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 3$; $\operatorname{tg} x = -1$; $x = 180°n - 45°$; $\operatorname{tg} x = 3$; $x = 180°n + 71°33'54''$ (по таблицам).

4) $a \sin x + b \cos x = c$.

Первый способ. Уединив $a \sin x$, возводим обе части уравнения в квадрат и заменяем $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$; среди найденных значений x будут посторонние.

Второй способ. Заменяем $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$; получим уравнение, квадратное относительно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Третий способ (введение вспомогательного угла). Разделим обе части уравнения на b и, полагая $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varphi$, будем иметь $\operatorname{tg} \varphi \sin x + \cos x = \frac{c}{b}$, $\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x = \frac{c}{b} \cdot \cos \varphi$; $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{b} \cos \varphi$ (φ найдем по таблицам из условия $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$).

Гиперболические уравнения сводятся к показательным.

Пример. $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$; $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; обозначая $e^x = y$, получим $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$; $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$; $x = \ln \frac{9 + \sqrt{73}}{2}$.

Действительные корни некоторых трансцендентных уравнений:

1) $\operatorname{tg} x = x$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4{,}4934$; $x_3 = 7{,}7253$; $x_4 = 10{,}9041$; $x_5 = 14{,}0662$; $x_6 = 17{,}2208$; при $n > 6$ $x_n \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$.

2) $x \operatorname{tg} x = a$.

Значение параметра a	0,01	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90
Наименьший корень	0,10	0,31	0,52	0,65	0,75	0,82

Продолжение

Значение параметра a	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00	5,00
Наименьший корень	0,86	0,99	1,08	1,19	1,26	1,31
Значение параметра a	10,0	30,0	100	$a \to \infty$		
Наименьший корень	1,43	1,52	1,568	$x \to \frac{\pi}{2}$		

3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{th} x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 3{,}927$; $x_2 = 7{,}069$; $x_3 = 10{,}210$; $x_4 = 13{,}352$; $x_5 = 16{,}493$; при $n > 5$ $x_n \approx 16{,}493 + \pi \times (n - 5)$.

4) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{th} x$; $x_0 = 0$; $x_1 = 2{,}365$; $x_2 = 5{,}498$; при $n > 2$ $x_n \approx 5{,}498 + \pi \times (n - 2)$.

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ

Модуль любого корня, действительного или комплексного, многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ меньше числа $\frac{A}{|a_0|} + 1$, где A — наибольший из модулей коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Все действительные корни многочлена $f(x)$ заключаются внутри промежутка

$$-\left(\frac{A}{|a_0|} + 1\right), \ldots, \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

Отыскание промежутков, в каждом из которых лежит один и только один действительный корень уравнения, называется *отделением корней*.

Метод Штурма отделения корней применяется к многочленам с действительными коэффициентами, но имеющим только простые корни; поэтому нужно освободить многочлен $f(x)$ от кратных корней. Для этого следует:

а) найти наибольший общий делитель $D(x)$ многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ (см. сноску на стр. 159);

б) разделить $f(x)$ на $D(x)$.

Многочлен $Q(x) = \frac{f(x)}{D(x)}$ имеет те же корни, что и $f(x)$, но простые.

Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, т. е. взаимно простой со своей производной $f'(x)$ (их наибольший общий делитель — постоянное число, отличное от нуля).

К функциям $f(x)$ и $f'(x)$ присоединим ряд новых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$, составленных следующим образом: $f_1(x)$ есть остаток от деления $f(x)$ на $f'(x)$, взятый с *обратным* знаком; $f_2(x)$ — остаток с обратным знаком от деления $f'(x)$ на $f_1(x)$, и т. д., пока не придем к постоянному числу.

Составляется ряд *функций Штурма*:

$$f(x), f'(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

При составлении функций Штурма положительные постоянные множители не играют роли; такие множители можно вводить или отбрасывать для упрощения вычислений. Обозначим через $S(a)$ число перемен знаков в ряду функций Штурма при $x = a$; тогда имеем *теорему Штурма*: $S(a) - S(b) = h$, где h — число корней функции $f(x)$ в промежутке (a, b), причем $a < b$.

Теорема Штурма позволяет прежде всего определить число всех действительных корней. Для значений x, достаточно больших по абсолютной величине, каждая из функций Штурма имеет знак своего старшего члена; поэтому можно легко найти число перемен знаков в ряду функций Штурма для достаточно больших положительных и отрицательных значений x, т. е. $S(+\infty)$ и $S(-\infty)$. Тогда $S(-\infty) - S(+\infty)$ дает число всех действительных корней функции $f(x)$.

Допустим, что действительные корни многочлена $f(x)$ содержатся в промежутке (a, b). Разбивая этот промежуток на более мелкие промежутки, можно, пользуясь теоремой Штурма, определить число корней, содержащихся в каждом из них. Если в некотором промежутке содержится более одного корня, то его можно снова разбить на более мелкие. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока каждый корень не окажется заключенным в отдельный промежуток.

Пример. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 4$.
Составляем функции Штурма:

$$\frac{1}{2} f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 8x + 2;$$

$$f_1(x) = 11x^2 - 36x + 10;$$

$$f_2(x) = 7x - 16;$$

$$f_3(x) = +1.$$

Найдем число всех действительных корней $f(x)$.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перем. знак.	Число действительных корней
$-\infty$	+	−	+	−	+	4	4
$+\infty$	+	+	+	+	+	0	

Верхняя граница положительных корней есть 4.

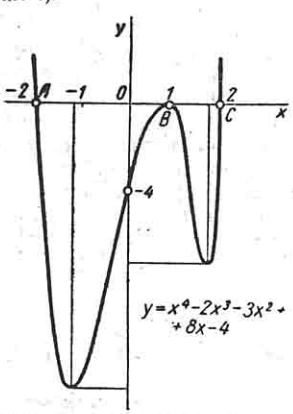
	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число перем. знаков
$x=0$	−	+	+	−	+	3
1	+	+	−	−	+	2
2	+	−	−	−	+	2
3	−	−	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

Таким образом, $f(x)$ имеет три положительных корня в промежутках (0, 1); (2, 3); (3, 4) и один отрицательный. Таким же способом найдем, что отрицательный корень лежит в промежутке (−1, 0).

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Для графического решения уравнения $f(x)=0$ строят график функции $y=f(x)$; абсциссы точек пересечения графика с осью x или абсциссы точек касания графика с осью x дают вещественные корни уравнения.

Пример. Уравнение $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$ имеет корни $x_1=-2$; $x_{2,3}=1$ (двукратный), $x_4=2$ (фиг. 1).



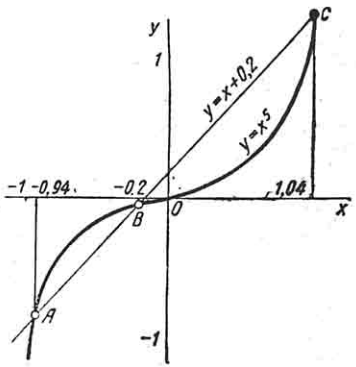
Фиг. 1. Графическое решение уравнения $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0$.

Удобнее разбить левую часть уравнения на два слагаемых $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ и строить графики функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=-f_2(x)$. Абсциссы точек их пересечения дают действительные корни уравнения $f(x)=0$ или уравнения $f_1(x)=-f_2(x)$.

Так, в случае квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ удобно положить $y_1=x^2$ и $y_2=-px-q$. Тогда одну параболу используем для всех квадратных уравнений.

Абсциссы точек пересечения кривой $y=x^n$ с прямой $y=-(px+q)$ дают решения уравнения $x^n+px+q=0$, а с параболой второго порядка $y=-(ax^2+bx+c)$ — решения уравнения $x^n+ax^2+bx+c=0$.

Пример. Уравнение $x^5-x-0{,}2=0$ имеет три вещественных корня: $x_1=-0{,}94$; $x_2=-0{,}20$; $x_3=1{,}04$ (фиг. 2).

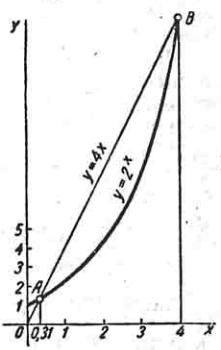


Фиг. 2. Графическое решение уравнения $x^5-x-0{,}2=0$.

Аналогично решаются уравнения типа $e^x+ax+b=0$, $\sin x+ax^2+bx+c=0$.

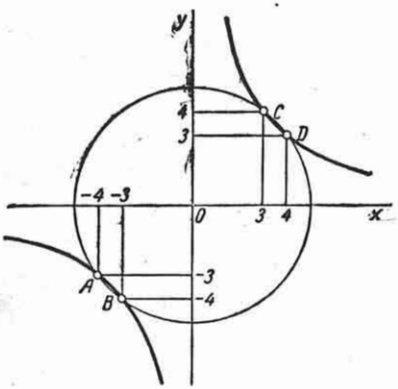
Пример. Уравнение $2^x=4x$ имеет корни $x\approx 0{,}31$ и $x=4{,}00$ (фиг. 3).

Подобный прием употребляют для решения системы уравнений $f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$. Координаты x и y точек пересечения кривых $f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$ определяют решения системы.



Фиг. 3. Графическое решение уравнения $2^x=4x$.

Пример. Системе уравнений $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$ соответствуют окружность радиуса 5 с центром в начале координат и равнобочная гипербола, отнесенная к асимптотам. График показывает (фиг. 4), что все четыре решения системы действительные: $x_1 = -4$; $y_1 = -3$; $x_2 = -3$; $y_2 = -4$; $x_3 = +3$; $y_3 = +4$; $x_4 = +4$; $y_4 = +3$.



Фиг. 4. Графическое решение системы уравнений $x^2 + y^2 = 25$; $xy = 12$.

Для графического решения уравнений применяются также номограммы (см. главу „Номография").

Графические методы применяются, когда требуется найти только приближенное решение или сделать предварительный расчет для более точного решения численными методами.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Метод хорд и касательных

Если действительные корни уравнения отделены, то задача вычисления корней сводится к дальнейшему уменьшению промежутков, в которых заключаются корни. Существуют различные методы, позволяющие ускорить этот процесс; остановимся на комбинированном применении двух методов: ложного положения (простого интерполирования) и метода Ньютона.

Пусть графически или вычислением обнаружено, что вещественный корень уравнения $f(x) = 0$ лежит между числами a и b [$f(a)$ и $f(b)$ —разных знаков] и при этом $f'(x)$ и $f''(x)$ нигде на отрезке $[a, b]$ не обращаются в нуль, следовательно, сохраняют свой знак на всем отрезке. Тогда между a и b лежит только один вещественный простой корень уравнения, а числа a и b могут быть приняты за его первое приближение: с недостатком (число a) и с избытком (число b).

Возможны следующие случаи:

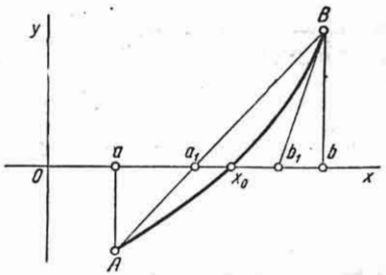
1) $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; $f''(x) > 0$ — на отрезке $[a, b]$ (фиг. 5);

2) $f(a) > 0$; $f(b) < 0$; $f''(x) < 0$ — на отрезке $[a, b]$ (фиг. 6);

3) $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; $f''(x) < 0$ — на отрезке $[a, b]$ (фиг. 7);

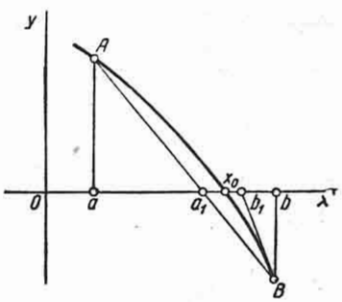
4) $f(a) > 0$; $f(b) < 0$; $f''(x) > 0$ — на отрезке $[a, b]$ (фиг. 8).

Точки A и B кривой соединим хордой и точку пересечения ее с осью x примем



Фиг. 5. К методу хорд и касательных для случая $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) > 0$.

за новое приближенное значение корня x_0, заменяя тем самым дугу AB хордой AB (метод ложного положения).



Фиг. 6. К методу хорд и касательных для случая $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f''(x) < 0$.

В первом и втором случаях точка пересечения a_1 (фиг. 5 и 6) дает более точное, чем a, значение корня x_0 с недостатком; вычисляем по формуле

$$a_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a);$$

получим

$$a < a_1 < x_0.$$

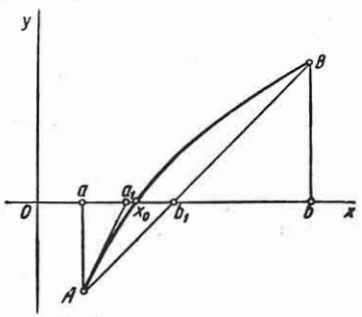
Более точное, чем b, значение корня с избытком (b_1) в этих двух случаях получаем, заменяя дугу AB касательной к этой дуге (способ Ньютона) в точке B, т. е. в точке, где $f(x)$ и $f''(x)$ одного знака, и принимая точку b_1 пересечения касательной с осью x за новое приближенное значение корня x_0; вычисляем по формуле

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

получим

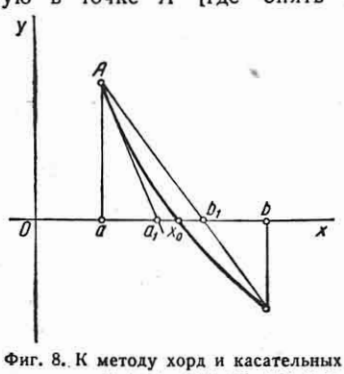
$$x_0 < b_1 < b.$$

В третьем и четвертом случаях (фиг. 7 и 8) более точное значение корня



Фиг. 7. К методу хорд и касательных для случая $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f''(x) < 0$.

x_0 с недостатком получаем при помощи метода Ньютона, т. е. проводя касательную в точке A [где опять $f(x)$



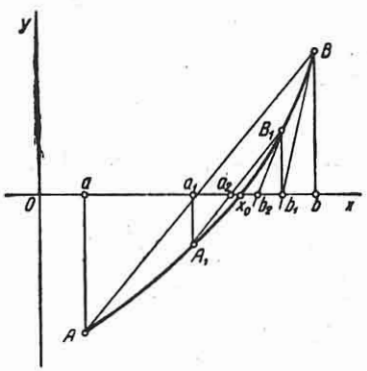
Фиг. 8. К методу хорд и касательных для случая $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f''(x) > 0$.

и $f''(x)$ одного знака], а более точное значение корня с избытком получаем при помощи метода ложного положения; вычисления ведутся по формулам

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)};$$

$$b_1 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b).$$

По числам a_1 и b_1 аналогично можно вычислить a_2 и b_2, затем a_3 и b_3 и т. д., пока не получится $b_n - a_n < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число; тогда a_n и b_n будут значениями искомого корня соответственно с недостатком и с избытком с точностью до ε. Указанный способ всегда приводит к цели, если $f''(x)$ не меняет знака на



Фиг. 9. Постепенное уточнение корней уравнения методом хорд и касательных.

отрезке $[a, b]$ и если метод Ньютона применяется к тому концу дуги, где $\frac{f(x)}{f''(x)} > 0$. Картина постепенного уточнения корней уравнения показана на фиг. 9. Знаменатель в формулах Ньютона при этих вычислениях можно оставлять неизменным, т. е. $f'(a)$ или $f'(b)$ не менять соответственно на $f'(a_1)$, $f'(a_2)$, ... или $f'(b_1)$, $f'(b_2)$, ...

Пример. Вычислить близкий к 1 корень уравнения $x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0$ с точностью до 0,001.

Обозначая $f(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5$, убеждаемся подстановкой, что $f(0) = -5$; $f(1) = 1$. Находим $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16x$; $f''(x) = 12x^2 - 18x + 16$. Корни уравнения $f''(x) = 12x^2 - 18x + 16 = 0$ — мнимые, причем $f''(1) = 10 > 0$, так же как $f''(0) > 0$. Отсюда следует, что на отрезке $[0, 1]$ $f'(x)$ возрастает; действительно, $f'(0) = 0$; $f'(1) = 11$, следовательно, $f'(x) \geqslant 0$ на отрезке $[0, 1]$ и $f(x)$ — монотонна на этом отрезке. Имеем случай, изображенный на фиг. 5. Для вычислений имеем данные: $a = 0$; $b = 1$; $f(a) = -5$; $f(b) = 1$; $f'(b) = 11$.

Производим вычисления:

$$a_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = \frac{5}{6} = 0{,}8333;$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{10}{11} = 0{,}9090;$$

$$f(a_1) = -0{,}6986;\quad f(b_1) = 0{,}0398;\quad f'(b_1) = 10{,}1118.$$

$$a_2 = a_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1)-f(a_1)} f(a_1) = 0{,}9049;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 0{,}9051.$$

Таким образом, искомый корень x_0 лежит в пределах $0{,}9049 < x_0 < 0{,}9051$, т. е. с точностью до $0{,}001$ $x_0 = 0{,}905$.

Если $x = x_0$, $y = y_0$ — приближенное решение системы уравнений $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, то более точным решением является

$$x_1 = x_0 + \left[\frac{f_2\frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1\frac{\partial f_2}{\partial y}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}};$$

$$y_1 = y_0 + \left[\frac{f_1\frac{\partial f_2}{\partial x} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

Эти формулы могут последовательно повторяться, как в способе Ньютона для уравнения с одним неизвестным.

Метод итераций

Простейшим способом исправления приближенного значения корня уравнения x_0, найденного с небольшой точностью, является метод итераций (термин „итерация" означает „повторение"). Приведем данное уравнение к виду $x = \varphi(x)$, что легко сделать, переписав уравнение $f(x) = 0$ в такой форме: $x = x + f(x)$ и обозначив правую часть этого уравнения через $\varphi(x)$. Подставим исходное значение корня a_0 в правую часть уравнения $x = \varphi(x)$ и получим первое приближение корня $a_1 = \varphi(a_0)$; подставив a_1 в правую часть уравнения, получим второе приближение $a_2 = \varphi(a_1)$ и т. д.

Если при надлежащем выборе функции $\varphi(x)$ последовательность чисел a_0, $a_1 = \varphi(a_0)$, $a_2 = \varphi(a_1), \ldots, a_n = \varphi(a_{n-1})$, $a_{n+1} = \varphi(a_n) \ldots$ стремится к пределу $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то этот предел и является корнем данного уравнения. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ будут приближенными значениями для корня уравнения, причем эти приближенные значения должны стремиться к корню уравнения по мере возрастания номера приближения n.

На практике ведут вычисления, т. е. повторяют подстановки до тех пор, пока два последовательных приближенных значения не окажутся равными в пределах тех десятичных знаков, с какими ведется вычисление.

Итерации дают последовательные приближения к искомому корню тогда и только тогда, когда $|\varphi'(x)| < 1$ в окрестности корня, в частности в точке $x = a_0$. Если $|\varphi'(a_0)| > 1$, то для применения способа итераций уравнение $x = \varphi(x)$ заменяют уравнением $x = \psi(x)$, где $\psi(x)$ — функция, обратная функции $\varphi(x)$.

Погрешность каждого нового приближения будет равна погрешности предшествующего приближения, умноженной на правильную дробь $|\varphi'(a_0)|$, если процесс сходящийся.

Пример. Найти наименьший положительный корень уравнения $x = \operatorname{tg} x$.

Построив графики функций $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$, увидим, что наименьший положительный корень уравнения близок к $\frac{3\pi}{2}$, поэтому полагаем $a_0 = \frac{3\pi}{2} = 4{,}7124$ (см. табл. I). Так как $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x > 1$ то данное уравнение заменим уравнением $x = \operatorname{arctg} x$, и вычисления ведем по схеме, пользуясь таблицами Б. И. Сегала и К. А. Семендяева (см. стр. 351 [155]):

n	a_n	$a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n$
0	4,7124	4,5033
1	4,5033	4,4939
2	4,4939	4,4934
3	4,4934	4,4934

Получим корень $a = 4{,}4934$ с точностью до четвертого десятичного знака.

Метод итераций применим и для систем уравнений, в частности для уравнений типа

$$x = \varphi(x, y),\quad y = \psi(x, y).$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Излагаемый здесь способ приближенного решения системы n линейных уравнений с n неизвестными заключается в последовательном исключении неизвестных. Решение ведется по особой схеме, являющейся одним из видоизменений схемы Гаусса. Схема предусматривает возможность попутного контроля вычислений. При вычислениях рекомендуется пользоваться арифмометром и таблицами обратных чисел.

Покажем порядок решения на числовом примере.

Пусть дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3{,}78x_1 + 1{,}18x_2 + 0{,}49x_3 &= 25{,}8;\\ 2{,}15x_1 + 0{,}35x_2 + 7{,}23x_3 &= 44{,}0;\\ 1{,}49x_1 + 3{,}27x_2 + 0{,}48x_3 &= 20{,}3. \end{aligned}\right\}$$

В общем случае подобная система запишется так:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2;\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\}$$

Для записи хода решения составим бланк по форме, указанной на этой же странице, и работу ведем следующим образом:

1) Запишем в средних строчках граф 1—3 в соответствующих колонках коэффициенты заданных уравнений и свободные члены.

2) Найдем суммы коэффициентов и свободных членов заданных уравнений и запишем их в соответствующие строчки колонки Σ.

3) По табл. III найдем $\frac{1}{a_{11}} = 0{,}265$, $\frac{1}{a_{21}} = 0{,}465$, $\frac{1}{a_{31}} = 0{,}671$ и запишем эти числа в колонку a_1 над соответствующими коэффициентами.

4) Найдем произведения: $a_{12}\frac{1}{a_{11}} = 0{,}313$, $a_{13}\frac{1}{a_{11}} = 0{,}13$, $b_1\frac{1}{a_{11}} = 6{,}84$, $\sum_1 \frac{1}{a_{11}} = 8{,}29$, $a_{22}\frac{1}{a_{21}} = 0{,}16$, $a_{23}\frac{1}{a_{21}} = 3{,}36$, $b_2\frac{1}{a_{21}} = 20{,}5$, $\sum_2 \frac{1}{a_{21}} = 25{,}0$, $a_{32}\frac{1}{a_{31}} = 2{,}19$, $a_{33}\frac{1}{a_{31}} = 0{,}32$, $b_3\frac{1}{a_{31}} = 13{,}6$, $\sum_3 \frac{1}{a_{31}} = 17{,}1$ и полученные числа запишем в нижние строчки граф 1—3 в соответствующие колонки; в колонку a_1 в те же строчки запишем единицы. После этого в нижних строчках граф 1—3 расположатся коэффициенты приведенной системы трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0{,}313x_2 + 0{,}13x_3 &= 6{,}84;\\ x_1 + 0{,}16\,x_2 + 3{,}36x_3 &= 20{,}5;\\ x_1 + 2{,}19\,x_2 + 0{,}32x_3 &= 13{,}6, \end{aligned}\right\},$$

а также контрольные суммы $\Sigma_1 = 8{,}29$, $\Sigma_2 = 25{,}0$, $\Sigma_3 = 17{,}1$, которые в целях контроля вычислений вновь получим непосредственным сложением чисел соответствующей строки; действительно,

$$1 + 0{,}313 + 0{,}13 + 6{,}84 = 8{,}28 \approx 8{,}29;$$
$$1 + 0{,}16 + 3{,}36 + 20{,}5 = 25{,}0;$$
$$1 + 2{,}19 + 0{,}32 + 13{,}6 = 17{,}1.$$

5) Вычтем почленно из первого приведенного уравнения второе, а затем третье; результаты запишем в средние строчки граф 1′ и 2′. То же сделаем с соответствующими контрольными суммами, которые проверим непосредственным сложением; действительно:

$$0{,}15 + (-3{,}23) + (-13{,}7) = -16{,}8 \approx -16{,}7;$$
$$(-1{,}88) + (-0{,}19) + (-6{,}8) = -8{,}9 \approx -8{,}8.$$

6) С полученной системой из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0{,}15x_2 - 3{,}23x_3 &= -13{,}7;\\ -1{,}88x_2 - 0{,}19x_3 &= -6{,}8 \end{aligned}\right\}$$

и с соответствующими контрольными суммами поступим, как указано в пп. 3—5, и придем к одному уравнению $-21{,}7x_3 = -95{,}4$, из которого найдем $x_3 = 4{,}4$ и запишем в колонку „Решение“ и внизу таблицы.

7) Умножим $x_3 = 4{,}4$ на значения коэффициента a_3 в пяти первых приведенных уравнениях и запишем полученные произведения (0,57; 15; 1,4; — 95; 0,44) в колонку a_3, в верхние строчки граф 1—3, 1′, 2′.

8) Произведения a_3x_3, записанные в графах 1′ и 2′, вычтем из соответствующих свободных членов приведенных уравнений и получим два значения для x_2: $(-91{,}8) - (-95) = 3{,}2$; $3{,}6 - 0{,}44 = 3{,}2$; эти значения запишем в колонку „Решение“, а их среднее арифметическое — внизу таблицы.

	a_1	a_2	a_3	b	Σ	Решение
1	0,265	1,0	0,57			$x_1 = 5{,}3$
	3,78	1,18	0,49	25,8	31,3	
	1	0,313	0,13	6,84	8,29	
2	0,465	0,51	15			$x_2 = 5{,}0$
	2,15	0,35	7,23	44,0	53,7	
	1	0,16	3,36	20,5	25,0	
3	0,671	7,0	1,4			$x_1 = 5{,}2$
	1,49	3,27	0,48	20,3	25,5	
	1	2,19	0,32	13,6	17,1	
1′		6,7	—95			$x_2 = 3{,}2$
		0,15	—3,23	—13,7	—16,7	
		1	—21,6	—91,8	—112	
2′		—0,532	0,44			$x_2 = 3{,}2$
		—1,88	—0,19	—6,8	—8,8	
		1	0,10	3,6	4,7	
1″			—0,0461			$x_3 = 4{,}4$
			—21,7	—95,4	—117	
			1	4,40	5,39	
Округление: $x_1 = 5{,}2$; $x_2 = 3{,}2$; $x_3 = 4{,}4$.						

9) Умножим $x_2 = 3{,}2$ на значения коэффициентов a_1 в трех первых приведенных уравнениях и запишем полученные произведения (1,0; 0,51; 7,0) в колонку a_2 в верхние строчки граф 1—3.

10) Произведения a_1x_1 и a_2x_2, записанные в графах 1—3, вычтем из соответствующих свободных членов приведенных уравнений и получим три значения для x_1: 6,84—1,0—0,57 = 5,3; 20,5—0,51—15 = 5,0; 13,6—7,0—1,4 = 5,2; эти значения запишем в колонку „Решение", а их среднее арифметическое — внизу таблицы.

11) Подстановкой в данную систему уравнений убедимся, что числа 5,2; 3,2; 4,4 дают решение системы с точностью до двух знаков.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПО МЕТОДУ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО *

Пусть уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Составление по данному такого уравнения $A_0z^n + A_1z^{n-1} + A_2z^{n-2} + \ldots + A_n = 0$, корни которого будут $-\alpha_1^2, -\alpha_2^2, -\alpha_3^2, \ldots, -\alpha_n^2$, называется *квадрированием*. Коэффициенты преобразованного уравнения вычисляют по формулам

$$A_0 = a_0^2;\quad A_1 = a_1^2 - 2a_0a_2;\quad A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4;\quad A_3 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6; \ldots;\quad A_n = a_n^2.$$

Выполняя квадрирование последовательно k раз, приходят к уравнению, корнями которого будут $-\alpha_1^m, -\alpha_2^m, -\alpha_3^m, \ldots, -\alpha_n^m$, где $m = 2^k$ называется степенью квадрирования.

Сущность метода Лобачевского состоит в образовании по данному уравнению путем ряда квадрирований нового уравнения, корни которого были бы столь высокими степенями корней данного уравнения, чтобы по коэффициентам преобразованного уравнения можно было вычислить с требуемой точностью корни данного уравнения. Это делается следующим образом.

Пусть все корни данного уравнения — вещественные и различные:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_{n-1} > \alpha_n.$$

Тогда при достаточно большом числе квадрирований будут справедливы с требуемой точностью следующие равенства:

$$\alpha_1^m = \frac{A_1}{A_0};\quad \alpha_2^m = \frac{A_2}{A_1};\quad \alpha_3^m = \frac{A_3}{A_2};\ldots;$$

$$\alpha_{n-1}^m = \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}};\qquad \alpha_n^m = \frac{A_n}{A_{n-1}},$$

из которых и получаются абсолютные значения вещественных корней. Знак каждого корня определяют, подставляя его со знаками плюс или минус в данное уравнение.

Всего квадрирований нужно сделать столько, чтобы в последнем преобразованном уравнении каждый коэффициент стал равен (с требуемой точностью) квадрату соответствующего коэффициента предпоследнего уравнения; при вычислениях с помощью логарифмов логарифмы коэффициентов преобразованного уравнения окажутся в 2 раза больше логарифмов соответствующих коэффициентов преобразуемого уравнения. В этом случае говорят, что коэффициенты при квадрировании изменяются правильно.

Число квадрирований тем меньше, чем больше отличается от единицы отношение наиболее близких по абсолютной величине корней и чем меньше требуемая точность. При вычислениях с пятью-шестью знаками достаточно в большинстве случаев шести-семи квадрирований.

Если некоторые коэффициенты данного уравнения при последовательных квадрированиях не показывают тенденции возводиться в квадрат (в подобном случае говорят, что эти коэффициенты изменяются неправильно), то данное уравнение имеет либо кратные, либо комплексные корни, либо и те, и другие.

Если при квадрированиях какой-либо коэффициент A_i меняет свой знак и расположен между правильно изменяющимися коэффициентами A_{i-1} и A_{i+1}, то это является признаком наличия в данном уравнении простой пары сопряженных комплексных корней $\rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, модуль которых определяют с заданной точностью по формуле

$$\rho = \sqrt[2m]{\frac{A_{i+1}}{A_{i-1}}}.$$

Если в том же уравнении имеются пары смежных коэффициентов, например,

* Этот метод опубликован Н. И. Лобачевским в 1834 г.; см. литературу на стр. 351 [117], [151].

m	a_0	a_1		a_2	
1	1	1		-6	
		$a_1^2 = 1$ $-2a_0a_2 = 12$		$a_2^2 = 36$ $-2a_1a_3 = -40$ $2a_0a_4 = -32$	
2	1	13	$\lg a_1 = 1{,}114$	-36	$\lg(-a_2) = 1{,}556$
		$a_1^2 = 169$ $(-2a_0a_2) = 71{,}9$	$2\lg a_1 = 2{,}228$ $\lg(-2a_0a_2) = 1{,}857$	$a_2^2 = 129$ $-2a_1a_3 = -5410$ $2a_0a_4 = 512$	$2\lg(-a_2) = 3{,}112$ $\lg 2a_1 = 1{,}415$ $\lg a_3 = 2{,}318$ $\lg 2a_1a_3 = 3{,}733$ $\lg 2a_0a_4 = 2{,}709$
4	1	$2{,}41\cdot10^2$	$\lg a_1 = 2{,}382$	$-4{,}77\cdot10^3$	$\lg(-a_2) = 3{,}679$
		$a_1^2 = 5{,}81\cdot10^4$ $(-2a_0a_2) = 0{,}96\cdot10^4$	$2\lg a_1 = 4{,}764$ $\lg(-2a_0a_2) = 3{,}980$	$a_2^2 = 2{,}28\cdot10^7$ $-2a_1a_3 = -2{,}97\cdot10^7$ $2a_0a_4 = 0{,}01\cdot10^7$	$2\lg(-a_2) = 7{,}358$ $\lg 2a_1 = 2{,}683$ $\lg a_3 = 4{,}790$ $\lg 2a_1a_3 = 7{,}473$ $\lg 2a_0a_4 = 5{,}117$
8	1	$6{,}77\cdot10^4$	$\lg a_1 = 4{,}831$	$-2{,}68\cdot10^7$	$\lg(-a_2) = 7{,}428$
		$a_1^2 = 4{,}59\cdot10^9$ $(-2a_0a_2) = 0{,}05\cdot10^9$	$2\lg a_1 = 9{,}662$ $\lg(-2a_0a_2) = 7{,}729$	$a_2^2 = 7{,}18\cdot10^{14}$ $-2a_1a_3 = -6{,}00\cdot10^{14}$ $2a_0a_4 = 0{,}00\cdot10^{14}$	$2\lg(-a_2) = 14{,}856$ $\lg 2a_1 = 5{,}132$ $\lg a_3 = 9{,}646$ $\lg 2a_1a_3 = 14{,}778$ $\lg 2a_0a_4 = 9{,}933$
16	1	$4{,}64\cdot10^9$	$\lg a_1 = 9{,}667$	$1{,}18\cdot10^{14}$	$\lg a_2 = 14{,}072$
		$a_1^2 = 2{,}16\cdot10^{19}$ $-2a_0a_2 = 0{,}00\cdot10^{19}$	$2\lg a_1 = 19{,}334$ $\lg 2a_0a_2 = 14{,}373$	$a_2^2 = 1{,}39\cdot10^{28}$ $-2a_1a_3 = -18{,}4\cdot10^{28}$ $2a_0a_4 = 0{,}00\cdot10^{28}$	$2\lg a_2 = 28{,}144$ $\lg 2a_1 = 9{,}968$ $\lg a_3 = 19{,}297$ $\lg 2a_1a_3 = 29{,}265$ $\lg 2a_0a_4 = 19{,}565$
32	1	$2{,}16\cdot10^{19}$	$\lg a_1 = 19{,}334$	$-1{,}70\cdot10^{29}$	

$32\lg\alpha_1 = 19{,}334$
$\lg\alpha_1 = 0{,}604$
$|\alpha_1| = 4{,}02$

$64\lg\rho = 38{,}594 - 19{,}334 = 19{,}260$
$\lg\rho = 0{,}301$
$\rho = 2{,}00$

Ответ: $\alpha_1 = -4$; $\alpha_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$;

a_3		a_1	
20		-16	
$a_3^2 = 400$ $-2a_1a_4 = -192$		$a_4^2 = 256$	
208	$\lg a_3 = 2{,}318$	256	$\lg a_4 = 2{,}408$
$a_3^2 = 43\,300$ $(-2a_2a_4) = 18\,400$	$2\lg a_3 = 4{,}636$ $\lg(-2a_2) = 1{,}857$ $\lg a_4 = 2{,}408$ $\lg(-2a_2a_4) = 4{,}265$	$a_4^2 = 65\,500$	$2\lg a_4 = 4{,}816$
$6{,}17\cdot10^4$	$\lg a_3 = 4{,}790$	$6{,}55\cdot10^4$	$\lg a_4 = 4{,}816$
$a_3^2 = 3{,}80\cdot10^9$ $(-2a_2a_4) = 0{,}63\cdot10^9$	$2\lg a_3 = 9{,}580$ $\lg(-2a_2) = 3{,}980$ $\lg a_4 = 4{,}816$ $\lg(-2a_2a_4) = 8{,}796$	$a_4^2 = 4{,}29\cdot10^9$	$2\lg a_4 = 9{,}632$
$4{,}43\cdot10^9$	$\lg a_3 = 9{,}646$	$4{,}29\cdot10^9$	$\lg a_4 = 9{,}632$
$a_3^2 = 1{,}96\cdot10^{19}$ $(-2a_2a_4) = 0{,}02\cdot10^{19}$	$2\lg a_3 = 19{,}262$ $\lg(-2a_2) = 7{,}729$ $\lg a_4 = 9{,}632$ $\lg(-2a_2a_4) = 17{,}361$	$a_4^2 = 1{,}84\cdot10^{19}$	$2\lg a_4 = 19{,}264$
$1{,}98\cdot10^{19}$	$\lg a_3 = 19{,}297$	$1{,}84\cdot10^{19}$	$\lg a_4 = 19{,}264$
$a_3^2 = 3{,}93\cdot10^{38}$ $-2a_2a_4 = -0{,}00\cdot10^{38}$	$2\lg a_3 = 38{,}594$ $\lg 2a_2 = 14{,}373$ $\lg a_4 = 19{,}264$ $\lg 2a_1a_4 = 33{,}637$	$a_4^2 = 3{,}37\cdot10^{38}$	$2\lg a_4 = 38{,}528$
$3{,}93\cdot10^{38}$	$\lg a_3 = 38{,}594$	$3{,}37\cdot10^{38}$	$\lg a_4 = 38{,}528$

$$32\lg\alpha_4 = 38{,}528 - 38{,}594 = -0{,}066$$
$$\lg\alpha_4 = -0{,}002 = \bar{1}{,}998$$
$$|\alpha_4| = 0{,}995$$

$$\alpha_4 = 1.$$

A_j и A_{j-1}, изменяющихся правильно, то уравнение, кроме указанных комплексных корней, имеет и простые вещественные корни, абсолютные величины которых определяют по формуле

$$|\alpha_j| = \sqrt[m]{\frac{A_j}{A_{j-1}}}.$$

Допустим, что данное уравнение не имеет кратных корней, что можно обнаружить, не решая уравнения [см. стр. 118].

Определив все вещественные корни данного уравнения и модули всех комплексных корней, найдем их аргументы.

Если уравнение имеет одну пару комплексных сопряженных корней с модулем ρ, то их аргумент φ находится из равенства

$$2\rho \cos \varphi = -\frac{a_1}{a_0} - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-2},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ — все простые вещественные корни.

Если уравнение имеет две пары комплексных сопряженных корней с модулями ρ_1 и ρ_2, то их аргументы φ_1 и φ_2 находятся из системы уравнений

$$2\rho_1 \cos \varphi_1 + 2\rho_2 \cos \varphi_2 =$$

$$= -\frac{a_1}{a_0} - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-4};$$

$$\frac{2}{\rho_1} \cos \varphi_1 + \frac{2}{\rho_2} \cos \varphi_2 =$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \ldots - \frac{1}{\alpha_n}.$$

Если уравнение имеет несколько пар комплексных сопряженных простых корней, то, чтобы найти вещественную часть p какой-нибудь пары $p \pm qi$ с модулем ρ, делим левую часть данного уравнения на трехчлен $x^2 - 2px + \rho^2$, оставляя p неопределенным, пока не получим остаток 1-й степени относительно x: $P(p)\,x + Q(p)$. Затем находим общий наибольший делитель многочленов $P(p)$ и $Q(p)$ и приравниваем его нулю. Полученное уравнение и определит величину вещественной части p корня, а мнимая часть находится по формуле

$$q = \sqrt{\rho^2 - p^2}.$$

Если при вычислении окажется, что шесть или семь квадрирований не отделяют корней, а присутствие отрицательных коэффициентов в преобразованных уравнениях укажет на существование комплексных корней, то это значит, что модули комплексных корней весьма близки между собой. Тогда вычисления следует начать вновь, предварительно преобразовав уравнение введением новой неизвестной $y = x - b$, где $b \approx \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}$. В уравнении с неизвестным y модули корней, соответствующих прежним корням с равными модулями, будут уже не равны между собой. Указанным выше способом найдем комплексные корни преобразованного уравнения и понизим его степень (см. пример 1); следовательно, в уравнении могут остаться лишь близкие или равные между собой вещественные корни, число и присутствие которых обнаружатся по изменениям коэффициентов при последовательных квадрированиях.

Если при квадрировании уравнения, освобожденного от комплексных корней, окажется, что между правильно изменяющимися коэффициентами A_i и A_{i+r} помещаются коэффициенты $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i+r-1}$, изменяющиеся при повторном квадрировании так, что имеют место равенства

$$\lg A'_{i+1} = 2 \lg A_{i+1} - \lg \binom{r}{1};$$

$$\lg A'_{i+2} = 2 \lg A_{i+2} - \lg \binom{r}{2};$$

. . . . . .

$$\lg A'_{i+r-1} = 2 \lg A_{i+r-1} - \lg \binom{r}{r-1},$$

то уравнение имеет вещественный корень кратности r, определяемый по формуле

$$|\alpha| = \sqrt[rm]{\frac{A_{i+r}}{A_i}}.$$

Если корни уравнения не равны между собой, а лишь весьма близки, то указанные равенства имеют место лишь приближенно.

Чтобы убедиться, в точности ли корни равны между собой, надо применить указанный на стр. 118 прием отыскания равных корней.

Пример 1. Положим, нашли, что уравнение $x^4 + 2x^3 + x + 2 = 0$ имеет пару комплексных сопряженных корней с модулем $\rho = 1$; тогда у левой части уравнения имеется трехчленный делитель вида $x^2 - 2px + \rho^2$, т. е. $x^2 - 2px + 1$. Требуется найти комплексные корни уравнения и освободить его от комплексных корней.

Ищем p. Делим по правилу деления многочленов $(x^4 + 2x^3 + x + 2) : (x^2 - 2px + 1)$, оставляя p неопределенным. В частном получим $x^2 + 2(p+1)x + (4p^2 + 4p - 1)$, в остатке $(8p^3 + 8p^2 - 4p - 1)x - (p^2 + 4p - 3)$. Искомая величина p есть общий корень уравнений $8p^3 + 8p^2 - 4p - 1 = 0$ и $4p^2 + 4p - 3 = 0$. Ищем последовательным делением общий наибольший делитель многочленов: $8p^3 + 8p^2 - 4p - 1$ и $4p^2 + 4p - 3$; находим $2p - 1$.

Полагая $2p - 1 = 0$, получаем искомое значение $p = \frac{1}{2}$. Следовательно, мнимая часть комплексного корня $q = \sqrt{\rho^2 - p^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Уравнение имеет комплексные корни $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Деля левую часть уравнения на трехчлен $x^2 - x + 1$, освобождаем его от комплексных корней и приходим к уравнению $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Пример 2. Решить по методу Лобачевского уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0.$$

Выполняем квадрирования, располагая вычисления по схеме на стр. 130—131 и пользуясь логарифмами, начиная со второго квадрирования. Вычисления ведем с точностью до трех знаков. После пятого квадрирования замечаем, что логарифмы коэффициентов a_1, a_2, a_4 начали удваиваться, т. е. сами коэффициенты возводятся в квадрат, а коэффициент a_3 изменяется неправильно и меняет свой знак. Приходим к выводу, что уравнение имеет два вещественных корня α_1 и α_4 и два комплексных сопряженных $\alpha_{2,3} = \rho(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$.

Определим вещественные корни и модуль комплексных корней по формулам

$$\alpha_1^{32} = \frac{A_1}{A_0}, \quad \rho^{64} = \frac{A_3}{A_1}; \quad \alpha_4^{32} = \frac{A_4}{A_3}$$

(расчет см. в конце таблицы).

Округляя результаты до двух знаков и определяя подстановкой в уравнение знаки вещественных корней, получим $\alpha_1 = -4$; $\rho = 2$; $\alpha_4 = 1$.

Определяем аргумент комплексных корней по формуле

$$2\rho\cos\varphi = -\frac{a_1}{a_0} - \alpha_1 - \alpha_4,$$

т. е.

$$4\cos\varphi = -1 + 4 - 1,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{2,3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

Итак, данное уравнение имеет корни -4, $1 \pm i\sqrt{3}$, 1.

Пример 3. Пусть при последовательном квадрировании оказалось, что коэффициенты A_2 и A_4 изменяются правильно, а коэффициент A_3 последующего уравнения приближенно равен половине квадрата соответствующего коэффициента предыдущего уравнения, т. е. $\lg A_3' = 2\lg A_3 - \lg 2$; заключаем, что уравнение имеет двукратный корень, абсолютную величину которого определяем по формуле

$$|\alpha| = \sqrt[2^m]{\frac{A_4}{A_2}},$$

где m — степень квадрирования.

ГЛАВА VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Предел функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором отрезке, за исключением, быть может, некоторого числа a, принадлежащего этому отрезку. Тогда символ $\lim\limits_{x \to a} y = b$ („предел y равен b при x, стремящемся к a") обозначает следующее: задав произвольно малое положительное число ε, можно указать такое положительное число δ, что при любых значениях x, взятых из области определения функции и удовлетворяющих условиям $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, соответствующие значения функции $y = f(x)$ будут удовлетворять неравенству $|y - b| < \varepsilon$.

Коротко: $\lim\limits_{x \to a} y = b$, если y *сколь угодно близко* к b при x, *достаточно близком* к a.

Пример. $\lim\limits_{x \to 1} |2x + 3| = 5$, так как при любом ε неравенство $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$ будет выполнено при любом значении x, удовлетворяющем неравенству $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$; здесь $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} y = b$ обозначает, что y сколь угодно близко к b при достаточно больших положительных x. Аналогично определяется равенство $\lim\limits_{x \to -\infty} y = b$.

Пример. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = 5$, так как $\left|\left(5 + \frac{1}{x}\right) - 5\right| < \varepsilon$, если $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Символ $\lim\limits_{x \to a} y = +\infty$ (или $-\infty$) обозначает, что при x, достаточно близком к a, y как угодно велико по абсолютной величине, оставаясь с некоторого значения положительным (или отрицательным).

Примеры.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty.$$

Предел числовой последовательности. Бесконечное множество чисел, занумерованных всеми натуральными числами и расположенных в порядке возрастания номеров, называется *числовой последовательностью* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$; u_n — общий член числовой последовательности — *функция целочисленного аргумента*: $u_n = f(n)$.

Пределом числовой последовательности называется предел общего члена последовательности при $n \to \infty$.

Примеры: 1) Последовательность $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, u_n = \frac{n+1}{n}, \ldots$ имеет пределом единицу, так как $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$; действительно, $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

2) Последовательность

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \begin{cases} u_n = \dfrac{n-1}{n}, & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ u_n = \dfrac{1}{n}, & \text{если } n \text{ — четное,} \end{cases}$$

$$\frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \ldots,$$

предела не имеет: $u_n \to 1$ при n нечетном и $u_n \to 0$ при n четном. В этом случае говорят, что последовательность имеет два *предельных значения*: 0 и 1; из них второе называется *наибольшим пределом*.

Ограниченная величина. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*

* См. литературу на стр. 349—350 [30], [33], [35], [36], [40], [62].

сверху (или *снизу*) на множестве M, если существует число C такое, что $f(x) < C$ [или $f(x) > C$] для всех x, принадлежащих множеству M.

Бесконечно большая величина. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} |y| = +\infty$. Бесконечно большая величина либо стремится к $+\infty$, либо стремится к $-\infty$, либо не стремится ни к какому пределу, принимая значения то положительные, то отрицательные, но по абсолютной величине безгранично возрастающие.

Пример. $y = (-1)^n \cdot n$ при $n \to \infty$ (n — целое) есть бесконечно большая, предела не имеет.

Бесконечно малая величина. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} y = 0$.

Примеры: 1) $\cos x$ — бесконечно малая при $x \to \frac{\pi}{2}$, так как $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$.

2) $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \pm\infty$, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая.

Если $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = 0$, то говорят, что β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α. Если порядок бесконечно малой α принят за единицу и $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\beta}{\alpha^n} = A \neq 0$, где A — постоянное число, то β — бесконечно малая порядка n.

Две бесконечно малые α и β называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\lim\limits \frac{\beta}{\alpha} = 1$. Если $\beta = \alpha + \varepsilon$, где α, β, ε — бесконечно малые, причем ε — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с α, то α называется *главной частью* β; тогда α и β — равносильные бесконечно малые.

Примеры:

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$, следовательно, $1 - \cos\alpha$ есть бесконечно малая 2-го порядка относительно α.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, следовательно, x и $\sin x$ — равносильные бесконечно малые при $x \to 0$.

Основные свойства бесконечно малых. Пусть α, β, γ, ... — бесконечно малые при $x \to a$; тогда:

1) $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ — бесконечно малая, если число слагаемых ограничено;

2) $\alpha \cdot u$ — бесконечно малая, если u — ограниченная при $|x - a| < \eta$, где η — достаточно малое положительное число;

3) $\frac{\alpha}{u}$ — бесконечно малая, если $\lim\limits_{x \to a} u \neq 0$.

Основные теоремы о пределах

1) $\lim A = A$ (A — постоянное);

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) - \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\varphi(x)\psi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$, если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$.

5) Если $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Признак существования предела последовательности. Для того чтобы последовательность чисел $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ можно было указать такой член a_N последовательности, что любые ее два члена, стоящие после a_N, будут отличаться друг от друга на число, меньшее ε, т. е. $|a_i - a_j| < \varepsilon$ при $i > N$ и $j > N$.

Важнейшие пределы:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}71828 \ldots$; число e служит основанием системы натуральных логарифмов;

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C \approx 0{,}57722 \ldots$; число C — постоянная Эйлера;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}a^x=1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^{\varepsilon x}}=0\ (\varepsilon>0);$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^k x}{x^\varepsilon}=0\ (\varepsilon>0);\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1\ (p>0);\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=\frac{1}{e};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k;\quad \lim_{n\to\infty}n^k x^n=0,$$

если $|x|<1$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\begin{cases}0, & \text{если } 0<a<1;\\ \frac{1}{2}, & a=1;\\ 1, & a>1;\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}\ (a>0,\ b>0);$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\dots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\dots(x^k-1)}=$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k}=\binom{n}{k};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$ (k — целое положительное);

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\right\}=\frac{1}{2}$$

(k — целое положительное);

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}=-1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)}{n^3}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=a^2+a+\frac{1}{3}.$$

Если $f(x)$ конечна для всякого конечного значения x, то

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x+1)}{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)^{\frac{1}{x}}\right]$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$$

(формула Стирлинга);

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{2}$$

(формула Валлиса).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* при $x=a$ (в точке a), если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, т. е. предел функции при $x\to a$ существует и равен численному значению функции при $x=a$.

Если функция непрерывна, то бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, где $\Delta x=x-a$ и $\Delta y=y-f(a)$ — приращения соответственно аргумента и функции.

Значение $x=a$, при котором $y=f(x)$ не является непрерывной, называется *точкой разрыва*.

В точке разрыва предел функции либо вовсе не существует, либо не совпадает со значением функции в этой точке. Если в точке разрыва $x=a$ не существует предела функции $f(x)$, то могут существовать так называемые предельные значения функции справа и слева,

обозначаемые символами $f(a+0)$ и $f(a-0)$, так что

$$f(a+0)=\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{x\to a+0} f(x);$$

$$f(a-0)=\lim_{h\to 0} f(a-h)=\lim_{x\to a-0} f(x);$$

$$(h>0).$$

Если $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то имеют место равенства

$$f(a-0)=f(a)=f(a+0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке отрезка $[a, b]$, называется непрерывной на отрезке $[a, b]$. При этом в точке a требуется лишь *непрерывность справа*, т. е. соотношение $f(a+0)=f(a)$, а в точке b — *непрерывность слева*, т. е. соотношение $f(a-0)=f(a)$.

Если при $x=a$ оба предельных значения функции $f(x)$ (справа и слева) существуют и конечны, но не равны между собой, то говорят, что при $x=a$ функция имеет *точку разрыва 1-го рода*.

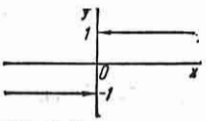
Функция имеет при $x=a$ *точку разрыва 2-го рода*, если не существует по крайней мере одного из предельных значений функции — справа или слева; в частности, это имеет место, если функция стремится к бесконечности в окрестности точки a, т. е. если по крайней мере одно из значений функции $f(a+h)$ или $f(a-h)$ стремится к бесконечности при $h\to 0$ $(h>0)$.

Примеры:

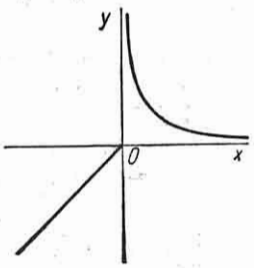
1) $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0;\\ 0 & \text{“ } x=0;\\ -1 & \text{“ } x<0; \end{cases}$

в точке 0 функция не непрерывна ни слева, ни справа; разрыв 1-го рода (фиг. 1).

2) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x>0)\\ x & (x<0) \end{cases}$



Фиг. 1. Разрыв первого рода.



Фиг. 2. Разрыв второго рода.

имеет в точке 0 разрыв 2-го рода бесконечный скачок) (фиг. 2).

Функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и имеет на нем наибольшее и наименьшее значения. Непрерывная функция между любыми своими двумя значениями обязательно принимает все промежуточные значения.

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей* на отрезке $[a, b]$, если при $a\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant b$ всегда $f(x_1)\leqslant f(x_2)$; если же при том же условии всегда $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, функция $f(x)$ называется *невозрастающей* на отрезке $[a, b]$.

Неубывающие и невозрастающие функции вместе образуют класс *монотонных* функций.

Монотонная функция может иметь точки разрыва только 1-го рода. Монотонная ограниченная в промежутке (a, b) функция имеет в точке a правый, а в точке b — левый предел; здесь под буквами a и b можно подразумевать либо действительное число, либо один из символов $+\infty$ или $-\infty$. В частности, если возрастающая числовая последовательность ограничена сверху, то она сходится (т. е. имеет предел при $n\to\infty$).

Производная и дифференциал. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором отрезке. Если аргументу x_0 дать приращение Δx_0, т. е. от точки x_0 перейти к точке $x_0+\Delta x_0$, то функция y получит приращение $\Delta y=f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)$. Отношение

$$\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

дает среднее приращение функции, рассчитанное на единицу приращения аргумента. Предел этого отношения при $\Delta x_0\to 0$, если он существует, называется *производным числом* функции $f(x)$ в точке x_0. Если функция имеет производное число в каждой точке отрезка, то говорят, что она имеет *производную функцию* на этом отрезке.

Обозначения производной:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[f(x)]=f'(x)=$$

$$=Df(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой. Дифференцируемая функция непрерывна, но обратное не всегда имеет место.

Если функция $y=f(x)$ изображена кривой в декартовых координатах, то $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, который касательная к кривой в данной точке

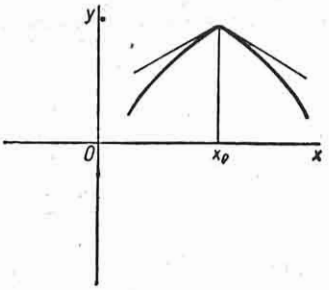
образует с положительным направлением оси x.

Непрерывная функция $f(x)$, не дифференцируемая в некоторой точке $x = x_0$, может иногда иметь в этой точке так называемые *правую* и *левую* производные, обозначаемые символами $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$ и определяемые как пределы, к которым стремятся отношения

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ и } \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h},$$

если величина h стремится к нулю, оставаясь положительной. В этом случае график непрерывной функции имеет так называемую угловую точку, абсцисса которой равна x_0 (фиг. 3).

Кривая называется *кусочногладкой*, если она имеет конечное число угловых точек; при этом угол наклона касательной к кривой является непрерывной функцией абсциссы переменной точки



Фиг. 3. Угловая точка.

кривой во всех промежутках, соответствующих участкам кривой между угловыми точками.

Второй производной функции называется производная от производной $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, третьей производной — производная от второй производной $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$; вообще n-й производной называется производная от $(n-1)$-й производной: $\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$. Производные четвертого и более высокого порядков часто обозначаются римской цифрой без скобок, например $f^{IV}(x)$.

Дифференциалом функции называется произведение производной на произвольное приращение аргумента: $dy = f'(x)\Delta x$; дифференциал функции есть главная часть приращения функции:

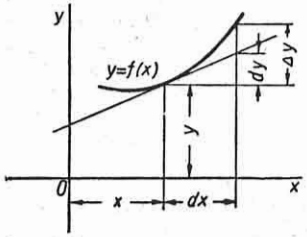
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon;$$

при стремлении Δx к нулю величина ε будет бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с Δx.

В частном случае для $y = x$ имеем $dx = \Delta x$, поэтому $dy = f'(x)\,dx$.

Производная 1-го порядка равна отношению дифференциалов: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала поясняется фиг. 4.



Фиг. 4. Геометрическое истолкование дифференциала функции.

Дифференциал n-го порядка определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка. Дифференциал аргумента считается при этом постоянным. Таким образом:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2, \ldots, d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Дифференциал n-го порядка d^ny является бесконечно малой n-го порядка по сравнению с дифференциалом dx, если последний стремится к нулю.

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Функция $y = f[\varphi(x)] = y(x)$ называется в этом случае *сложной* функцией переменной x.

Производные сложной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(u)\,[\varphi'(x)]^2 + f'(u)\,\varphi''(x);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(u)\,[\varphi'(x)]^3 +$$

$$+ 3f''(u)\,\varphi'(x)\,\varphi'(x) + f'(u)\,\varphi'''(x)$$

и т. д.

Дифференциалы сложной функции. Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, то

$$dy = f'(u)\,du;$$

$$d^2y = f'(u)\,d^2u + f''(u)\,du^2;$$

$$d^3y = f'(u)\,d^3u + 3f''(u)\,d^2u\,du + f'''(u)\,du^3$$

и т. д.

Цепное правило дифференцирования сложных функций. Если $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = \varphi(w)$, $w = \psi(x)$, то $\dfrac{dy}{dx} = f'(u)\,g'(v)\,\varphi'(w)\,\psi'(x)$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$.

Нередко дифференцирование по параметру t обозначается точкой, поставленной над дифференцируемой функцией, тогда

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = \frac{\dot x\ddot y - \dot y\ddot x}{\dot x^3} = \frac{dx\cdot d^2y - dy\cdot d^2x}{dx^3};$$

здесь dx, dy, d^2x, d^2y — дифференциалы 1-го и 2-го порядков от x и y по аргументу t.

Если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными функциями, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \quad \varphi''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3};$$

$$\varphi'''(y) = -\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4} + \frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}.$$

ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$c' = 0$ (c — постоянная);

$x' = 1$;

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$ (u, v, w — функции от x);

$(cu)' = cu'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$$(u_1u_2\dots u_n)' = u_1'u_2\dots u_n + u_1u_2'\dots u_n + \dots + u_1u_2\dots u_n' = \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \dots + \frac{u_n'}{u_n}\right)u_1u_2\dots u_n;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2};$$

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x;$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x);$$

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\sec x;$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x;$$

$$(\ln\sin x)' = \operatorname{ctg} x;$$

$$(\ln\cos x)' = -\operatorname{tg} x;$$

$$\left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x;$$

$$\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{1}{\cos x} = \sec x;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{a^2+x^2};$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$(\operatorname{arccosec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}};$$

$$\left[\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}\right]' = \frac{1}{x^2-a^2};$$

$$\left[\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\right]' = \frac{1}{a^2-x^2};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\left(\operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$\left(\operatorname{Arch} \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(-1 < x < +1);$$

$$(\operatorname{Arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2};$$

$$\left(-1 < \frac{1}{x} < +1\right);$$

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n \cdot e^{ax};$$

$$(a^{kx})^{(n)} = (k \ln a)^n \cdot a^{kx};$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n};$$

$$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n (\ln a)^n};$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots\times$$

$$\times\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$$ (при целом m и $n>m$ производная n-го порядка равна 0);

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)^{(n)} = (-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots\times$$

$$\times\ (m+n-1)\frac{1}{x^{m+n}};$$

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1}{m^n}(m-1)(2m-1)\ldots\times$$

$$\times\ldots[(n-1)\,m-1]\frac{1}{\sqrt[m]{x^{mn-1}}};$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + uv^{(n)}$$ (формула Лейбница);

$(u^v)' = vu^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$ (u и v — две функции одного аргумента).

$$d(u + v - w) = du + dv - dw;$$

$$d(uv) = v\,du + u\,dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Примеры: 1) $(2^{\sin^2 x})' = 2^{\sin^2 x} \ln 2\,(\sin^2 x)' = 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2 \sin x \cos x = 2^{\sin^2 x} \ln 2 \sin 2x$;

2) $y = x^{\sin x}$; логарифмируем: $\ln y = \sin x \ln x$; дифференцируем полученное равенство: $\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$, отсюда $y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$; этот прием известен как метод логарифмического дифференцирования;

3) $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$; $\frac{dy}{dt} = a \cos t$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t$; $\frac{d^2y}{dt^2} = -a \sin t$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) - a \cos t(-a \cos t)}{(-a \sin t)^3} = -\frac{1}{a \sin^3 t}$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет в каждой внутренней точке этого отрезка конечную производную $f'(x)$, а на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$. Тогда между a и b найдется такое число c, что $f'(c) = 0$.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$, удовлетворяющей указанным условиям, существует точка с абсциссой $x = c$, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.

Формулы конечных приращений. Формула Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c),$$

где $a < c < b$;

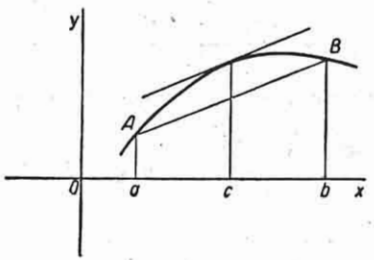
Формула Коши:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где $a < c < b$.

Предполагается, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, имеют конечные первые производные в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$ и $\varphi'(x)$ не обращается в нуль ни в одной из точек внутри отрезка $[a, b]$.

Геометрически формулы конечных приращений означают, что на кривой,



Фиг. 5. Геометрическое истолкование формул конечных приращений.

заданной уравнением $y = f(x)$ или уравнениями $y = f(t)$, $x = \varphi(t)$, существует точка с абсциссой $x = c$, в которой касательная к кривой параллельна хорде, соединяющей точки с абсциссами $x = a$, $x = b$ (фиг. 5).

Формула Тэйлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x - a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

где $R_n = \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}[a + \theta(x - a)]$

(остаточный член в форме Лагранжа), причем $0 < \theta < 1$;

$$R_n = \frac{(x - a)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[a + \theta(x - a)]$$

(остаточный член в форме Коши), причем $0 < \theta < 1$;

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x-a} f^{(n)}(x-t)\,t^{n-1}dt$$

(интегральная форма остаточного члена).

Формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

где $R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$ (остаточный член в форме Лагранжа);

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta x)$$

(остаточный член в форме Коши);

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x} f^{(n)}(x-t)\,t^{n-1}dt$$

(интегральная форма остаточного члена).

Формулы Тэйлора и Маклорена позволяют вычислять приближенно значения функции $f(x)$; для этого суммируют первые n слагаемых правой части и отбрасывают остаточный член R_n, точное значение которого неизвестно. Величина R_n оценивается путем замены неизвестного значения $f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ или значения подинтегральной функции максимальным по модулю значением этих функций, принимаемым ими в промежутке изменения аргумента.

Пример. Вычислить ln 1,01 с семью верными десятичными знаками.

По формуле Тэйлора:

$$\ln(x+h) = \ln x + \frac{h}{1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{h^3}{3!}\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right) + \frac{h^4}{4!}\cdot\left(-\frac{6}{x^4}\right) + \ldots + R_n,$$

где

$$R_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}\int_0^h \frac{t^{n-1}dt}{(x+h-t)^n}.$$

Так как t изменяется от 0 до h, то $h - t \geqslant 0$,

а потому $|R_n| < \int_0^h \frac{t^{n-1}dt}{x^n} = \frac{1}{x^n}\int_0^h t^{n-1}dt = \frac{1}{n}\left(\frac{h}{x}\right)^n$.

Полагая $x = 1$, $h = 0{,}01$, получим $|R_n| < \frac{1}{n}(0{,}01)^n$.

Последнее выражение становится меньше, чем $0{,}5\cdot10^{-8}$ при $n = 4$, поэтому берем четыре члена разложения:

$$\ln 1{,}01 = \ln 1 + \frac{0{,}01}{1} - \frac{0{,}01^2}{2} + \frac{0{,}01^3}{3} \approx 0{,}0099503.$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Если $f(a) = \varphi(a) = 0$ или $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к бесконечности при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

при условии существования предела в правой части равенства (правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

В случае, когда $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ или когда $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ стремятся при $x \to a$ к бесконечности, то $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, если он существует, и т. д.

Правило применяется и тогда, когда ищется предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при стремлении аргумента x к бесконечности, если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ при этом одновременно стремятся к бесконечности либо к нулю.

Применением этого правила могут быть раскрыты неопределенности видов $\infty - \infty$ (предварительно преобразуем так:

$$f(x) - \varphi(x) = \left[\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] : \frac{1}{f(x)\varphi(x)}\Big)$$

и $0\cdot\infty$ (предварительно преобразуем так:

$$f(x)\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}\Big).$$

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 приводятся к предыдущему виду при помощи логарифмирования: если $y = f(x)^{\varphi(x)}$, то $\ln y = \varphi(x)\ln[f(x)]$. Если будет найден предел логарифма рассматриваемой величины, то последующее потенцирование приведет к раскрытию и этого рода неопределенностей.

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 4x^2+e^{x^2}\cdot 2}{-\cos x}=-2.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x^2}}:\dfrac{1}{x^2}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}:\frac{-2}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}x^x;\ \ln(x^x)=x\ln x;\ \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=$

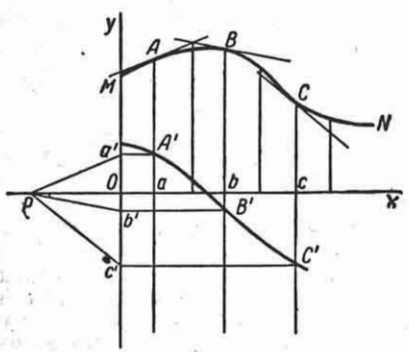
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}(-x)=0;$$

$$\lim_{x\to 0}x^x=e^0=1.$$

ГРАФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Построение по графику функции $y=f(x)$ графика ее производной $y'=f'(x)$ называется *графическим дифференцированием* и выполняется следующим образом.

Пусть имеем график функции $y=f(x)$ (кривая $MABCN$ на фиг. 6).



Фиг. 6. Графическое дифференцирование.

Разобьем проекцию кривой на ось Ox на столь малые отрезки, чтобы соответствующие части кривой по возможности мало отличались от прямолинейных отрезков. Эти элементарные отрезки оси Ox не должны быть обязательно равными; их следует брать меньшими в тех частях, где функция изменяется быстрее. Проведем ординаты aA, bB,..., соответствующие серединам a, b... всех элементарных отрезков. Затем, отметив на горизонтальной оси полюс P на расстоянии $OP=1$, станем проводить через него прямые, параллельные касательным к заданной кривой в точках A, B,... Наконец, через точки пересечения этих новых прямых с осью Oy (a', b',...) проведем прямые, параллельные оси Ox, до пересечения с соответствующими ординатами (или их продолжениями) в точках A', B',... Кривая, соединяющая эти точки, и будет искомой.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Функция $z=f(x,\ y)$ непрерывна в точке $(x_0,\ y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)=f(x_0,\ y_0).$$

Функция от многих переменных при фиксированных значениях всех независимых переменных, кроме одной, может рассматриваться как функция от этой одной переменной.

Ее производная по этой переменной называется *частной производной* функции от многих переменных.

Первые частные производные функции $z=f(x,\ y)$ обозначаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,\ y)=$$

$$=f'_x(x,\ y)=f'_1(x,\ y)=$$

$$=f_x(x,\ y)=D_xf(x,\ y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,\ y)=$$

$$=f'_y(x,\ y)=f'_2(x,\ y)=$$

$$=f_y(x,\ y)=D_yf(x,\ y).$$

При дифференцировании первых частных производных получаются четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,\ y)=f_{xx}(x,\ y)=$$

$$=f''_{11}(x,\ y)=D^2_{xx}f(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f''_{xy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = f''_{12}(x, y) = D^2_{xy} f(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx}(x, y) = f_{yx}(x, y) = f''_{21}(x, y) = D^2_{yx} f(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f''_{22}(x, y) = D^2_{yy} f(x, y).$$

Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны, то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

При непрерывности частных производных n-го порядка значение смешанных производных того же порядка зависит от числа дифференцирований по каждой из независимых переменных, но не зависит от порядка дифференцирования.

Пример. $z = x^y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)\,x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

Для производных 1-го и 2-го порядка от функции $z = f(x, y)$ употребляются часто обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* (x_0, y_0), если ее полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ может быть представлено в форме $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$, где A, B — постоянные; Δx, Δy — произвольные приращения аргументов; $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Линейная часть приращения дифференцируемой функции, являющаяся главной его частью, обозначается посредством dz и называется *полным дифференциалом* функции $f(x, y)$. Таким образом, $\Delta z = dz + \varepsilon\rho$.

Если функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то постоянные A, B всегда оказываются равными частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в этой точке; следовательно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

В соответствии с определением дифференциала

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Выражения $\frac{\partial z}{\partial x}\,dx$, $\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ называются *частными дифференциалами*; таким образом, полный дифференциал функции есть сумма ее частных дифференциалов.

Пример. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Если $z = f(x, y)$, причем $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ (формула *полной производной* от сложной функции). В частности, если $z = f(x, y)$, а $y = \varphi(x)$, то $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Формулы, аналогичные приведенным выше, имеют место для функций многих переменных с любым числом независимых переменных.

Полным дифференциалом 2-го порядка функции $f(x, y)$ называется полный дифференциал от ее полного дифференциала 1-го порядка. Так,

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Полным дифференциалом n-го порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка.

При последовательном составлении дифференциалов более высокого порядка приращения dx, dy, dz независимых переменных x, y, z считаются постоянными.

Выражение дифференциала n-го порядка для функции $u = f(x, y, z)$ может

быть представлено *символическим равенством* вида

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n f,$$

означающим, что после формального возведения в n-ю степень трехчлена, стоящего в скобках (при этом символы ∂, dx, dy, dz рассматриваются как некоторые количества), следует затем полученную таким способом дифференциальную операцию применить к функции f.

Частные производные сложной функции. Если $w = f(x, y, z)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Пример. $w = x^2 + y^2 + z^2$; $x = uv$; $y = e^{uv}$; $z = \sin(uv)$; $\frac{\partial w}{\partial u} = 2xv + 2yve^{uv} + 2zv\cos(uv)$;

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 2xu + 2yue^{uv} + 2zu\cos(uv).$$

Полный дифференциал сложной функции. Если функции $w = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y, z)$, $v = \psi(x, y, z)$ дифференцируемы, то $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$, где полные дифференциалы функций u и v

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz.$$

Полные дифференциалы 2-го и более высоких порядков сложной функции $w = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y, z)$, $v = \psi(x, y, z)$, определяются последовательно как дифференциалы от дифференциалов; при этом полные дифференциалы любого порядка функций u и v рассматриваются как переменные, зависящие от x, y, z. Символическая формула для дифференциала любого порядка

$$d^n w = \left(\frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv\right)^n f$$

справедлива как в том случае, когда u и v — независимые переменные, так и в том случае, когда они — линейные функции независимых переменных. Если же du и dv нельзя считать постоянными, то символическая формула уже не будет справедливой, и выражение для дифференциала n-го порядка будет более сложным.

Пример. Пусть $w = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Тогда

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv;$$

$$d^2 w = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2 v.$$

Формула конечных приращений для функции нескольких переменных:

$$F(x+h, y+k, z+l) - F(x, y, z) = h\cdot F'_x(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l) + k\cdot F'_y(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l) + l\cdot F'_z(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l);$$

$$(0 < \theta < 1),$$

т. е. полное приращение функции при переходе от точки M к точке M' равно полному дифференциалу функции, вычисленному в некоторой промежуточной точке отрезка, соединяющего точки M и M'.

Формула Тэйлора для функции двух переменных:

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x, y) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F(x, y) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} F(x, y) + R_n,$$

где R_n — остаточный член;

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(x+\theta h, y+\theta k); \quad 0 < \theta < 1.$$

Другая форма:

$$\Delta F(x, y) = dF(x, y) + \frac{1}{2!} d^2F(x, y) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} d^{(n-1)} F(x, y) + \frac{1}{n!} d^{(n)} F(x + \theta h, y + \theta k).$$

Аналогичные формулы имеют место для функций любого числа переменных.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если неявная функция y одного независимого переменного x задана уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

Если $f(x) = \varphi(y)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\varphi'(y)}$.

Если функция $z(x, y)$ задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ определяет z как неявную функцию x и y. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

Если несколько переменных связаны уравнениями, число которых меньше числа переменных, то, вообще говоря, можно рассматривать любые m из этих переменных как неявные функции остальных.

Пусть неявные функции $y_1, \ldots, y_m$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ определяются как решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m) &= 0; \\ F_2(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m) &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Тогда производные определяются путем решения системы уравнений

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial y_m}{\partial x_1} + \frac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0$$

относительно неизвестных $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}$; аналогичные системы уравнений составляются для определения производных по другим аргументам.

Пример. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3z - u &= 4; \\ xz + yu &= 2 \end{aligned}\right\}$$

определяет переменные z и u как функции переменных x и y. Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

1-й способ. Дифференцируем оба уравнения по x:

$$2 + 3\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Решая эти два уравнения относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y + z}{3y + x}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x - 3z}{3y + x}.$$

Подобным образом дифференцируем оба уравнения по y, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u}{3y + x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3u}{3y + x}.$$

2-й способ. Дифференцированием находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных:

$$2dx + 3dz - du = 0;$$

$$x\,dz + z\,dx + y\,du + u\,dy = 0.$$

Решая эти уравнения относительно dz и du, находим:

$$dz = -\frac{(2y+z)\,dx + u\,dy}{3y+x};$$

$$du = \frac{(2x-3z)\,dx - 3u\,dy}{3y+x}.$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2y+z}{3y+x};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{u}{3y+x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x-3z}{3y+x};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3u}{3y+x}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ *возрастает при некотором значении* x, если знак разности $(x+h)-f(x)$ одинаков со знаком h.

Функция $f(x)$ *убывает при некотором значении* x, если знак разности $f(x+h)-f(x)$ противоположен знаку h.

Те промежутки, в которых $f'(x)>0$, суть промежутки возрастания функции, а те промежутки, в которых $f'(x)<0$, суть промежутки убывания функции.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке $x=x_0$, если ее значение $f(x_0)$ в этой точке больше всех ее значений в ближайших точках, т. е. если

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0$$

при всяких h, как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

Если же выполнено условие

$$f(x_0+h)-f(x_0)>0$$

при всяких h, достаточно малых по абсолютному значению, то функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке $x=x_0$.

Максимум и минимум функции называют одним словом *экстремум* (что значит „крайняя величина").

Для нахождения тех значений x, при которых $f(x)$ имеет экстремум, следует:

1) найти $f'(x)$;

2) определить те значения $x=x_0$, при которых $f'(x)$ обращается в нуль или не существует;

3) исследовать изменение знака $f'(x)$ при переходе через эти (критические) значения x_0; если знак $f'(x)$ меняется в точке x_0 с минуса на плюс, то имеем в точке x_0 минимум; если знак $f'(x)$ меняется в этой точке с плюса на минус, то имеем максимум.

Можно также применять следующие достаточные условия экстремума функции: $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, но $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, причем n — четно. Если при этом $f^{(n)}(x_0)<0$, то функция $f(x)$ имеет при $x=x_0$ максимум; если $f^{(n)}(x_0)>0$, то функция $f(x)$ имеет при $x=x_0$ минимум. Если же при выполнении условий $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ n — нечетно, то при $x=x_0$ нет экстремума, а имеется точка перегиба (см. стр. 264).

Пример. $f(x)=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$; $f'(x)=-\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$.

При $x=0$ производная обращается в нуль, и при переходе через точку $x=0$ знак производной меняется с плюса на минус, следовательно, функция при $x=0$ имеет максимум. При $x=\pm 1$ производная имеет разрыв, и при переходе через точки $x=\pm 1$ знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, в точках $x=\pm 1$ функция имеет два минимума.

Совокупность значений $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0,\ldots,x_n=x_n^0$, при которых дифференцируемая функция многих переменных $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ может иметь экстремум (однако не обязательно его имеет), должна быть решением системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

выражающей *необходимое условие* существования экстремума.

Для отыскания тех значений x и y, при которых $f(x, y)$ действительно имеет экстремум, следует:

1) решить систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

2) полученные решения (x_i, y_i) подставить в $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ и составить *дискриминант*

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix};$$

если $\Delta > 0$, то $f(x, y)$ имеет максимум при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ и минимум при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$; если $\Delta < 0$, то $f(x, y)$ не имеет экстремума при исследуемых значениях аргументов. Если же $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай; тогда нужно исследовать функцию $f(x, y)$ при значениях аргументов, близких к (x_i, y_i), непосредственно убеждаясь, имеет ли здесь место максимум или минимум, или ни то, ни другое.

Пример. Точки возможных экстремумов функции

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

находятся путем решения системы уравнений:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y = 0.$$

Система имеет четыре решения: 1) $x = 0$; $y = 0$; 2) $x = -\frac{5}{3}$; $y = 0$; 3) $x = -1$; $y = 2$; 4) $x = -1$; $y = -2$.

Так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2y$, то величина Δ в двух первых точках положительна (экстремум), а в третьей и четвертой — отрицательна (экстремума нет). В первой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, и функция имеет минимум, а во второй точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, и функция имеет максимум.

Для нахождения наибольшего значения функции, заданной в некоторой области, надо найти ее максимумы внутри области и сравнить их со значениями на контуре. Наибольшее из всех этих значений и будет *наибольшим значением функции в данной области*. Аналогично находится и наименьшее значение функции в данной области.

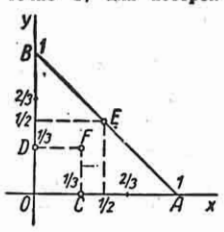
Пример. На плоскости дан треугольник OAB (фиг. 7), образованный осями координат и прямой $x + y - 1 = 0$. Найти такую точку треугольника, для которой сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника была бы наименьшей. Вершины A и B имеют координаты (1,0) и (0,1). Сумма квадратов расстояний переменной точки (x, y) до вершин треугольника будет $z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$.

Приравнивая нулю частные производные 1-го порядка, получим $x = y = \frac{1}{3}$; этим значениям соответствует минимум $z = {}^4/_3$. Исследуем теперь значения z на контуре треугольника. Для исследования z на стороне OA надо в выражении для z положить $y = 0$:

$$z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1,$$

причем x может меняться на отрезке [0,1]. Убеждаемся, что z на стороне OA принимает наименьшее значение $z = {}^5/_3$ в точке C, для которой $x = {}^1/_3$. Точно так же и на стороне OB наименьшее значение z будет равно ${}^5/_3$ и достигается в точке D, для которой $y = {}^1/_3$. Для исследования значений z на стороне AB надо в выражении z положить $y = 1 - x$ (согласно уравнению прямой):

$$z = 3x^2 + 3(x-1)^2,$$



Фиг. 7. К примеру нахождения наибольшего значения функции в некоторой области.

причем x может меняться на отрезке [0,1]. В этом случае наименьшее значение z будет $z = {}^3/_2$ и достигается в точке E, для которой $x = y = {}^1/_2$. Сравнивая возможные наименьшие значения функции ${}^4/_3$, ${}^5/_3$, ${}^3/_2$, видим, что наименьшее значение $z = {}^4/_3$ достигается в точке $F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Если разыскивается экстремум функции нескольких переменных, которые не являются независимыми, но связаны между собой одним или несколькими уравнениями (число уравнений меньше числа переменных), то говорят об *относительном* (или *условном*) экстремуме. При решении задачи пользуются *методом неопределенных множителей*.

Пусть требуется найти экстремум функции $f(x, y, z)$ при добавочных условиях: $\varphi(x, y, z) = a$, $\psi(x, y, z) = b$, где a и b — постоянные. Составим функцию

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z),$$

где λ и μ — неопределенные множители.

Необходимые условия экстремума функции $f(x, y, z)$ выражаются системой уравнений

$$\varphi = a;\ \psi = b;\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Пусть совокупность чисел x_0, y_0, z_0, λ_0, μ_0 получена при решении указанной системы. Если при любых приращениях dx, dy, dz, удовлетворяющих равенствам $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$, знак полного дифференциала 2-го порядка функции $F(x, y, z)$ сохраняется положительным, то в точке (x_0, y_0, z_0) функция имеет минимум; если знак дифференциала 2-го порядка сохраняется отрицательным, то функция в этой точке имеет максимум.

Пример. **Найти** такие точки на окружности $x^2+y^2=2a^2$, произведения координат которых достигают максимума или минимума.

В этом случае $z=xy$, $F=xy+\lambda(x^2+y^2)$, и система уравнений $\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y=0$, $\varphi=x^2+y^2=2a^2$ имеет решения:

1) $x=a$; $y=a$; $\lambda=-\frac{1}{2}$;

2) $x=a$; $y=-a$; $\lambda=\frac{1}{2}$;

3) $x=-a$; $y=a$; $\lambda=\frac{1}{2}$;

4) $x=-a$; $y=-a$; $\lambda=-\frac{1}{2}$.

В первой и четвертой точках функция достигает условного максимума, так как

$$d^2F=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2x}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2=$$
$$=2\lambda dx^2+2dx\,dy+2\lambda dy^2,$$

а из соотношения $\varphi=x^2+y^2=2a^2$ получаем $d\varphi=2x\,dx+2y\,dy=0$, откуда в данных случаях имеем $dx=-dy$; поэтому

$$(d^2F)_{\lambda=-\frac{1}{2}}=-4dx^2<0.$$

Во второй и третьей точках $(d^2F)_{\lambda=\frac{1}{2}}=4dx^2>0$ (так как соотношение $d\varphi=2x\,dx+2y\,dy=0$ дает $dx=dy$), следовательно, функция достигает условного минимума.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ СХОДИМОСТИ

Выражение $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$, составленное из членов числовой последовательности, называется *сходящимся числовым рядом*, если существует предел n-й *частичной суммы* $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\ldots+u_n$ при безграничном увеличении числа n ее членов. В противном случае ряд называется *расходящимся*. Предел частичной суммы $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k$ называется *суммой ряда*.

Необходимый и достаточный признак сходимости Коши. Ряд сходится в том и только в том случае, если при любом наперед заданном $\varepsilon>0$ можно найти такое число n, что при произвольном целом m будет иметь место неравенство $|u_{n+1}+\ldots+u_{n+m}|<\varepsilon$. Если $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$, то ряд расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, сходится, то и данный ряд сходится и называется *абсолютно сходящимся* рядом.

Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно перемножать как конечные суммы (распределительный закон); члены их можно произвольно переставлять (переместительный закон) и группировать (сочетательный закон), не нарушая этим сходимости ряда и не изменяя его суммы. В частности, всеми этими свойствами обладают сходящиеся ряды с положительными членами.

Если некоторый знакопеременный ряд сходится, но ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, расходится, то данный ряд называется *условно сходящимся*. Изменение порядка его членов может привести к изменению суммы ряда и даже к превращению его в расходящийся ряд.

Существуют достаточные признаки, по которым можно обнаружить сходимость или расходимость данного ряда.

Теоремы сравнения. Сравниваются два ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$. 1) Если для всех $n>N$ (N — некоторое постоянное) выполняется неравенство $|u_n|\leqslant|cv_n|$, где c — любое число, не зависящее от n, то из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда. 2) Если существует конечный $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{|v_n|}=K\neq 0$ (причем $|v_n|\neq 0$), то оба ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Ряды для сравнения:

$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n$ — сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\geqslant 1$;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ — сходится, если $k>1$, и расходится, если $k\leqslant 1$.

При $k=1$ получается *гармонический* ряд:

$1+{}^1/_2+{}^1/_3+{}^1/_4+\ldots$ (расходится).

Признак сходимости и расходимости Даламбера. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$; ряд расходится, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$; в случае, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$ и при любом n отношение $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geqslant 1$, ряд расходится; в остальных случаях, когда $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 1$, требуется дополнительное исследование для того, чтобы судить о сходимости ряда.

Признак Коши. Если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится; если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1,$$

то ряд расходится; если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$$

и $\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1$ при любом n,

то ряд расходится. Во всех прочих случаях, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1,$$

для суждения о сходимости ряда требуется дополнительное исследование.

Интегральный признак. Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывная и убывающая функция для всех x, бо́льших некоторого значения $x = a$, и $|u_n| = f(n)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, если $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, и расходится, если интеграл расходится (см. стр. 175).

Признак В. П. Ермакова *. Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывная и убывающая функция для всех x, бо́льших некоторого значения $x = a$, и $|u_n| = f(n)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, если $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1$, и расходится, если этот предел > 1.

Признак Лейбница (для знакочередующихся рядов). Ряд $|u_1| - |u_2| + |u_3| - |u_4| + \ldots$ сходится, если: 1) $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant 1$ при любом n и 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Сумма ряда $S \leqslant u_1$.

Примеры:

1) $a + a^4 + a^9 + a^{16} + \ldots + a^{n^2} + \ldots$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| < 1 \\ \infty, & \text{„ } |a| > 1 \end{cases}$$

Следовательно, ряд сходится, и притом абсолютно, для $|a| < 1$, расходится для $|a| > 1$. При $a = \pm 1$ ряд расходится, так как $|u_n|$ не стремится тогда к нулю.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$, где k—любое число больше нуля (при $k \leqslant 0$ ряд, очевидно, расходящийся). Здесь

$$f(n) = \frac{1}{n^k}; \quad f(x) = \frac{1}{x^k}.$$

По признаку Ермакова

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot \frac{1}{e^{kx}}}{\frac{1}{x^k}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } k < 1 \\ 0, & \text{„ } k > 1. \end{cases}$$

По интегральному признаку

$$J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} \begin{cases} \frac{1}{1-k} x^{1-k} \Big|_1^{\infty} & (k \neq 1) \\ \ln x \Big|_1^{\infty} & (k = 1). \end{cases}$$

Отсюда ясно, что

$$J = \begin{cases} \infty, & \text{если } k < 1; \\ \frac{1}{k-1}, & \text{„ } k > 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд будет сходящимся, если $k > 1$, и расходящимся, если $k \leqslant 1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

Так как $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то ряд сходится, но сходится

* В. П. Ермаков — профессор Киевского университета и член-корреспондент Академии наук. Свой признак он опубликовал в „Математическом сборнике" в 1870 г.

условно, так как ряд $1+{}^1/_2+{}^1/_3+{}^1/_4+\ldots$ расходится.

Если принять сумму данного ряда равной $1-{}^1/_2+{}^1/_3-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$, то отброшенный остаточный член выражается бесконечным рядом $R_n=(-1)^n\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\ldots\right]$, причем $|R_n|<\frac{1}{n+1}$. Итак, в этом случае погрешность не превышает $\frac{1}{n+1}$.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ; РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Если задана бесконечная последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots$, $f_n(x),\ldots$, обладающая тем свойством, что при любом фиксированном значении аргумента $x=x_1$ на некотором отрезке $[a,\ b]$ числовой ряд $f_1(x_1)+f_2(x_1)+\ldots+f_n(x_1)+\ldots$ сходится, то выражение $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$ называется сходящимся на отрезке $[a,\ b]$ *функциональным рядом*, а $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=f(x)$ — его *суммой*.

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a,\ b]$, если при любом заданном $\varepsilon>0$ можно указать такое целое число N, *не зависящее* от x, что при $n>N$ неравенство $|R_n(x)|=|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\ldots|<\varepsilon$ будет иметь место *для любого значения* x на отрезке $[a,\ b]$.

Сумма равномерно сходящегося на отрезке $[a,\ b]$ функционального ряда, члены которого $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots$ являются непрерывными функциями, представляет непрерывную функцию $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ на том же отрезке.

Если ряд $f_1(x)+f_2(x)+\ldots$ сходится равномерно на отрезке $[a,\ b]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ (т. е. ряд можно почленно интегрировать).

Если ряд $f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots$ сходится равномерно на отрезке $[a,\ b]$, то $\frac{d}{dx}[f(x)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\ldots+a_n(x-\alpha)^n+\ldots,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ и α — постоянные; в частности, может быть $\alpha=0$.

Степенной ряд сходится *абсолютно* для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-\alpha|<\rho$, где ρ — *радиус сходимости* степенного ряда, который определяется по формулам

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|};$$

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

На границах промежутка сходимости $(\alpha-\rho,\ \alpha+\rho)$ ряд может сходиться или расходиться. Всякий степенной ряд с радиусом сходимости $\rho>0$ есть равномерно сходящийся на любом отрезке, принадлежащем промежутку его сходимости.

Пример. Ряд $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ имеет $\frac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, т. е. $\rho=1$, и ряд сходится абсолютно для $-1<x<+1$; при $x=-1$ ряд сходится условно, а при $x=1$ ряд расходится.

Если при безграничном увеличении числа членов формулы Тэйлора или формулы Маклорена остаточный член R_n стремится к нулю в некотором промежутке $(\alpha,\ \beta)$, то степенной ряд

$$f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\ldots$$

сходится к функции $f(x)$ в этом промежутке:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Разложения некоторых функций в степенные ряды:

1) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n + \ldots$

Разложение имеет место для $|x|<1$; ряд, стоящий в правой части равенства, называется *биномиальным*; поведение его на концах $x=\pm 1$ промежутка его сходимости определяют по таблице

$x=1$	$\alpha > 0$	Абсолютно сходится
	$-1 < \alpha < 0$	Сходится условно
	$\alpha \leqslant -1$	Расходится
$x=-1$	$\alpha > 0$	Абсолютно сходится
	$\alpha < 0$	Расходится

2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots (-1 < x < +1)$;

3) $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots (x > 1 \text{ и } x < -1)$;

4) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots =$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots (-1 \leqslant x \leqslant +1)$;

5) $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 -$

$- \ldots (-1 \leqslant x \leqslant +1)$;

6) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots = 1 - \frac{1}{2}x +$

$+ \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \ldots (-1 < x \leqslant +1)$;

7) $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 - \frac{91}{729}x^5 + \ldots (-1 < x \leqslant +1)$;

8) $\sqrt[q]{(1+x)^p} = 1 + \frac{p}{q}x + \frac{p(p-q)}{q\cdot 2q}x^2 + \frac{p(p-q)(p-2q)}{q\cdot 2q\cdot 3q}x^3 + \ldots,$

где $p > 0$ и $q > 0$ $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$;

9) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$;

10) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$;

11) $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots (a > 0)$;

12) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots (-1 < x \leqslant +1)$;

13) $\ln(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)(-1\leqslant x<+1)$;

14) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)(-1<x<+1)$;

15) $\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots\right)$ $(x<-1$ и $x>+1)$;

16) $\ln x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right\}(x>0)$;

17) $\ln x = (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\ldots(0<x\leqslant 2)$;

18) $\ln x = \frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\ldots\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$;

19) $\ln(a+x) = \ln a + 2\left\{\frac{x}{2a+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5+\ldots\right\}$
$(a>0;\ x>-a)$;

20) $\sin x = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots$;

21) $\cos x = 1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots$;

22) $\operatorname{tg} x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$;

23) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\frac{1}{4725}x^7-\ldots(|x|<\pi$, кроме значения $x=0)$;

24) $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|<1)$;

25) $\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|\leqslant 1)$;

26) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots$;

27) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots$;

28) $\operatorname{th} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17}{315}x^7+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$;

29) $\operatorname{Arsh} x = x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|<1)$;

30) $\operatorname{Arth} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots(|x|<1)$.

ГЛАВА VII

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Если $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x)$ называется *первообразной* или *примитивной* для функции $f(x)$. Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым. Выражение $F(x) + C$, из которого можно получить любую первообразную для $f(x)$, придавая постоянному C определенные значения, называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, т. е. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная от $f(x)$;

C — *произвольная постоянная*; $f(x)$ — *подинтегральная функция*; $f(x)\,dx$ — *подинтегральное выражение*; $\int$ — **знак** интеграла.

Основные свойства неопределенного интеграла:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x);$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, если A — постоянная;

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx =$$

$$= \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

Таблица основных интегралов (постоянная интегрирования C везде опущена и подразумевается)

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x$$

$$\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x$$

$$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} =$$

$$= -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$$

* См. литературу на стр. 349—350 [31], [34], [35], [36], [40], [87].

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}$$

(для $|x|<|a|$)

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}$$

(для $|x|<|a|$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$$

(для $|x|>|a|$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

(для $|x|>|a|$)

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод непосредственного интегрирования состоит в непосредственном применении таблицы интегралов, для чего в случае необходимости подынтегральное выражение предварительно подвергают некоторым преобразованиям. При этом руководствуются следующим.

1) Если возможно, представляют подынтегральную функцию как сумму нескольких функций, от которых интегралы уже известны.

2) Если известен $\int f(x)\,dx = F(x)$, то

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax);$$

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b);$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

3) Если подынтегральное выражение — дробь, числитель которой есть дифференциал знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|.$$

4) Если подынтегральная функция есть произведение двух функций, из которых одна может быть представлена как степень функции, производной от которой является другая, то применяют формулу

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}.$$

В случае необходимости вводят так называемый поправочный коэффициент, пользуясь правом выносить (или вводить) постоянный множитель за знак интеграла.

Примеры.

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

2) $\int e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C.$

3) $\int \frac{x^2dx}{3x^3+5} = \frac{1}{9}\ln|3x^3+5| + C.$

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$

Метод подстановки состоит в том, что введением новой переменной интегрирования стремятся заменить данный интеграл таким, метод интегрирования

которого уже известен; этот метод основывается на формуле

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi[t]$.

Примеры.

1) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left| x = \frac{1}{t};\ dx = -\frac{dt}{t^2} \right| =$$
$$= -\int \frac{t^2 t\,dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = -\sqrt{1+t^2} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

2) $$\int \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2} = \left| 1+x^2 = z;\ 2x\,dx = dz \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(z-1)\,dz}{z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} -$$
$$- \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2z} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

Метод интегрирования по частям состоит в применении формулы $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Примеры.

1) $I = \int x \sin x\,dx$; полагаем $x = u$; $\sin x\,dx = dv$; тогда $dx = du$; $\int \sin x\,dx = -\cos x = v$; применяя формулу, получаем $I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.

2) $I = \int \ln x\,dx$; полагаем $u = \ln x$; $dv = dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$, поэтому $I = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

Обратные тригонометрические функции интегрируются так же.

3) $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$; полагаем $u = e^{ax}$; $dv = \cos bx\,dx$; тогда $du = ae^{ax}dx$, $v = \frac{\sin bx}{b}$, следовательно, $I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$; полагая еще раз $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$, получим $I = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$

или

$$I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I,$$

откуда

$$I = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Первообразная любой рациональной функции является элементарной функцией. Чтобы найти ее, следует сделать следующее.

1) Разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочленов (если степень числителя не ниже степени знаменателя) и представить рациональную функцию как сумму многочлена и правильной алгебраической дроби.

2) Найти все корни знаменателя правильной алгебраической дроби и разложить знаменатель на вещественные линейные и квадратные множители (см. стр. 119); каждому вещественному корню кратности m в знаменателе будет соответствовать линейный множитель вида $(x-a)^m$; каждой паре сопряженных комплексных корней кратности n в знаменателе будет соответствовать квадратный множитель вида $(x^2+px+q)^n$.

3) Представить правильную алгебраическую дробь в виде суммы так называемых элементарных дробей первого и второго типа, т. е. выражений вида

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} \text{ и } \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k},$$

где A_k, M_k, N_k — постоянные, пока еще не известные. Дроби первого типа появляются при наличии вещественных корней у знаменателя, причем каждому вещественному корню кратности m будет в сумме элементарных дробей соответствовать сумма из m дробей

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m}.$$

Дроби второго типа появляются при наличии сопряженных комплексных корней у знаменателя, причем каждой паре сопряженных корней кратности n будет соответствовать сумма из n дробей

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{M_n x + N_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

4) Найти числа A_k, M_k, N_k, для чего можно применить метод неопределенных коэффициентов, состоящий в следующем: приводят все элементарные дроби к общему знаменателю и приравнивают числитель полученной дроби числителю данной дроби, расположив оба числителя по степеням x; сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получают систему уравнений с неизвестными коэффициентами A_k, M_k, N_k, которые и определяются. После этого заданная правильная алгебраическая дробь окажется разложенной на элементарные дроби, и интегрирование правильной дроби сведется к нахождению интегралов

$$\int \frac{dx}{x-a}; \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m};$$

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q}; \quad \int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n},$$

где m и n — натуральные числа.

5) Интегрирование многочленов и дробей первого типа производится непосредственно:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C;$$

$$(m \neq 1)$$

6) $$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} +$$

$$+ \int \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q};$$

чтобы взять интеграл $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, преобразуем квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе, в двучлен: $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$; так как корни знаменателя — комплексные, то $q - \frac{p^2}{4} > 0$; поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

7) $$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^n} +$$

$$+ \int \frac{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Первый интеграл подстановкой $x^2 + px + q = u$ преобразуется в табличный: $\frac{M}{2}\int \frac{du}{u^n}$. Второй интеграл подстановкой $u = 2x + p$ приводится к интегралу вида

$$\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}} -$$

$$- \frac{1}{k^2}\int \frac{u^2\,du}{(u^2+k^2)^n}; \quad (k^2 = 4q - p^2).$$

При помощи интегрирования по частям второй интеграл правой части равенства приводится к первому, после чего удается установить рекуррентное соотношение

$$\int \frac{du}{(u^2+k^2)^n} = \frac{u}{2k^2(n-1)(u^2+k^2)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n-3}{2k^2(n-1)}\int \frac{du}{(u^2+k^2)^{n-1}},$$

позволяющее последовательно уменьшать показатели степени и в конечном итоге свести задачу к отысканию интеграла

$$\int \frac{du}{u^2+k^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{u}{k} + C.$$

Примеры.

1) $I = \int \frac{2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx.$

Делим числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+x^4-3x^3+2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}=2x^2+7x+15+\frac{23x^2-36x+14}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

Разлагаем знаменатель дроби на множители и полагаем

$$\frac{23x^2-36x+14}{(x-1)^3}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}.$$

Приводим правую часть к одному знаменателю и сравниваем числители:

$$23x^2-36x+14=A_1+A_2(x-1)+A_3(x-1)^3=A_3x^3+(A_2-2A_3)x+(A_1-A_2+A_3).$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$A_3=23;\ A_2-2A_3=-36;\ A_1-A_2+A_3=14;$$

отсюда

$$A_3=23;\ A_2=10;\ A_1=1.$$

Имеем

$$I=\int(2x^2+7x+15)\,dx+\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{10dx}{(x-1)^2}+\int\frac{23dx}{x-1}=\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+15x-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{10}{x-1}+23\ln|x-1|+C.$$

2) $I=\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

Полагаем

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3},$$

откуда $x=A(x+2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x+2)$. Написанное равенство справедливо при любом значении x; полагая $x=-1$, получим $-1=-4A$; $A=1/4$; полагая $x=-2$, найдем $B=-2/5$; полагая $x=3$, найдем $C=3/20$. Теперь найдем

$$I=\int\frac{\frac{1}{4}\,dx}{x+1}+\int\frac{-\frac{2}{5}\,dx}{x+2}+\int\frac{\frac{3}{20}\,dx}{x-3}=\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{2}{5}\ln|x+2|+\frac{3}{20}\ln|x-3|+C.$$

3) $I=\int\frac{2x^4-3x^3+16x^2+8}{x(x^2+4)(2x^2+3x+2)}\,dx$.

Полагаем

$$\frac{2x^4-3x^3+16x^2+8}{x(x^2+4)(2x^2+3x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{D(4x+3)+E}{2x^2+3x+2}.$$

Отсюда

$$2x^4-3x^3+16x^2+8=A(x^2+4)(2x^2+3x+2)+Bx^2(2x^2+3x+2)+Cx(2x^2+3x+2)+Dx(4x+3)(x^2+4)+Ex(x^2+4).$$

Раскрывая скобки и группируя подобные (относительно x) члены, получим

$$2x^4-3x^3+16x^2+8=(2A+2B+4D)x^4+(3A+3B+2C+3D+E)x^3+(10A+2B+3C+16D)x^2+(12A+2C+12D+4E)x+8A.$$

Приравнивая друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x и решая полученную систему пяти уравнений, найдем: $A=1$; $B=-1$; $C=0$; $D=1/2$; $E=-9/2$.

Следовательно,

$$I=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+4}+\frac{1}{2}\int\frac{4x+3}{2x^2+3x+2}\,dx-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{2x^2+3x+2}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\ln|2x^2+3x+2|-\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}+C;$$

последний интеграл берется так:

$$\int\frac{dx}{2x^2+3x+2}=\int\frac{8dx}{16x^2+24x+16}=\int\frac{8dx}{(4x+3)^2+7}=\frac{8}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}}+C.$$

4) $I=\int\frac{2x-x^2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

Полагая

$$\frac{2x-x^2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

найдем методом неопределенных коэффициентов

$$A=-\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{4};\ C=\frac{1}{2};\ D=\frac{1}{4};\ E=\frac{1}{2};$$

$F=-1$. Следовательно,

$$I=-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\int\frac{2x-4}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Далее,

$$\int \frac{2x-4}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+1} - 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} - 4\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + 4\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл берем по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; тогда

$$v = -\frac{1}{2(x^2+1)} \text{ и } \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} +$$

$$+ \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак,

$$I = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4(x-1)} +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4(x^2+1)} -$$

$$- \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= -\frac{1}{4(x-1)} - \frac{2x+1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x-1| +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x + C.$$

Метод М. В. Остроградского. Если знаменатель дроби не удается разложить на множители, то можно определить алгебраическую часть интеграла методом Остроградского. Этот метод выгодно применять также, когда знаменатель можно разложить на множители.

Пусть $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ — правильная несократимая дробь, $D(x)$ — общий наибольший делитель знаменателя $f(x)$ и его производной $f'(x)$, а $Q(x)$ — частное от деления $f(x)$ на $D(x)$*. Тогда

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx = \frac{\omega(x)}{D(x)} + \int \frac{\omega_1(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$ — некоторые неизвестные многочлены, степень каждого из которых по крайней мере на единицу меньше степени соответствующего знаменателя. Чтобы определить их коэффициенты, дифференцируем обе части последнего равенства и получим

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{D(x)\,\omega'(x) - \omega(x)\,D'(x)}{D^2(x)} +$$

$$+ \frac{\omega_1(x)}{Q(x)}.$$

Приводя к общему знаменателю, отбрасываем его; приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем коэффициенты многочленов $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$.

Полином $Q(x)$ имеет только простые корни (см. стр. 123). Поэтому

$$\int \frac{\omega_1(x)\,dx}{Q(x)}$$

выражается при помощи логарифмических и обратных круговых функций, в то время как дробь $\frac{\omega(x)}{D(x)}$ представляет алгебраическую часть интеграла, полностью выделенную.

Пример. $I = \int \frac{3x^5 - 3x^2 + x + 1}{(x^3+x+1)^2}\,dx$. Здесь $f(x) = (x^3+x+1)^2$; $f'(x) = 2(x^3+x+1)(3x^2+1)$; $D(x) = x^3+x+1$; $Q(x) = x^3+x+1$.

По формуле Остроградского получим

$$\int \frac{3x^5 - 3x^2 + x + 1}{(x^3+x+1)^2}\,dx = \frac{A_1x^2 + B_1x + C_1}{x^3+x+1} +$$

$$+ \int \frac{A_2x^2 + B_2x + C_2}{x^3+x+1}\,dx.$$

Дифференцирование дает

$$\frac{3x^5 - 3x^2 + x + 1}{(x^3+x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x^3+x+1)(2A_1x+B_1) - (3x^2+1)(A_1x^2+B_1x+C_1)}{(x^3+x+1)^2} +$$

$$+ \frac{A_2x^2 + B_2x + C_2}{x^3+x+1}.$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получим:

$$3x^5 - 3x^2 + x + 1 = A_2x^5 + (B_2 - A_1)x^4 +$$

$$+ (A_2 + C_2 - 2B_1)x^3 + (A_1 + A_2 + B_2 - 3C_1)x^2 +$$

$$+ (2A_1 + C_2 + B_2)x + B_1 - C_1 + C_2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему шести уравнений, откуда найдем $A_1 = 0$; $A_2 = 3$; $B_1 = 2$; $B_2 = 0$; $C_1 = 2$; $C_2 = 1$.

* $D(x)$ находят *методом последовательного деления*, для чего делят $f(x)$ на $f'(x)$, затем $f'(x)$ — на первый остаток и т. д., пока деление не будет выполнено без остатка; делитель в последнем делении и будет общим наибольшим делителем $D(x)$.

Следовательно,

$$I=\frac{2(x+1)}{x^2+x+1}+\int\frac{3x^2+1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{2(x+1)}{x^2+x+1}+\ln|x^2+x+1|+C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Интегрирование иррациональных функций приводит, вообще говоря, к неэлементарным трансцендентным функциям. Лишь в некоторых случаях результат интегрирования удается выразить в элементарных функциях.

1) $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ldots\right]dx$

(R — символ рациональной функции; α, β, . . . — рациональные числа) приводится к интегралу от рациональной функции при помощи подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$, где n есть общее наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, . . .

Примеры.

а) $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$. Полагаем $\frac{1-x}{1+x}=z^2$, откуда $x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $dx=\frac{-4z\,dz}{(1+z^2)^2}$. Следовательно,

$$I=-4\int\frac{z^2dz}{(1-z^2)(1+z^2)}=$$

$$=-2\int\frac{(1-z^2)-(1+z^2)}{(1-z^2)(1+z^2)}\,dz=2\operatorname{arctg}z+$$

$$+\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$$

$$+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

б) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; полагаем $x=y^6$, откуда $dx=6y^5dy$. Тогда $I=6\int\frac{y^3dy}{1+y}$.

2) $\int R\left[x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right]dx$,

где R — символ рациональной функции, приводится к интегралу от рациональной функции при помощи одной из *подстановок Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm x\sqrt{a};$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c};$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=$$

$$=z(x-\alpha).$$

Первая подстановка употребляется в случае $a>0$, вторая — в случае $c>0$, а третья — в случае, когда корни трехчлена α и β действительны.

Пример. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Полагаем $\sqrt{4x^2+4x+3}=z-2x$, т. е. $z=2x+\sqrt{4x^2+4x+3}$. Возвышая первое равенство в квадрат, находим $x=\frac{z^2-3}{4(1+z)}$ и $dx=\frac{z^2+2z+3}{4(1+z)^2}\,dz$; тогда $\sqrt{4x^2+4x+3}=z-2x=\frac{z^2+2z+3}{2(1+z)}$ и $I=\int\frac{2dz}{z^2-3}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right|+C.$$

3) Подстановки Эйлера всегда решают задачу, однако применение их приводит к громоздким вычислениям. Поэтому отметим некоторые случаи, когда интеграл рассматриваемого вида можно взять без применения подстановок Эйлера. Так, например, $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к одному из основных интегралов (см. стр. 155) при помощи известного преобразования квадратного трехчлена (выделение полного квадрата) (см. стр. 157).

Примеры.

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}=\int\frac{\sqrt{12}\,dx}{\sqrt{60-84x-36x^2}}=$

$$=\sqrt{12}\int\frac{dx}{\sqrt{109-(6x+7)^2}}=\frac{\sqrt{12}}{6}\operatorname{arcsin}\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+$$

$$+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sin}\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C.$$

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x+5x^2}}=\int\frac{\sqrt{20}\,dx}{\sqrt{40+20x+100x^2}}=$

$$=\sqrt{20}\int\frac{dx}{\sqrt{39+(10x+1)^2}}=\frac{\sqrt{20}}{10}\ln|10x+1+$$

$$+\sqrt{20(5x^2+x+2)}|+C.$$

4) К рассмотренному интегралу сводится интеграл типа $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Если числитель не равен производной подкоренного количества, то его представляют так: $Mx+N=\frac{M}{2a}(2ax+b)+N-\frac{Mb}{2a}$, получая в скобках

производную от подкоренного количества. Затем представляют заданный интеграл как сумму двух интегралов, из которых первый берется непосредственно, а второй является интегралом рассмотренного типа:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{M}{a}\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

5) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$ и $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ можно найти так:

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

К первому интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$u = x;\quad dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}};$$

$$du = dx;\quad v = \sqrt{x^2 \pm a^2}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Аналогично берется $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

6) Интегралом *от биномиального дифференциала* (или дифференциального бинома) называют $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа. П. Л. Чебышев доказал, что такие интегралы выражаются в элементарных функциях только в следующих трех случаях: а) когда p — целое число; б) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число; в) когда $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число.

В первом случае, если p положительно, раскрывают скобки по биномиальной формуле и интегрирование выполняют непосредственно; если же p — целое отрицательное число, то подстановкой $x = z^{\mu}$, где μ — общий знаменатель дробей m и n, освобождают подинтегральную функцию от иррациональности.

Во втором случае полагают $a + bx^n = z^s$, где s — знаменатель дроби $p = \frac{r}{s}$.

В третьем случае полагают $a + bx^n = z^s x^n$.

Примеры.

а) $I = \int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$; здесь $m = \frac{1}{3}$; $n = \frac{2}{3}$; $p = \frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{3}+1}{\frac{2}{3}} = 2$ (целое); полагаем $1+3x^{\frac{2}{3}} = z^3$; тогда $I = \frac{1}{2}\int z^3(z^3-1)\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^4}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(1+3x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{\left(1+3x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}}{4}\right\} + C$.

б) $I = \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$; здесь $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-11+1}{4} - \frac{1}{2} = -3$ (целое); полагаем $1+x^4 = x^4z^2$; тогда $I = -\frac{1}{2}\int (z^2-1)^2\,dz = -\frac{z^5}{10} + \frac{z^3}{3} - \frac{z}{2} + C = -\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} + C$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1) $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — символ рациональной функции, подстановкой $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ приводится к интегралу от рациональной функции переменной u.

Если функция R — нечетная относительно $\cos x$, т. е. если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то быстрее к цели приводит подстановка $\sin x = t$.

Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то пригодна подстановка $\cos x = t$.

Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то следует пользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = u$.

Примеры.

а) $I = \int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$; положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, тогда

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2};\quad x = 2\operatorname{arctg} u;$$

$dx = \frac{2du}{1+u^2}$; следовательно, $I = \int \frac{1-u^2}{1+u^2}\, du$.

б) $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$; положим $\operatorname{tg} x = u$, откуда

$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$; $x = \operatorname{arctg} u$; $dx = \frac{au}{1+u^2}$;

следовательно, $I = \int (1+u^2)\, du$.

2) Если подинтегральная функция рациональна относительно $\sin kx$, $\cos lx$, $\operatorname{tg} px$, $\operatorname{ctg} qx$, где k, l, p, q — целые числа, то эта функция преобразуется в рациональную относительно $\sin x$, $\cos x$ при помощи формул

$$\sin mx = \binom{m}{1}\cos^{m-1} x \sin x - \binom{m}{3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \binom{m}{5}\cos^{m-5} x \sin^5 x - \ldots;$$

$$\cos mx = \cos^m x - \binom{m}{2}\cos^{m-2} x \sin^2 x + \binom{m}{4}\cos^{m-4} x \sin^4 x - \ldots$$

Если числа k, l, p и q — дробные, то нужно привести их к общему знаменателю $k = \frac{k_1}{n}$, $l = \frac{l_1}{n}$, $p = \frac{p_1}{n}$, $q = \frac{q_1}{n}$ и заменить $\frac{x}{n}$ через y, после чего функции $\sin ky$, $\cos ly$, $\operatorname{tg} py$, $\operatorname{ctg} qy$ выразятся рационально через $\sin y$, $\cos y$.

Пример.

$$I = \int \frac{\cos\frac{x}{2}\, dx}{\sin\frac{x}{3}};$$

обозначим $\frac{x}{6} = y$, тогда $dx = 6dy$ и $I = 6\int \frac{\cos 3y\, dy}{\sin 2y} =$

$$= 6\int \frac{\cos^2 y - 3\cos y \sin^2 y}{2\sin y \cos y}\, dy = 3\int \frac{\cos^2 y}{\sin y}\, dy - 9\int \sin y\, dy = 3\int \frac{1-\sin^2 y}{\sin y}\, dy - 9\int \sin y\, dy =$$

$$= 3\int \frac{dy}{\sin y} - 12\int \sin y\, dy = 3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + 12\cos y + C = 3\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{12}\right| + 4\cos\frac{x}{6}\right) + C.$$

3) $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ находят, пользуясь известными формулами тригонометрии, преобразующими произведение тригонометрических функций в сумму (стр. 96).

Вообще интеграл $\int \cos(ax+b)\cos(a_1x+b_1)\ldots\cos(a_kx+b_k)\, dx$ путем последовательного применения формулы $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$ приводится к интегралу вида $\int \sum_i \cos(A_ix + B_i)\, dx$.

4) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \sin x$ (если n нечетно) или $t = \cos x$ (если m нечетно); если же оба числа m и n положительные и четные, то нужно подинтегральную функцию выразить через тригонометрические функции кратных дуг.

Примеры: а) $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx = |\cos x = t;\ -\sin x\, dx = dt| = -\int (1-t^2)\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

б) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

в) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int 4\sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$.

5) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, d\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$; применяя этот прием, приведем интеграл при n четном к $\int dx = x$, а при n нечетном — к $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|$. Аналогично находится $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$.

Формулы приведения

$$\int \cos^m x \sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x \sin^m x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} =$$

$$= -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x};$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\,dx =$$

$$= \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x\,dx}{\sin^n x}.$$

Последовательное применение этих формул, если m и n — целые, приводит заданный интеграл к одному из следующих:

$$\int dx;\quad \int \sin x\,dx;\quad \int \cos x\,dx;\quad \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x};\quad \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x};\quad \int \sin x \cos x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x};\quad \int \frac{dx}{\sin x};\quad \int \frac{dx}{\cos x}.$$

6) Последние три интеграла проще всего взять так:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

7) $\int e^{ax} P(\sin x, \cos x)\,dx$, где $P(\sin x, \cos x)$ — полином от $\sin x$, $\cos x$, выражается при помощи элементарных функций. Произведения $\sin^m x \cos^n x$ следует представить в виде суммы синусов и косинусов кратных дуг (см. стр. 96), после чего задача сводится к отысканию интегралов $\int e^{ax} \cos nx\,dx$, $\int e^{ax} \sin nx\,dx$, которые берутся интегрированием по частям (см. стр. 156, пример 3).

8) $\int x^m e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int x^m e^{ax} \sin bx\,dx$ (I) можно найти, дифференцируя по параметру a левую и правую части равенства, определяющего интеграл предшествующего типа (дифференцирование в левой части производится под знаком интеграла).

9) Интегралы более общего вида от полиномов

$$P(x,\ e^{ax},\ \sin bx,\ \sin cx,\ \ldots,\ \ldots\cos gx,\ \cos hx,\ \ldots)$$

могут быть также выражены через элементарные функции, так как при помощи тригонометрических преобразований интеграл приводится к сумме интегралов вида (I), умноженных на некоторые постоянные коэффициенты.

$$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \ldots\right] + C;$$

(II)
$$\int P(x)\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{P'(x)}{a} - \frac{P'''(x)}{a^3} + \frac{P^{V}(x)}{a^5} - \ldots\right] - \frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

10) Интегралы от полиномов $P(x, \arcsin x)$ и $P(x, \ln x)$ при помощи подстановок $\arcsin x = t$ и $\ln x = t$ приводятся к интегралам от полиномов вида (II).

11) Пусть $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ — рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, а $\varphi(x)$ — элементарная трансцендентная функция; если функции R и φ такого рода, что первообразная функции R и производная функции $\varphi(x)$ также являются рациональными функциями от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, то интегрирование функций вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\varphi(x)$ можно, пользуясь формулой интегрирования по частям, свести к задаче об интегрировании некоторой рациональной функции от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Трансцендентными функциями подобного рода являются, например,

$$R(x, \sqrt{1-x^2})\ \arcsin x;$$

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \operatorname{arctg} x;$$

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \ln x.$$

12) Интеграл от функции вида $R(x)\sin x$, $R(x)\cos x$, $R(x)e^{ax}$, где $R(x)$ — рациональная функция, не всегда выражается через элементарные функции. Возможность выразить интеграл через элементарные функции представляется в том случае, если $R(x)$ — полином; при этом многократно применяется формула интегрирования по частям.

Если $P(x)$ — полином, то

13) Если рациональная функция R представляется суммой полинома и элементарных дробей типа $\frac{A}{(x-a)^m}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$, то, вообще говоря, интеграл типа 12 не является элементарной функцией. В том случае, когда в выражение рациональной функции входят только дроби первого типа, можно, применяя нужное число раз формулу интегрирования по частям и простейшую замену переменной, представить рассматриваемый интеграл через элементарные функции и следующие интегралы, не представимые в элементарных функциях:

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx; \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx;$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dt}{\ln t} \quad (x = \ln t).$$

Каждый из этих интегралов определяет новую трансцендентную функцию, именно:

интегральный синус

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \quad (-\infty < x < \infty);$$

интегральный косинус

$$\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (0 < x < \infty);$$

интегральный логарифм

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad (0 < x < 1).$$

Существуют таблицы значений этих функций (см. литературу, стр. 351, [159]).

14) К интегралам предыдущего типа приводятся также интегралы вида

$$\int R(\ln x)\, x^m dx;\ \int R(\arcsin x)\, x^m dx,$$

причем попрежнему буква R служит для обозначения рациональной функции; первый из интегралов приводится подстановкой $\ln x = t$, второй — подстановкой $\arcsin x = t$ и последующим применением тригонометрической формулы $2\sin u\cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ или других аналогичных формул.

15) При интегрировании иррациональных функций, не содержащих никаких других радикалов, кроме радикалов вида $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ или $\sqrt{a^2 - x^2}$, удобно пользоваться тригонометрическими подстановками.

Если подинтегральная функция не содержит никаких других радикалов, кроме $\sqrt{a^2 - x^2}$, то берется подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

Для интегралов, содержащих $\sqrt{x^2 + a^2}$, берется подстановка $x = a\operatorname{tg} t$ или $x = a\operatorname{sh} t$.

Для интегралов, содержащих $\sqrt{x^2 - a^2}$, берется подстановка $x = \dfrac{a}{\cos^2 t}$ или $x = a\operatorname{ch} t$.

Примеры:

а) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| x = a\sin t;\ dx = a\cos t\, dt \right| =$

$$= a^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}} = \left| x = \operatorname{tg} t;\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \right| =$

$$= \int \frac{dx}{\sec^3 t \cos^2 t} = \int \cos t\, dt = \sin t + C =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$$

в) $I = \int \sqrt{(x^2-1)^3}\, dx = \left| x = \operatorname{ch} t;\ dx = \operatorname{sh} t\, dt \right| =$

$$= \int \operatorname{sh}^4 t\, dt = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{ch}^2 2t\, dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2t\, dt + \frac{1}{4}\int dt = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t + 1)\, dt -$$

$$- \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{4}t = \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{3}{8}t + C;$$

так как $\operatorname{sh} 4t = 2\operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 4x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1)$, $t = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, то $I = \frac{1}{8}(2x^3 - 5x)\times$

$$\times\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}\ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(постоянная интегрирования C везде опущена и подразумевается)

Интегралы от рациональных функций

1) $$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)};\quad (n \neq -1).$$

2) $\int x^m (a+bx)^n dx$ берется почленно после разложения $(a+bx)^n$ по биномиальной формуле, если n — целое положительное.

3) Если же $m < n$ или если n — число дробное или отрицательное, а m — целое положительное, то применяется формула

$$\int x^m (a+bx)^n dx = \int x^m z^n dx = \frac{1}{b^{m+1}}\int (z-a)^m z^n dz,$$

где $(z-a)^m$ разлагается по биномиальной формуле: здесь $z = a + bx$.

4) Если m и n — целые положительные, то

$$\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^n} = \int \frac{x^m dx}{z^n} = \frac{1}{b^{m+1}}\int \frac{(z-a)^m dz}{z^n} = \frac{1}{b^{m+1}}\left[\sum_{s=0}^{m} \frac{m!\,(-a)^s\, z^{m-n-s+1}}{(m-s)!\,s!\,(m-n-s+1)}\right],$$

за исключением случая, когда $m - n - s + 1 = 0$; в последнем случае соответствующий член в квадратных скобках заменяется выражением

$$\frac{m!\,(-a)^{m-n+1}}{(m-n+1)!\,(n-1)!}\ln|z|; \quad z = a + bx.$$

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,b\,(a+bx)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$

6) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx|.$$

7) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)\,(a+bx)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)\,(a+bx)^{n-1}}\right].$$

8) $$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left[a+bx - a\ln|a+bx|\right].$$

9) $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^n} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)\,(a+bx)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bx)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)\,(a+bx)^{n-1}}\right].$$

10) $$\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^2}{2} - 2a\,(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right].$$

11) Если m и n — целые положительные, то

$$\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n} = \int \frac{dx}{x^m z^n} = \frac{-1}{a^{m+n-1}}\int \frac{\left(\frac{z}{x}-b\right)^{m+n-2}}{\left(\frac{z}{x}\right)^n}\,d\left(\frac{z}{x}\right) =$$

$$= \frac{-1}{a^{m+n-1}}\left[\sum_{s=0}^{m+n-2} \frac{(m+n-2)!\,z^{m-s-1}(-b)^s}{(m+n-s-2)!\,s!\,(m-s-1)\,x^{m-s-1}}\right],$$

за исключением случая, когда $m - s - 1 = 0$; в последнем случае член в квадратных скобках заменяется выражением

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}(-b)^{m-1}\ln\left|\frac{z}{x}\right|.$$

12) $$\int \frac{dx}{x\,(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|.$$

13) $$\int \frac{dx}{x\,(a+bx)^2} = -\frac{1}{a^2}\left[\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + \frac{bx}{a+bx}\right].$$

14) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+bx}{x} - b\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|\right].$$

15) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{1}{a^3}\left[\frac{a+bx}{x} - 2b\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| - \frac{b^2x}{a+bx}\right].$$

16) $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}\,x; \quad (ab > 0).$$

17) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left|\frac{a+x\sqrt{ab}}{a-x\sqrt{ab}}\right| = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{b}{a}}\, x; \quad (ab>0).$

18) $\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b} \ln|a+bx^2|.$

19) $\int \frac{x^2dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2}$ [см. формулу 16].

20) $\int \frac{x^3dx}{a+bx^2} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \ln|a+bx^2|.$ 21) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{[a+bx^2]}.$

22) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$ [см. формулу 16].

23) $\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{2a^2} \ln \frac{x^2}{|a+bx^2|}.$

24) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$ [см. формулу 16].

25) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{1}{2b(a+bx^2)}.$

26) $\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{x}{2b(a+bx^2)} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{a+bx^2}$ [см. формулу 16].

27) $\int \frac{x^3dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{a}{2b^2(a+bx^2)} + \frac{1}{2b^2} \ln|a+bx^2|.$

28) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^2} = \frac{1}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a^2} \ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|.$

29) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^2} = -\left[\frac{1}{ax} + \frac{3bx}{2a^2}\right]\frac{1}{a+bx^2} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{a+bx^2}$ [см. формулу 16].

30) $\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)^2} = -\left[\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2}\right]\frac{1}{a+bx^2} - \frac{b}{a^3} \ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|.$

31) $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b+cx}{\sqrt{ac-b^2}}; \quad (ac-b^2>0).$

32) $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = -\frac{1}{b+cx}; \quad (ac-b^2=0).$

33) $\int \frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln\left|\frac{cx+b-\sqrt{b^2-ac}}{cx+b+\sqrt{b^2-ac}}\right|; \quad (ac-b^2<0).$

34) $\int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^p} = \frac{1}{2(ac-b^2)(p-1)} \cdot \frac{b+cx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}} +$

$$+ \frac{(2p-3)c}{2(ac-b^2)(p-1)} \int \frac{dx}{(a+2bx+cx^2)^{p-1}}.$$

35) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right].$$

36) $$\int \frac{dx}{(x-a)^m (x-b)^n} = \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int \frac{(1-z)^{m+n-2} dz}{z^m}; \quad \left(z = \frac{x-a}{x-b}\right).$$

Интегралы от иррациональных функций

37) $$\int \sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3.$$ 38) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}.$$

39) $$\int \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{a+bx}}\, dx = \frac{2}{3b^2}(3\alpha b - 2a\beta + \beta bx)\sqrt{a+bx}.$$

40) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

41) $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|.$$

42) $$\int (x^2+a^2)^{3/2} dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

43) $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

44) $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}.$$

45) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|.$$

46) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}.$$

47) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|.$$

48) $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|.$$

49) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$$

50) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}.$$

51) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$$

52) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a \arccos \frac{a}{x}$.

53) $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3}{8}a^4 \arcsin \frac{x}{a}$.

54) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|$.

55) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}$.

56) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$.

57) $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{3/2}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}$.

58) $\int \frac{x\,dx}{(2ax-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}}$.

59) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \ln |x+a+\sqrt{2ax+x^2}|$.

60) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin \frac{x-a}{a}$.

61) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln |2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|$; $(c>0)$.

62) $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} -$

$$- \frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}} \ln |2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|; \quad (c>0).$$

63) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}$; $(c>0)$.

64) $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} +$

$$+ \frac{b^2+4ac}{8c^{3/2}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}; \quad (c>0).$$

65) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2c^{3/2}} \ln|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|$; $(c>0)$.

66) $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln[\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}]$.

67) $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}$.

68) $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}$.

69) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$.

Интегралы от трансцендентных функций

70) $\int x^n e^x dx = e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n \cdot n!]$.

71) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$. 72) $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1}$.

73) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$. 74) $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

75) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$. 76) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$.

77) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x$. 78) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x - x$.

79) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 80) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$.

81) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 82) $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

83) $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$ или $-\frac{1}{2}\cos^2 x$. 84) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \ln|\operatorname{tg} x|$.

85) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$.

86) $\int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$.

87) $\int \sin mx \sin nx\,dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}$; $[m^2 \neq n^2$; если $m^2 = n^2$ — см. формулу 75$]$.

88) $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)}$; $[m^2 \neq n^2$; если $m^2 = n^2$ — см. формулу 76].

89) $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)}$; $[m^2 \neq n^2$; если $m^2 = n^2$ — см. формулу 83].

90) $\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; $(a>b)$.

91) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}\right|$; $(a<b)$.

92) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $(a>b)$.

93) $\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}}\right|$; $(a<b)$.

94) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right)$.

95) $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$.

96) $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2}$.

97) $\int e^{ax} \sin^n bx\, dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1} bx\,(a\sin bx - nb\cos bx)}{a^2+n^2b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\sin^{n-2} bx\, dx$.

98) $\int e^{ax} \cos^n bx\, dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx\,(a\cos bx + nb\sin bx)}{a^2+n^2b^2} + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} bx\, dx$.

99) $\int x^m \sin ax\,dx = -\frac{x^m}{a}\cos ax + \frac{m}{a}\int x^{m-1}\cos ax\,dx.$

100) $\int x^m \cos ax\,dx = \frac{x^m}{a}\sin ax - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\sin ax\,dx.$

101) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$

102) $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$

103) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

104) $\int \operatorname{arcctg} x\,dx = x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

105) $\int \operatorname{Arsh} x\,dx = x\operatorname{Arsh} x - \sqrt{1+x^2}.$ 106) $\int \operatorname{Arch} x\,dx = x\operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2-1}.$

107) $\int \operatorname{Arth} x\,dx = x\operatorname{Arth} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2).$

108) $\int \operatorname{Arcth} x\,dx = x\operatorname{Arcth} x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1).$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть отрезок $[a, b]$, на котором определена некоторая функция $y = f(x)$, разбит точками $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на частичные отрезки так, что длина любого частичного отрезка меньше определенного положительного числа δ, т. е. $|x_i - x_{i-1}| < \delta$. Обозначая через ξ_i некоторое произвольное значение переменной x на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, которая называется интегральной суммой.

С уменьшением δ число частичных отрезков n увеличивается. Если существует такое число A, что разность между этим числом A и любой интегральной суммой стремится к нулю при стремлении δ к нулю, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой*, а предел A называется *определенным интегралом* от этой функции на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Основные свойства определенного интеграла

$\int_a^b Kf(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$ (K — постоянное);

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, так что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy \text{ и т. д.}$$

Теорема о среднем значении интеграла. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где

$$a \leqslant \xi \leqslant b.$$

В частном случае, если $\varphi(x) = 1$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Теорему о среднем применяют при оценке величины интеграла, не производя его вычисления. Различают *оценку сверху*, т. е. разыскание числа, которое больше заданного интеграла, и *оценку снизу*.

Пример. Найти оценку сверху для интеграла $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$. По теореме о среднем имеем

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = \sin\xi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \sin\xi\,[\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{4}\sin\xi.$$

Так как на отрезке $[0,1]$ функция $\sin x$ возрастает, то $\sin\xi < \sin 1$, следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}\sin 1.$$

Производная определенного интеграла с переменными пределами. Если $f(x)$ непрерывна, то

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\} = f(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_x^b f(t)\,dt\right\} = -\frac{d}{dx}\left\{\int_b^x f(t)\,dt\right\} = -f(x).$$

Связь определенного интеграла с неопределенным (формула Ньютона — Лейбница). Если $F'(x) = f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к отысканию для интегрируемой функции первообразной, в которую вместо аргумента подставляется сначала верхний предел, а затем нижний и из первого результата вычитается второй. Записывается это так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}.$$

Неопределенный интеграл можно представить так:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

где a произвольно.

Формула замены переменной в определенном интеграле. Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Пусть $x = \varphi(t)$, причем: 1) $\varphi(t)$ определенна и непрерывна на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) на отрезке $[\alpha, \beta]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \left| x = \frac{1}{\cos t};\right.$$

$$dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt =$$

$$= [\operatorname{tg} t - t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x\,dx =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \ln \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Интегралы от четных и нечетных функций. Функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$.

Примеры: 1) Функции $\cos x$, x^2, $x^4 + x^2 + 1$ — четные.
2) Функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $x + x^3$ — нечетные.

Если $f(x)$ — четная функция, то $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$.

Дифференцирование определенного интеграла по параметру

Если функции $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывны, то непрерывна и дифференцируема функция

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx,$$

причем

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx.$$

В общем случае, когда

$$F(\alpha) = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx,$$

имеем

$$F'(\alpha) = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx +$$

$$+ f[\varphi_2(\alpha), \alpha]\frac{d\varphi_2(\alpha)}{d\alpha} - f[\varphi_1(\alpha), \alpha]\frac{d\varphi_1(\alpha)}{d\alpha}.$$

Пример. $\frac{d}{dy}\int_{\frac{\pi}{2y}}^{y^2} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2y}}^{y^2} \cos(xy)\,dx +$

$$+ \frac{\sin y^3}{y^2}\,2y - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2y}}\left(-\frac{\pi}{2y^2}\right) = \frac{3\sin y^3}{y}.$$

Вычисление некоторых определенных интегралов может быть произведено при помощи дифференцирования определенного интеграла по параметру.

Пример. Найдем

$$I = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x}\,dx,$$

если $a > 0$, $b > 0$. Имеем

$$\frac{dI}{da} = -\int_0^1 \frac{x^{a-1}\ln x}{\ln x}\,dx =$$

$$= -\int_0^1 x^{a-1}\,dx = -\frac{1}{a}.$$

Отсюда $I = -\int \frac{da}{a} = -\ln a + C$, где C не зависит от a. При $a = b$, $I = 0$, поэтому $C = \ln b$, $I = \ln\frac{b}{a}$.

Интегрирование определенного интеграла по параметру.

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left\{\int_a^b f(x, \alpha)\,dx\right\}d\alpha =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha\right\}dx,$$

если $f(x, \alpha)$ ограничена во всей области $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ и, за исключением, может быть, конечного числа прямых $x = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, непрерывна в этой области.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Если с возрастанием b до бесконечности интеграл $I = \int_a^b f(x)\,dx$ стремится к определенному пределу, то этот интеграл называется *сходящимся*. Предел этого интеграла, обозначаемый симво-

лом $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, называется *несобственным интегралом* функции $f(x)$ на полубесконечном промежутке (a, ∞). Таким образом,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если же при $b \to \infty$ интеграл I не стремится ни к какому пределу, то этот интеграл называется *расходящимся*, и символ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ в этом случае смысла не имеет.

Аналогично определяется значение символов

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ обращается в бесконечность при $x \to b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (b > a)$$

определяют равенством $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, $(\varepsilon > 0)$, если этот предел существует.

В этом случае интеграл называется *сходящимся*, а предел интеграла называется *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ на промежутке (a, b).

Если же этого предела не существует, то интеграл называется *расходящимся*, и тогда символ $\int_a^b f(x)\,dx$ теряет смысл.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда точка разрыва совпадает с нижним пределом. Если точка разрыва $x = c$ функции $f(x)$ лежит внутри промежутка (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx;$$

при этом положительные величины ε_1 и ε_2 стремятся к нулю независимо друг от друга.

Интеграл от функции с бесконечным разрывом всегда может быть преобразован в интеграл с бесконечным пределом и обратно.

Примеры:

1) $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\{-2\sqrt{\varepsilon}+2\} = 2.$$

2) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(a > 0)$ при $\alpha > 1$ сходится и имеет значение $\frac{1}{(\alpha-1)\,a^{\alpha-1}}$, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится.

3) Полагая $x = \frac{1}{y}$, получим

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}\frac{dy}{y^{3/2}}.$$

Вопрос о сходимости или расходимости интеграла с бесконечным пределом, если подинтегральная функция $f(x)$ сохраняет положительное значение, легко решить, применяя следующие критерии сравнения.

1) Если при $x \geqslant a$ имеет место неравенство $f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$.

2) Если существует $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c\ (0 < c < +\infty)$, то оба интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Предположим, что подинтегральная функция $f(x)$ меняет свой знак в промежутке интегрирования. Если существует (т. е. сходится) интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$, то существует и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*, а функция $f(x)$ — *абсолютно интегрируемой* на отрезке $[a,+\infty]$. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ существует, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ не существует, то первый интеграл называется *неабсолютно сходящимся*.

Аналогично устанавливаются понятия об абсолютно сходящихся и неабсолютно сходящихся несобственных интегралах всех прочих видов.

Признаки Коши сходимости и расходимости несобственных интегралов.

1) Если $|f(x)|<\frac{A}{x^p}$, где A и p — положительные постоянные и $p>1$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится. Если же $|f(x)|>\frac{A}{x^p}$ и $p\leqslant 1$, то указанный несобственный интеграл расходится.

Условие сходимости будет выполнено, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\{f(x)\,x^p\}$, $(p>1)$, условие же расходимости имеет место, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\{f(x)\,x^p\}$, $(p\leqslant 1)$, отличный от нуля (конечный или бесконечный).

Иначе говоря, если при $x\to\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $p>0$ $\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{x}\right)$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $p>1$ или $p\leqslant 1$.

Указанные признаки применяются и к несобственным интегралам $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

2) Если $f(x)$ при $x=b$ обращается в бесконечность, а при x, близких к b, удовлетворяет условию $|f(x)|<\frac{A}{(b-x)^p}$, где A и p — положительные постоянные и $p<1$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится абсолютно. Если же $|f(x)|>\frac{A}{(b-x)^p}$ и $p\geqslant 1$, то указанный несобственный интеграл расходится.

Условие сходимости будет выполнено, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b}\{f(x)\,(b-x)^p\}$, $(p<1)$, условие же расходимости имеет место, если существует $\lim\limits_{x\to b}\{f(x)\,(b-x)^p\}$, $(p\geqslant 1)$, отличный от нуля (конечный или бесконечный).

Иначе говоря, если при $x\to b$ функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $p>0$ $\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{b-x}\right)$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $p<1$ или $p\geqslant 1$.

Аналогично можно применить указанные признаки к случаям, когда $f(x)$ обращается в бесконечность при $x=a$ или в некоторой точке $x=c$ промежутка интегрирования.

Примеры:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ сходится, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}x^3\right\}=1$, т. е. подинтегральная функция представляет собой бесконечно малую порядка 3 относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{3}}dx}{1+x^2}$ расходится, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\frac{x^{\frac{5}{3}}}{1+x^2}x^{\frac{1}{3}}\right\}=1$, т. е. подинтегральная функция представляет собой бесконечно малую порядка $\frac{1}{3}$ относительно бесконечно малой $\frac{1}{x}$.

3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ сходится, так как $\lim\limits_{x\to 1}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\sqrt[4]{1-x}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$, т. е подинтегральная функция предста-

вляет собой бесконечно большую порядка $\frac{1}{4}$ относительно бесконечно большой $\frac{1}{1-x}$.

Равномерно сходящиеся интегралы

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ называется *равномерно сходящимся* относительно α на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$, если при любом заданном числе $\varepsilon > 0$, сколь бы мало оно ни было, существует такое число n, что при всяких значениях $N \geqslant n$ и при любых значениях α, взятых на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$, выполняется неравенство $\left|\int_N^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$, причем число n зависит только от ε и не зависит от α.

Признак Вейерштрасса. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ сходится абсолютно и равномерно относительно α на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$, если можно указать такое число N и такую функцию $\varphi(x)$ („мажорирующую функцию"), что при $x > N$ и $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ выполняется неравенство $|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$ и сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$.

Пример. Если $n > 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)\,dx}{x^n}$ сходится равномерно для всех значений y, так как $\left|\frac{\sin(xy)}{x^n}\right| \leqslant \frac{1}{x^n}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ сходится.

Свойства равномерно сходящихся интегралов

1) Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и при изменении α на отрезке $[\alpha_0, \alpha_1]$ и если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ равномерно сходится, то он есть непрерывная функция от α при $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$.

2) При выполнении условий свойства 1-го имеет место формула интегрирования под знаком интеграла

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, \alpha)\,d\alpha.$$

3) Если при непрерывности $f(x, \alpha)$ и $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ несобственный интеграл сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx$ сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$$

Главное значение несобственного интеграла

Пусть функция $f(x)$ имеет разрыв в точке c, лежащей внутри промежутка интегрирования. Тогда несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left\{\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right\},$$

причем предел должен существовать при независимом предельном переходе по ε_1 и по ε_2. В некоторых случаях, когда этот предел не существует, оказывается полезным рассмотреть предел того же выражения, если ε_1 и ε_2 стремятся к нулю, оставаясь равными. Если этот предел существует, то его называют *главным значением* несобственного интеграла и обозначают символом $V \cdot p$:

$$V \cdot p \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right\}.$$

Аналогично определяется главное значение интеграла с бесконечными пределами интегрирования

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Пример. Интеграл $\int_a^b \frac{ax}{x-c}$ $(a<c<b)$ как несобственный не существует, так как выражение

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{ax}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{ax}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

не имеет определенного предела, если ε_1 и ε_2 стремятся оба к нулю независимо друг от друга. Но главное значение этого интеграла существует:

$$v.p.\int_a^b \frac{ax}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

Интеграл Эйлера 1-го рода (бэта-функция)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

имеет конечное значение при $p>0$, $q>0$.

Интеграл Эйлера 2-го рода (гамма-функция)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x}dx$$

имеет конечное значение при $p>0$.

Основные свойства:

$$B(p, q) = B(q, p);\ B(p, 1) = \frac{1}{p};$$

$$B(p, q) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+1)p},$$

если q — целое и больше 1;

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

$$\Gamma(p) = \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{m^p}{p}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}\right\},$$

где m — целое;

$$\Gamma(p+1) = p\cdot\Gamma(p).$$

Если известны значения $\Gamma(p)$ для всех p, заключенных между любыми двумя последовательными целыми числами, то последнее равенство дает возможность выразить функцию $\Gamma(p)$ для любого значения p. Таблицы значений Γ обычно составляют для отрезка [1, 2] (см. табл. X, стр. 41). Если p содержится между 0 и 1, то

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Если n — целое положительное то, $\Gamma(n) = (n-1)! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)$.

ТАБЛИЦА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Буквы n и m везде в таблице означают целые положительные числа; p, q, r — рациональные числа)

1) $$\int_0^1 (1-x)^p x^{1-p}dx = \int_0^1 (1-x)^{1-p}x^p dx = \frac{1}{2}p\pi(1-p)\operatorname{cosec} p\pi;$$

$(p^2<1)$.

2) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1+x^q}\,dx = \frac{\pi}{q}\operatorname{cosec}\frac{p\pi}{q}.$$

3) $$\int_0^1 \frac{x^p dx}{(1-x)^p} = \frac{p\pi}{\sin p\pi}$$

4) $$\int_0^1 \frac{x^p dx}{(1-x)^{p+1}} = -\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

$(p^2<1)$

5) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi\operatorname{ctg} p\pi.$$

6) $$\int_0^1 \frac{x^{-p}-x^p}{1-x}\,dx = \frac{1}{p} - \pi\operatorname{ctg} p\pi.$$

7) $\int_0^1 \frac{(1-x)^{p-1}}{x^p}\,dx = \pi \operatorname{cosec} p\pi.$

8) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x)^q\,(1+px)} = \frac{\pi}{(1+p)^q} \operatorname{cosec} q\pi.$

9) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}\,dx}{(1-x)^q\,(x+p)} = \frac{p^{q-1}\pi}{(1+p)^q} \operatorname{cosec} q\pi.$

10) $\int_0^1 \frac{(1-x^n)\,dx}{(1+x)^{n+1}\,(1-x)} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}.$

11) $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{p-1}\,dx = \frac{2}{p\,(p+1)}.$

12) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-px)\,\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{p\,(1-p)}} \arcsin\sqrt{p}.$

13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+p^2x)\,(1-x)}} = \frac{2}{p} \operatorname{arctg} p.$

14) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-p^2x)\,(1-x)}} = \frac{1}{p} \ln\frac{1+p}{1-p}.$

15) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^4)\,\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{8}.$

16) $\int_0^1 xe^{qx}\,dx = \frac{1}{q^2}\,[(q-1)\,e^q + 1].$

17) $\int_0^1 \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e}{2} - 1.$

18) $\int_0^1 \ln(q+px)\,dx = \frac{q+p}{p} \ln(q+p) - \frac{q}{p} \ln q - 1.$

19) $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$

20) $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x)\,dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

21) $\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{12} - 2\ln 2.$

22) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

23) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}.$

24) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$

25) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}.$

26) $\int_0^1 \ln(1-\sqrt{x})\,dx = -\frac{3}{2}.$

27) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} = 2\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx = \sqrt{\pi}.$

28) $\int_0^1 \arcsin px\,dx =$

$= \arcsin p + \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2} - \frac{1}{p}.$

29) $\int_0^1 \arccos px\,dx =$

$= \arccos p + \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2}.$

30) $\int_0^1 \operatorname{arctg} px\,dx = \operatorname{arctg} p - \frac{1}{2p}\ln(1+p^2).$

31) $\int_0^1 \operatorname{arcctg} px\,dx =$

$= \operatorname{arcctg} p + \frac{1}{2p}\ln(1+p^2).$

32) $\int_0^1 \arcsin\left(\sqrt{x}\right)dx =$

$= \int_0^1 \arccos\left(\sqrt{x}\right)dx = \frac{\pi}{4}.$

33) $\int_0^\infty \frac{dx}{p^2+q^2x^2} = \frac{\pi}{2pq}.$

34) $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x^m}\,dx = \frac{\pi}{m\sin\frac{n\pi}{m}};$

$(0<n<m).$

35) $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{p^2}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2p};\ (p\geqslant 0).$

36) $\int_0^\infty x^n e^{-px}\,dx = \frac{n!}{p^{n+1}};$

$(p>0,\ n\geqslant 0).$

37) $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-px^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n!}{p^{n+1}};\quad (p>0).$

38) $\int_0^\infty x^{2n}e^{-px^2}dx =$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot p^{n+\frac{1}{2}}};\quad (p>0).$

39) $\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = 1-\ln 2.$

40) $\int_0^\infty e^{-px}\sin(qx+r)\,dx =$

$= \frac{1}{p^2+q^2}(q\cos r + p\sin r).$

41) $\int_0^\infty e^{-px}\cos(qx+r)\,dx =$

$= \frac{1}{p^2+q^2}(p\cos r - q\sin r).$

42) $\int_0^\infty e^{-px^2}\cos qx\,dx =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{q^2}{4p}};\quad (p>0).$

43) $\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

44) $\int_0^\infty \sin px\cos qx\frac{x\,dx}{r^2-x^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\cos pr\cos qr; & (p>q). \\ -\frac{\pi}{4}\cos 2pr; & (p=q) \\ +\frac{\pi}{2}\cos pr\sin qr; & (p<q). \end{cases}$

45) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 46) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

47) $\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(q-p); \quad (p>0,\ q>0)$.

48) $\int_0^\infty \ln(1+p^2x^2)\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}\ln(1+pq)$.

49) $\int_0^\infty \ln(p^2+x^2)\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q}\ln(p+q)$.

50) $\int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\,dx = \begin{cases} 0; & (p^2 \leqslant 1). \\ 2\pi\ln p; & (p^2>1). \end{cases}$

51) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(1+p)$.

52) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

53) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots2n}{3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}$.

54) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2}$.

55) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(p^2\cos^2 x + q^2\sin^2 x)^n} =$

$$= \frac{\pi}{2^n(n-1)!}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\left\{[2(n-k)-1]!!\,[2(k-1)-1]!!\binom{n-1}{n-k}p^{2(n-k)}\cdot q^{2(k-1)}\right\}^*}{p^{2n-1}\,q^{2n-1}}.$$

* Символ $k!!$ (полуфакториал) обозначает произведение всех нечетных чисел от 1 до k, если k нечетное, или произведение всех четных чисел от 2 до k, если k четное.

56) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}.$$

57) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\cos^{2m}x\,dx=\frac{(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{(2n+2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\ *.$$

Вычисление интегралов при помощи рядов

Если $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ и ряд равномерно сходится на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

58) $$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt=x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

59) $$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt=C+\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4!}-\ldots\ (x>0).$$

60) $$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}=C+\ln|\ln x|+\ln x+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x)^2}{2!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(\ln x)^3}{3!}+\ldots;\quad(0<x<1).$$

В последних двух формулах $C=0{,}57721566$ — *постоянная Эйлера* (см. стр. 135).

61) $$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{x}{1}-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\ldots$$

* Символ $k!!$ (полуфакториал) обозначает произведение всех нечетных чисел от 1 до k, если k нечетное, или произведение всех четных чисел от 2 до k, если k четное.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Формула трапеций. Промежуток интегрирования (a, b) делится на n равных частей точками $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$;

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right).$$

Здесь

$$y_0=f(a), y_1=f(x_1), \ldots, y_n=f(b).$$

Формула Симпсона. Промежуток интегрирования делится на $2n$ равных частей точками $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n}=b$;

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})].$$

Здесь

$$y_0=f(a), y_1=f(x_1), \ldots, y_{2n}=f(b).$$

Разность R_n между точным значением определенного интеграла и приближенным его значением

$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$ (для формулы трапеций);

$R_n=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{IV}(\xi)$ (для формулы Симпсона).

Здесь ξ — некоторое значение переменной интегрирования из промежутка (a, b).

Формулы Чебышева

$$\int_0^l f(x)\,dx \approx \frac{l}{2}\,[f(0{,}2113l) + f(0{,}7887l)];$$

$$\approx \frac{l}{3}\,[f(0{,}1464l) + f(0{,}5l) + f(0{,}8536l)];$$

$$\approx \frac{l}{4}\,[f(0{,}1027l) + f(0{,}4062l) + f(0{,}5938l) + f(0{,}8973l)];$$

$$\approx \frac{l}{5}\,[f(0{,}0838l) + f(0{,}3127l) + f(0{,}5l) + f(0{,}6873l) + f(0{,}9162l)].$$

Формулы Гаусса

$$\int_c^l f(x)\,dx \approx l\,[0{,}5f(0{,}2113l) + 0{,}5f(0{,}7887l)];$$

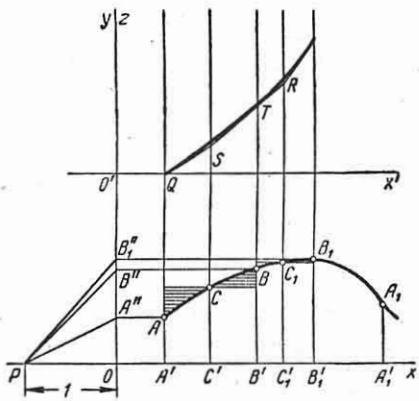
$$\approx l\,[0{,}2778f(0{,}1127l) + 0{,}4444f(0{,}5l) + 0{,}2778f(0{,}8873l)];$$

$$\approx l\,[0{,}1739f(0{,}0694l) + 0{,}3261f(0{,}3300l) + 0{,}3261f(0{,}6700l) + 0{,}1739f(0{,}9306l)];$$

$$\approx l\,[0{,}1185f(0{,}0469l) + 0{,}2393f(0{,}2308l) + 0{,}2844f(0{,}5l) + 0{,}2393f(0{,}7692l) + 0{,}1185f(0{,}9531l)].$$

ГРАФИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Для получения графика первообразной функции $z = F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ строится график функции $y = f(x)$ и построенная кривая AA_1 (фиг. 1) точками B, B_1, ... делится на части AB, BB_1, ...; криволинейная трапеция $AA'A_1'A_1$ делится прямыми BB', B_1B_1', ... на полосы $AA'B'B$, $BB'B_1'B_1$, ... Каждую полосу заменяем равновеликим прямоугольником, для чего на дугах AB, BB_1, ... выбираем (на глаз) точки C, C_1, ..., через которые проводим горизонтальные прямые; точки C, C_1, ... выбирают так, чтобы площади, ограниченные кривой и этими горизонтальными прямыми, были соответственно равны (на чертеже эти площади заштрихованы). На оси Ox влево от начала откладывается отрезок $OP = 1$, и точка P (полюс) соединяется с точками A'', B'', ..., которые являются проекциями точек A, B, ... на ось Oy.



Фиг. 1. Графическое интегрирование.

На оси Oy берется произвольная точка O', которая принимается за начало новой системы координат $x'O'z$ (см. фиг. 1). Через точку Q пересечения новой оси $O'x'$ с вертикалью $A'A$ проводится прямая, параллельная лучу PA'', до пересечения с вертикалью $C'C$ в точке S. Через точку S проводится прямая, параллельная лучу PB'', до пересечения с вертикалью $C_1'C_1$ в точке R и т. д. Многоугольник с вершинами Q, S, R, ... образован касательными к интегральной кривой; точки пересечения его сторон с вертикалями $B'B$, $B_1'B_1$, ... являются точками касания, следовательно, принадлежат интегральной кривой, которую можно вычертить по лекалу. Ордината z построенной кривой (в системе координат $x'O'z$) дает значение интеграла $z = \int_a^x f(x)\,dx$.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой области P изменения независимых переменных. С геометрической точки зрения области P соответствует на координатной плоскости xy некоторая плоская фигура, ограниченная одной или несколькими кривыми. Разобьем эту область на частичные области $p_1, p_2, \ldots$ Пусть σ_i обозначает площадь частичной области p_i, а $f(\xi_i, \eta_i)$ — значение функции $f(x, y)$, которое она принимает в некоторой точке M_i частичной области с номером i. Выражение $\sum f(\xi_i, \eta_i)\ \sigma_i$ называется двумерной интегральной суммой, если наибольшая хорда любой из частичных областей меньше некоторого числа δ. В зависимости от способа разбиения основной области P и от выбора точек M_i внутри частичных областей p_i интегральная сумма может принимать бесчисленное множество значений. Если существует такое число A, что разность между этим числом A и любой интегральной суммой стремится к нулю при стремлении δ к нулю, то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области P, а предел A, обозначаемый символом $\iint\limits_P f(x, y)\, d\sigma$, называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$, распространенным на область P. Одним из возможных разбиений области P является разбиение этой области прямыми, параллельными координатным осям. В этом случае для обозначения двойного интеграла служит символ $\iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy$.

С геометрической точки зрения *двойной интеграл можно истолковать как объем* некоторого цилиндрического тела, ограниченного частью координатной плоскости xy, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, построенной на контуре области P, и поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

Теорема о среднем. Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ непрерывны в области P и функция $\varphi(x, y)$ сохраняет постоянный знак, то всегда можно найти внутри области P точку с такими координатами ξ, η, что будет иметь место равенство

$$\iint\limits_P f(x, y)\, \varphi(x, y)\, d\sigma = f(\xi, \eta) \iint\limits_P \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

Вычисление двойного интеграла

Двойной интеграл, распространенный на область P, ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, вычисляется при помощи двукратного интегрирования

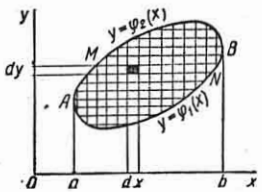
$$\iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d \left\{ \int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

В случае произвольной области

$$\iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx,$$

причем $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ — уравнения нижней (ANB) и верхней (AMB) частей контура области P (фиг. 2); a, b — абсциссы концов отрезка, являющегося проекцией области P на ось абсцисс. При выполнении интегрирования по y (вычисление внутреннего интеграла) величина x считается постоянной.



Фиг. 2. Случай произвольной выпуклой области при вычислении двойного интеграла.

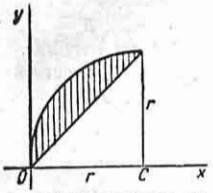
Пример. Интеграл I от функции $f(x, y) = x^2y$, распространенный по области, ограниченной биссектрисой координатного угла xOy и дугой окружности радиуса r с центром на оси Ox, касающейся в начале координат оси Oy (фиг. 3), можно вычислить так:

$$I = \int\limits_0^r \left\{ \int\limits_x^{\sqrt{2rx - x^2}} x^2y\, dy \right\} dx = \int\limits_0^r \frac{x^2y^2}{2} \Bigg|_x^{\sqrt{2rx - x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^r \left(\frac{x^2(2rx - x^2)}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^r (rx^3 - x^4)\, dx = \left(\frac{rx^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^r = \frac{r^5}{20}.$$

Если сначала интегрировать по переменной x, то интеграл выражается так:



Фиг. 3. К примеру на вычисление двойного интеграла (область интегрирования).

$$I=\int_0^r\left\{\int_r^{\sqrt{r^2-y^2}} x^2y\,dx\right\}dy.$$

Пределы внутреннего интеграла в обоих случаях определяются из уравнений биссектрисы $y=x$ и окружности $x^2+y^2=2rx$; эти уравнения решаются в первом варианте относительно y, а во втором — относительно x.

Формула замены переменных в двойном интеграле. Уравнение $x=f(u,\ v)$, $y=\varphi(u,\ v)$ устанавливают соответствие между координатами $(x,\ y)$ точек некоторой области P плоскости xy и координатами $(u,\ v)$ точек другой области P_1, расположенной на координатной плоскости uv. Пусть функции $f(u,\ v)$ и $\varphi(u,\ v)$ непрерывны вместе с первыми частными производными внутри области P_1, и соответствие между точками обеих областей *взаимно однозначно*, т. е. каждой точке $(u,\ v)$ области P_1 соответствует определенная точка $(x,\ y)$ области P, и обратно: каждой точке $(x,\ y)$ области P соответствует определенная точка $(u,\ v)$ области P_1; в этом случае область P называется *взаимно однозначным образом* области P_1.

Тогда определитель

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix},$$

называемый *якобианом*, или *функциональным определителем*, сохраняет знак в области P_1 и

$$\iint_P F(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{P_1} F[f(u,v),\varphi(u,v)]\left|\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)}\right|du\,dv.$$

В случае перехода от декартовых координат к полярным

$$x=\rho\cos\theta;\ y=\rho\sin\theta;\ \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho,$$

поэтому

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{P_1} f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Тройной интеграл и его вычисление

Аналогично двойному интегралу определяется *тройной интеграл* как предел трехмерной интегральной суммы:

$$\iiint_G F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\lim_{v_i\to 0}\sum F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot v_i.$$

Вычисление тройного интеграла может быть сведено к трехкратному вычислению обыкновенных определенных интегралов:

$$\iiint_G F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint_P\left\{\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right\}dx\,dy=$$

$$=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx.$$

Область G ограничена поверхностями $z=\psi_1(x,\ y)$, $z=\psi_2(x,\ y)$ и цилиндрической поверхностью $\Phi(x,\ y)=0$, проходящей через контур плоской области P плоскости xy, на которую проектируется область G. При интегрировании по переменной z переменные x и y считаются постоянными. Определение пределов интегрирования $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, a, b выполняется так же, как при вычислении двойного интеграла по области.

Замена переменных в тройных интегралах. При замене переменных $x=f(u,\ v,\ w)$, $y=\varphi(u,\ v,\ w)$, $z=\psi(u,\ v,\ w)$ имеет место формула

$$\iiint_G F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_{G_1} F[f(u,v,w),\ \varphi(u,v,w),$$

$$\psi(u,v,w)]\left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw,$$

причем область G — взаимно однозначный образ области G_1, и якобиан

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{vmatrix}$$

сохраняет знак в области G_1.

В частности, при переходе от декартовых координат к *цилиндрическим* (см. стр. 251) элемент объема в декартовых координатах $dx\,dy\,dz$ заменяется элементом объема в цилиндрических координатах $\rho d\rho d\theta dz$, а при переходе к *сферическим* координатам (см. стр. 251) — элементом объема в сферических координатах $\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$, так как в последнем случае $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta$, где θ — угол между радиусом-вектором ρ и осью z.

Пример. Интеграл

$$I = \int_0^R \left\{ \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left[\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz \right] dy \right\} dx$$

представляет тройной интеграл от функции $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, распространенный на ту часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, для которой $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Если ввести вместо декартовых координат сферические, то

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R \rho^3 \sin\theta\, d\rho \right] d\theta \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \right\} d\varphi = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi R^4}{8}.$$

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть в некоторой области пространства задана непрерывная функция $P(x, y, z)$ и кусочно-гладкая кривая L, целиком лежащая в указанной области и соединяющая точки A и B.

Обозначим через a и b абсциссы точек A и B и разделим кривую на частичные дуги точками, абсциссы которых будут $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$, причем будем считать $a = x_0$, $b = x_n$. Внутри каждой частичной дуги, ограниченной точками деления с абсциссами x_{i-1}, x_i, возьмем произвольную точку (ξ_i, η_i, ζ_i) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Если неограниченно увеличивать число частичных дуг и одновременно устремлять к нулю их максимальную длину, то существует предел этой суммы, называемый криволинейным интегралом функции $P(x, y, z)$ по переменной x, взятым вдоль дуги AB кривой; этот интеграл обозначается символом

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx.$$

Наиболее общий вид криволинейного интеграла

$$\int_{AB} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \int_{AB} P(x, y, z)\, dx + \int_{AB} Q(x, y, z)\, dy + \int_{AB} R(x, y, z)\, dz$$

представляет сумму криволинейных интегралов от функций P, Q, R соответственно по переменным x, y, z.

При интегрировании вдоль замкнутой кривой начальная и конечная точки A и B совпадают, и криволинейный интеграл не зависит от выбора этой точки, но зависит от направления обхода кривой при движении от начальной точки к конечной; при изменении направления обхода знак интеграла меняется, абсолютная же величина интеграла остается неизменной.

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]\, f_1'(t)\, dt,$$

причем $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ — уравнения кривой AB; α и β опреде-

ляются из уравнений $a = f_1(\alpha)$, $b = f_1(\beta)$ (a и b — абсциссы точек A и B).

Криволинейный интеграл часто применяется при вычислении работы.

Пример. Силы поля обратно пропорциональны расстоянию их точек приложения от оси Oz, перпендикулярны этой оси и направлены в сторону оси Oz.

Найти работу сил поля при движении точки по окружности $x = \cos\varphi$, $y = 1$, $z = \sin\varphi$ от точки M (1, 1, 0) до точки N (0, 1, 1).

Согласно условию модуль вектора силы $F = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где k — коэффициент пропорциональности.

Направляющие косинусы вектора силы равны

$$\cos\alpha = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos\beta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\cos\gamma = 0;$$

проекции силы на координатные оси

$$F_x = -\frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad F_y = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad F_z = 0.$$

Для определения работы заметим, что элемент работы равен скалярному произведению вектора силы на вектор элемента пути. Поэтому вся работа выразится криволинейным интегралом по дуге MN:

$$A = \int_{MN} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \int_{MN} \left(-\frac{kx}{x^2 + y^2} dx - \frac{ky}{x^2 + y^2} dy \right) =$$

$$= -k \int_{MN} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Переходим к обыкновенному интегралу, полагая $x = \cos\varphi$; $dx = -\sin\varphi d\varphi$; $y = 1$; $dy = 0$; при этом φ изменяется от 0 (точка M) до $\frac{\pi}{2}$ (точка N); получим

$$A = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\varphi \sin\varphi d\varphi}{1 + \cos^2\varphi} =$$

$$= -\frac{k}{2} \ln(1 + \cos^2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{2} \ln 2.$$

Интеграл $u = \int_{AB} (P\,dx + Q\,dy)$ не зависит от кривой AB, соединяющей точки A и B и заключенной в некоторой *одновязной* (т. е. ограниченной одним контуром) области D, если во всей этой области выполняются условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае, если точка A (x_0, y_0) фиксирована, интеграл является функцией только координат x, y точки B, т. е. $u = \Phi(x, y)$, причем эта функция удовлетворяет уравнению в полных дифференциалах

$$du = P\,dx + Q\,dy.$$

Интеграл $V = \int_{AB} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$, взятый вдоль пространственной кривой AB, соединяющей точки A и B и заключенной в некоторой пространственной односвязной (т. е. ограниченной одной поверхностью) области G, не зависит от кривой AB, если во всей этой области выполняются условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Если в этом случае точка A фиксирована, то интеграл V является функцией только координат x, y, z точки B, т. е. $V = \Psi(x, y, z)$, причем

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

ИНТЕГРАЛ ПО ПОВЕРХНОСТИ

Пусть правильная поверхность S (см. стр. 190) разбита на n частичных поверхностей $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — площади частичных поверхностей.

Дана непрерывная функция $F(M)$ точек поверхности S*; $F(M_i)$ — значение функции в произвольной точке M_i частичной поверхности s_i. Предел суммы $\sum F(M_i)\,\sigma_i$ при безграничном уменьшении во всех измерениях каждой из частичных поверхностей называется *поверхностным интегралом I типа* и обозначается символом

$$\iint_S F(M)\,d\sigma.$$

Если поверхность S задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

* Функцию трех независимых переменных можно рассматривать как функцию точек пространства.

то

$$F(M) = \Phi[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] = f(u, v),$$

и поверхностный интеграл сводится к двойному:

$$\iint\limits_S F(M)\, d\sigma = \iint\limits_S \Phi(x, y, z)\, d\sigma = \iint\limits_R f(u, v)\, \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$EG - F^2 = \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2,$$

а область R есть отображение поверхности S на плоскость uv.

Если поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, то

$$F(M) = \Phi[x, y, z(x, y)]$$

и

$$\iint\limits_S F(M)\, d\sigma = \iint\limits_D \Phi[x, y, z(x, y)] \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Область D есть проекция поверхности S на плоскость xy.

Пример. Координаты центра тяжести восьмой части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и расположенной в первом октанте, вычисляются так:

$$x_c = y_c = z_c = \frac{\iint x\, d\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2}{\pi R^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta\right\} d\varphi = \frac{R}{2},$$

так как уравнения сферы в криволинейных координатах θ (широта) и φ (долгота) будут:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi;\quad y = R\sin\theta\sin\varphi;\quad z = R\cos\theta,$$

а потому

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Пусть в точках правильной поверхности S задана некоторая функция $R(x, y, z)$. Выберем на поверхности определенную сторону за внешнюю и разобьем поверхность S на части $s_1, s_2, \ldots, s_n$. В каждой части s_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим в ней значение функции $R(x_i, y_i, z_i)$ и умножим это значение на проекцию δ_i части s_i на плоскость xy. При этом числу δ_i приписываем знак плюс или минус в зависимости от того, образует ли нормаль к поверхности в точке M_i, направленная во внешнюю сторону, острый или тупой угол с осью Oz. Составим сумму σ таких произведений $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\delta_i$ и перейдем к пределу, неограниченно уменьшая во всех измерениях каждый элемент s_i. Этот предел называется *поверхностным интегралом II типа* от $R(x, y, z)$, распространенным на выбранную сторону поверхности, и обозначается символом $\iint\limits_S R(x, y, z)\, dx\, dy$.

Наиболее общим видом поверхностного интеграла *II* типа служит интеграл

$$\iint\limits_S \{P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dz\, dx + R(x, y, z)\, dx\, dy\}.$$

Связь поверхностных интегралов *I* и *II* типа дается формулой

$$\iint\limits_S (P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy) = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma,$$

где α, β, γ — углы нормали к поверхности с осями координат.

Формула Остроградского (см. также стр. 233)

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iiint\limits_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

где S — поверхность, ограничивающая область G; α, β, γ — углы, составляемые внешней нормалью к поверхности с осями Ox, Oy, Oz; функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в области G вместе со своими первыми производными.

Формула Стокса (см. также стр. 233):

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx\right] = \int\limits_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Здесь $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе с первыми частными производными в некоторой трехмерной области, содержащей внутри себя правильную поверхность S; C — замкнутый контур поверхности S, интегрирование вдоль которого ведется в положительном направлении, т. е. так, чтобы обход контура представлялся наблюдателю, расположенному на выбранной стороне поверхности S, совершающимся против стрелки часов, если система координат xyz — правая.

Частным случаем формулы Стокса для плоскости является формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_L (P\,dx + Q\,dy),$$

где L — контур плоской области D, интегрирование вдоль которого ведется в положительном направлении, т. е. так, чтобы область D при обходе контура L оставалась слева, если система координат правая; P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D и на ее границе.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКЕ

Вычисление площади плоской фигуры (S). Если фигура ограничена кривой $y = f(x)$, осью x и ординатами $x = a$, $x = b$, причем функция $f(x)$ непрерывна, положительна и однозначна на отрезке $[a, b]$, то $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Если график функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, пересекает ось Ox, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет представлять алгебраическую сумму площадей, заключенных между графиком, крайними ординатами $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Величины площадей, расположенных выше оси Ox, войдут в эту сумму со знаком плюс, а величины площадей, расположенных ниже оси Ox, войдут со знаком минус.

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ так, что $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, то площадь, ограниченная этой кривой, осью x и ординатами $x = a$, $x = b$, будет

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Если фигура ограничена кривой $\rho = f(\theta)$ (в полярных координатах ρ и θ) и прямыми $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, то

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta.$$

Площадь фигуры, ограниченной плоской замкнутой кусочно-гладкой кривой C, не имеющей двойных точек, удобно вычислять при помощи криволинейного интеграла по формулам

$$S = -\int\limits_C y\,dx = \int\limits_C x\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_C (x\,dy - y\,dx).$$

Криволинейные интегралы берутся в положительном направлении, т. е. так, чтобы при обходе контура C определяемая площадь оставалась слева (при правой системе координат).

Площадь плоской фигуры, ограниченной замкнутым контуром, определяют часто при помощи двойного интеграла $S = \iint\limits_D dx\,dy$ (в декартовых координатах), где D — плоская область, площадь которой определяется, или $S = \iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta$ (в полярных координатах).

Вычисление длины дуги (L). Если кривая задана уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt,$$

где a, b — значения параметра t на концах кривой.

Для плоской кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — однозначная и непрерывная функция, то

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением в полярных координатах

$$\rho = f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — однозначная и непрерывная функция, то

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta,$$

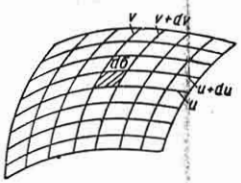
где θ_1, θ_2 — полярные углы для концов кривой.

Вычисление площади поверхности тела вращения:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Здесь $y = f(x)$ — уравнение образующей; a, b — абсциссы ее концов; x — ось вращения.

Вычисление площади кривой поверхности. Пусть поверхность S задана параметрическими уравнениями $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$, где u, v — произвольные криволинейные координаты точек на поверхности (фиг. 4). Функции f, φ, ψ — однозначные, непрерывные и имеют непрерывные частные производные в некоторой области R плоскости uv, ограниченной контуром L, причем ни в одной точке области R якобианы $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\frac{D(x,z)}{D(u,v)}$, $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$ не обращаются одновременно в нуль. Поверхность S называется в этом случае *правильной*. Площадь поверхности



Фиг. 4. Координатные линии на поверхности и элемент площади поверхности.

$$\sigma = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Здесь область R является отображением поверхности S на плоскость uv;

$$EG - F^2 = \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Здесь область D — проекция поверхности S на плоскость xy.

Вычисление объема тела вращения:

$$V = \int_a^b F(x)\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Здесь $F(x)$ — площадь поперечного сечения тела, перпендикулярного к оси вращения Ox; x — абсцисса сечения, a, b — абсциссы сечений на концах; $y = f(x)$ — уравнение образующей.

Вычисление объема тел произвольной формы. Если тело ограничено поверхностью, которая пересекается линиями, параллельными оси Oz, в двух

точках, то объем V этого тела может быть представлен в виде разности

$$V = \iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy - \iint_D f_2(x, y)\,dx\,dy,$$

причем область интегрирования D является проекцией тела на координатную плоскость xy, а поверхности, ограничивающие тело сверху и снизу, заданы уравнениями

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y).$$

Объем тела определяется также при помощи тройного интеграла:

$V = \iiint_G dx\,dy\,dz$ (в декартовых координатах);

$V = \iiint_G \rho\,dz\,d\rho\,d\theta$ (в цилиндрических координатах);

$V = \iiint_G r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$ (в сферических координатах), где G — область, занятая телом; z, ρ, θ — цилиндрические координаты точки; r, φ, θ — сферические координаты, причем φ — угол между радиусом-вектором r и осью Oz.

Объем тела выражается также при помощи поверхностных интегралов:

$$V = \iint_S x\,dy\,dz = \iint_S y\,dx\,dz =$$

$$= \iint_S z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy).$$

причем интеграл распространен на внешнюю сторону поверхности S, ограничивающей тело.

Вычисление массы тела:

$$M = \iiint_G dm = \iiint_G \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\delta(x, y, z)$ — переменная плотность, заданная как функция координат точки; dm — элемент массы; G — область, занятая телом.

Координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{\iiint_G x\,dm}{M}; \quad y_c = \frac{\iiint_G y\,dm}{M};$$

$$z_c = \frac{\iiint_G z\,dm}{M}.$$

Если плотность во всех точках тела постоянна, то

$$x_c = \frac{\iiint_G x\,dV}{V}; \quad y_c = \frac{\iiint_G y\,dV}{V};$$

$$z_c = \frac{\iiint_G z\,dV}{V},$$

где V — объем тела; dV — элемент объема.

Если ищется центр тяжести массы плоской фигуры, то тройной интеграл заменяется двойным. В случае однородной поверхности (плотность всюду одинакова) имеем для координат центра тяжести площади плоской фигуры

$$x_c = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}; \quad y_c = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy};$$

для координат центра тяжести площади поверхности

$$x_c = \frac{\iint_S x\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}; \quad y_c = \frac{\iint_S y\,d\sigma}{\iint_S d\sigma};$$

$$z_c = \frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},$$

где интегралы берутся по поверхности S; $d\sigma$ — элемент поверхности.

Момент инерции:

$$J = \iiint_G R^2 dm,$$

где dm — элемент массы; R — расстояние (переменное) элемента массы от оси или от точки, относительно которых вычисляется момент;

$$dm = \delta dV,$$

где δ — плотность, dV — элемент объема

Момент инерции плоской фигуры

$$J = \iint_D R^2\,dx\,dy;$$

в частности, $J_x = \iint_D y^2 dx\,dy$; $J_y =$

$=\iint\limits_D x^2 dx\,dy$—моменты инерции площади относительно осей Ox и Oy; $J_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ — момент инерции площади относительно начала координат (полярный момент инерции).

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $\Phi(x)$, принимающие в каждой точке этого отрезка конечные значения.

Разделим точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки. Выбрав в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ по точке ξ_i, вычислим соответствующее значение $f(\xi_i)$, умножим его на приращение функции $\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})].$$

Если при стремлении всех разностей $x_i - x_{i-1}$ к нулю сумма σ имеет определенный конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_i в частичных отрезках, то этот предел называется *интегралом Стильтьеса* функции $f(x)$ по функции $\Phi(x)$.

Интеграл Стильтьеса обозначается символом

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\Phi(x),$$

так что, по определению,

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,|\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})|.$$

Функция $y(x)$ называется *интегрируемой*, функция $\Phi(x)$ — *интегрирующей*.

Обычный определенный интеграл можно рассматривать как частный случай интеграла Стильтьеса, когда в качестве интегрирующей функции $\Phi(x)$ взята независимая переменная $\Phi(x) = x$.

Вычисление интеграла Стильтьеса. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\Phi(x)$ имеет на этом отрезке ограниченную интегрируемую производную $\Phi'(x)$, то

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\Phi'(x)\,dx,$$

где в правой части — обычный определенный интеграл.

Формула остается справедливой и в том случае, когда на отрезке $[a, b]$ имеется конечное число точек, где производная $\Phi'(x)$ не существует, но функция $\Phi(x)$ продолжает быть непрерывной.

В общем случае, когда $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\Phi(x)$ имеет разрывы в точках a, b и в конечном числе внутренних точек $c_1, c_2, \ldots, c_k$, а между этими точками имеет ограниченную интегрируемую производную $\Phi'(x)$, интеграл Стильтьеса вычисляется по формуле

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\Phi'(x)\,dx + f(a)\,[\Phi(a+0) - \Phi(a)] + \sum_{i=1}^{k} f(c_i)\,[\Phi(c_i+0) - \Phi(c_i-0)] + f(b)\,[\Phi(b) - \Phi(b-0)].$$

Эта формула верна и в случае, если одна (или обе) из точек a или b есть точка непрерывности, так как тогда соответствующее слагаемое $f(a)[\Phi(a+0) - \Phi(a)]$ или $f(b)[\Phi(b) - \Phi(b-0)]$ само собой исчезает.

Интеграл Стильтьеса имеет применение как в различных областях математики (теория вероятностей, теория функций, функциональный анализ), так и при решении технических задач. Одной из важнейших проблем, решенных интегралом Стильтьеса, *является проблема измерения моментов.*

Поставим задачу измерить моменты разных порядков относительно начала координат некоторой массы M, распределенной по прямой (оси абсцисс).

Если масса M вся сосредоточена в одной точке x, то имеем:

момент статический $I_1 = |x| \cdot M$;

момент инерции $I_2 = x^2 \cdot M$ и т. д.

Пусть масса M распределена по всему отрезку $[a, b]$ прямой. Разделим отрезок на частичные отрезки и в каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ массу сосредоточим в одной точке ξ_i. Если обозначить через $f(x)$ любую из функций $|x|$, $|x^2|$, $|x^3|$, . . ., $|x^n|$, . . ., а через $\Phi(x_i)$ — массу на отрезке $[a, x_i]$, то разность $\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})$ выражает массу отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, а произведение $f(\xi_i)[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})]$ выражает момент того или иного порядка относительно начала координат всей массы отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, которую мы сосредоточили в точке ξ_i. Отсюда ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})] = (S)\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)$$

даст момент того или иного порядка относительно начала координат для массы всего отрезка $[a, b]$. При этом масса может распределяться по отрезку непрерывно, а также может быть сосредоточена в отдельных точках, так что функция в случае измерения моментов хотя и может иметь конечное число разрывов, но должна обладать следующими свойствами:

а) $\Phi(x)$ — неубывающая функция от x;

б) $\Phi(x)$ — непрерывная справа функция от x.

Функции, обладающие этими двумя свойствами, называются *функциями распределения*. Они заслуживают особого внимания, так как наиболее часто встречаются в приложениях интеграла Стильтьеса.

Примеры:

1) $(S)\int_0^{\pi} \cos^2 x\, d(\cos x) =$

$$= \int_0^{\pi} \cos^2 x\, d(\cos x) = \left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{3}.$$

2) $(S)\int_0^2 x^2 d\Phi(x)$, где $\Phi(x) = 0$, если $0 \leqslant x < 2$;

$$\Phi(2) = 5; \quad (S)\int_0^2 x^2 d\Phi(x) = \int_0^2 x^2 \cdot 0 \cdot dx + 2^2[5 - 0] = 20.$$

3) $(S)\int_0^3 x^2 d\Phi(x)$,

если

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^3 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ x^4 \text{ при } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Точкой разрыва будет точка $x = 2$. При этом $\Phi(2 - 0) = 8$; $\Phi(2 + 0) = 16$. В остальных точках отрезка $[0,3]$ функция $\Phi(x)$ имеет производную $\Phi'(x)$, причем

$$\Phi'(x) = \begin{cases} 3x^2 \text{ при } 0 \leqslant x < 2; \\ 4x^3 \text{ при } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(S)\int_0^3 x^2 d\Phi(x) = \int_0^3 x^2 \Phi'(x)\,dx + 2^2[16 - 8] =$$

$$= \int_0^2 x^2 3x^2 dx + \int_2^3 x^2 4x^3 dx + 2^2[16 - 8] =$$

$$= 3\int_0^2 x^4 dx + 4\int_2^3 x^5 dx + 32 = 494\frac{8}{15}.$$

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО *

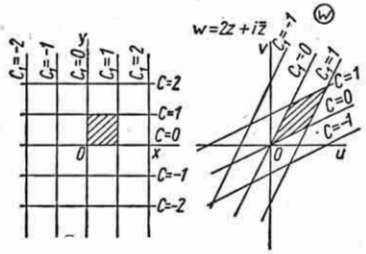
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция комплексного переменного $w = f(z)$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$, определена, если известны две вещественные функции от двух вещественных переменных: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Пример. Если $w = z^2$, то $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, т. е. $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Функция $w = f(z)$ дает *точечное преобразование* (или *отображение*) плоскости z на плоскость w: каждая точка z_1 переходит в соответствующую точку w_1; кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$ переходит в кривую $u = u[x(t), y(t)]$, $v = v[x(t), y(t)]$ (t — параметр); координатные линии $y = c$ переходят в линии $u = u(x, c)$, $v = v(x, c)$, где x — параметр; координатные линии $x = c_1$ переходят в линии $u = u(c_1, y)$, $v = v(c_1, y)$, где y — параметр.

Пример. $w = 2z + i\bar{z}$, т. е. $u + iv = 2(x + iy) + i(x - iy) = (2x + y) + i(x + 2y)$, откуда $u = 2x + y$, $v = x + 2y$. Линии $y = c$ переходят



Фиг. 1. Отображение, осуществляемое функцией комплексного переменного $w = 2z + i\bar{z}$.

в линии $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, т. е. в прямые $v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}c$; линии $x = c_1$ переходят в прямые $v = 2u - 3c_1$ (фиг. 1); заштрихованная область (квадрат) переходит в заштрихованную (ромб).

Если $z = x + iy$ — комплексное переменное, а $a = a + ib$ — такое постоянное число, что $|z - a| \to 0$, то говорят, что комплексное переменное z *стремится к пределу* a, и пишут: $\lim z = a$ или $z \to a$.

Если $z \to 0$, то z называется *бесконечно малым* комплексным числом. Геометрически условие $z \to a$ равносильно тому, что аффикс z беспредельно приближается к аффиксу a.

Условие $\lim(x + iy) = a + ib$ равносильно тому, что $\lim x = a$, $\lim y = b$. Поэтому основные теоремы о пределах, установленные для вещественных переменных, остаются в силе и для комплексных переменных. Если $|z| \to \infty$, то говорят, что $z \to \infty$, или $\lim z = \infty$.

Непрерывность функции комплексного переменного определяется так же, как и в случае функции вещественного переменного. Непрерывность функции $w = f(z)$, если $w = u + iv$, равносильна непрерывности функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$, где $w_n = u_n + iv_n$, называется *сходящимся*, если $s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ имеет предел s при $n \to \infty$; $s = \lim_{n \to \infty} s_n$ называется *суммой* ряда. Сходимость комплексного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$; если при этом сумма первого вещественного ряда есть a, а второго b, то сумма комплексного ряда $s = a + ib$.

Комплексный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд модулей $|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots$

* См. литературу на стр. 349: [43], [44], [45], [46], [47].

Если комплексный ряд сходится, то его n-й остаток $r_n = s - (w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $|r_n| < \varepsilon$, как только индекс n сделается больше некоторого числа N, зависящего от выбранного произвольно малого положительного числа ε. Комплексный ряд функций от z называется *равномерно сходящимся* в области G, если для произвольно заданного положительного ε можно выбрать такое значение индекса N, чтобы неравенство $|r_n| < \varepsilon$ было справедливо при любом $n > N$ и при всяком произвольном z из области G. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$ — непрерывные функции от z в области G и если ряд сходится равномерно в области G, то сумма S ряда также непрерывная функция от z в области G.

Если все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z)$ в области G удовлетворяют условию $|w_n(z)| \leqslant a_n$, где a_n — постоянные положительные числа, причем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то данный комплексный ряд сходится равномерно и абсолютно в области G.

Степенным называется ряд $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$, где коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — постоянные комплексные числа, а z — независимое комплексное переменное. Для всякого степенного ряда существует круг с центром в нулевой точке (*круг сходимости*) и с радиусом R (*радиус сходимости*), внутри которого (т. е. при $|z| < R$) степенной ряд абсолютно сходится, а вне которого (т. е. при $|z| > R$) ряд расходится. В некоторых точках окружности круга сходимости (т. е. при $|z| = R$) ряд может сходиться, в других расходиться. Всякий степенной ряд равномерно сходится в круге $|z| \leqslant r$, если $r < R$. Степенной ряд, для которого $R > 0$, изображает непрерывную функцию внутри его круга сходимости. Степенной ряд можно, не меняя его круга сходимости, дифференцировать и интегрировать почленно сколько угодно раз.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ определяется по формуле Коши—Адамара

$$R = \frac{1}{l},$$

где

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|},$$

т. е. l — *наибольший предел* последовательности чисел $|c_n|$ (см. стр. 134).

Пример. Для ряда $1 + z + z^4 + z^9 + \ldots$, $c_n = 1$, если n — квадратное число, и $c_n = 0$ в противном случае; последовательность $|c_1|$, $\sqrt{|c_2|}$, $\sqrt[3]{|c_3|}$, $\ldots\ldots$ $\sqrt[n]{|c_n|}$ имеет две предельные точки: 0 и 1; $l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$ и $R = \frac{1}{l} = 1$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Показательная функция $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ удовлетворяет соотношению $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ и имеет период $2\pi i$; $e^{2k\pi i} = +1$; $e^{(2k+1)\pi i} = -1$, если k — целое число.

Показательную функцию можно представить степенным рядом

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

сходящимся во всей плоскости.

Функция, обратная показательной, есть *логарифм*: при $z = re^{i\varphi}$

$$w = \operatorname{Log} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi).$$

Это функция многозначная (k — любое целое число).

Главное значение логарифма, обозначаемое через $\log z$, подчинено условию $-\pi < Im \log z \leqslant \pi$.

Степенная функция $w = z^a = e^{a \operatorname{Log} z}$ многозначна, если a не является целым числом.

Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для них имеют место все обычные тригонометрические соотношения, в частности, первые две имеют период 2π и две вторые — период π.

Гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны соотношениями

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

Любое соотношение между тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ переходит в соответствующее соотношение между гиперболическими функциями $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$, если в этом соотношении заменить $\sin z$ через $i \operatorname{sh} z$, а $\cos z$ — через $\operatorname{ch} z$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции определяются так же, как и для действительного переменного. Например, $w = \arcsin z$, если $z = \sin w$. Эти функции выражаются через логарифмы

$$\arcsin z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right);$$

$$\arccos z = i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right);$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz};$$

$$\operatorname{Arsh} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right);$$

$$\operatorname{Arch} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для того чтобы однозначная и непрерывная в окрестности точки z функция $w = f(z)$ имела производную

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

(где $\Delta z \to 0$ любым способом), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись *условия Даламбера - Эйлера*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в точке z, называется *моногенной*. Функция $w = f(z)$, моногенная в каждой точке области G, называется *аналитической* (или *регулярной*) в области G, и тогда о каждой точке области говорят, что в ней данная функция аналитическая, и каждую точку называют *обыкновенной* или *правильной* точкой функции $f(z)$. Всякая неправильная точка функции $f(z)$ называется ее *особой* точкой.

Пример. Функция $w = z^2$ ($u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$) — везде аналитическая; функция $w = 2z + i\bar{z}$ ($u = 2x + y$, $v = x + 2y$) — везде неаналитическая.

Правила дифференциального исчисления о производной суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции остаются верными и для функций комплексного переменного. Сумма, произведение, частное регулярных в G функций также регулярны в G (частное — за исключением точки, где знаменатель обращается в нуль).

Для регулярной функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Функция, аналитическая в области G, имеет в ней производные всех порядков.

Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. u и v — гармонические функции в области G.

ИНТЕГРАЛ ПО КОМПЛЕКСНОМУ ПЕРЕМЕННОМУ

Интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$ по дуге кривой C определяется как предел суммы

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}),$$

где точки $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i \ldots, z_{n-1}$ разбивают дугу C от точки $a = z_0$ до точки $b = z_n$ на n частей, причем при переходе к пределу наибольшее расстояние между двумя соседними точками должно стремиться к нулю.

Если уравнение линии C $z = z(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta R(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta I(t)\,dt,$$

где $R(t)$ и $I(t)$ — действительная и мнимая части выражения $f[z(t)]\,z'(t)$.

Таким образом, вычисление интеграла по комплексному переменному приводится к вычислению обычных определенных интегралов.

Пример. Вычислить $\int_{-1}^{+1} |z|\,dz$: а) по отрезку $[-1, +1]$ и б) по верхней половине окружности радиуса 1 с центром O:

а) $I = \int_{-1}^{+1} |z|\,dz = \int_{-1}^{0} |z|\,dz + \int_{0}^{+1} |z|\,dz = I_1 + I_2$;

$z = t$; $dz = dt$; $I_1 = \int_{-1}^{0} (-t)\,dt = \frac{1}{2}$; $I_2 = \int_0^{+1} t\,dt = \frac{1}{2}$; $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$;

б) $I = \int_{-1}^{+1} |z|\,dz$, где $z = e^{i\varphi}$, $|z| = 1$, $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$; $I = \int_\pi^0 ie^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{i}{i}e^{i\varphi}\Big|_\pi^0 = -2$.

Теорема Коши: если замкнутая кривая C расположена вся внутри некоторой односвязной области, в которой функция $f(z)$ является аналитической, то

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Значение функции, аналитической в области, ограниченной контуром C, определяется по ее значениям на контуре по *формуле Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

где z — любая точка области внутри контура C, причем интегрирование совершается по контуру C в положительном направлении.

Производные аналитической функции даются интегралами

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Пример. Вычислить, пользуясь интегральной формулой Коши, интеграл $I = \int_C \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$, если C обозначает окружность $|\zeta - i| = 1$ единичного радиуса с центром в точке i.

Преобразуем интеграл так:

$$I = \int_{|\zeta - i| = 1} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \int_{|\zeta - i| = 1} \frac{\frac{1}{\zeta + i}}{\zeta - i}\,d\zeta.$$

Функция $\frac{1}{\zeta + i}$ аналитическая всюду, кроме точки $\zeta = -i$, лежащей вне окружности $|\zeta - i| = 1$; точка $\zeta = i$ лежит внутри окружности C (это центр круга). Применяя формулу Коши к функции $\frac{1}{\zeta + i}$ при $z = i$, получим

$$\frac{1}{i+i} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{1}{\zeta + i}}{\zeta - i}\,d\zeta, \text{ т. е. } \frac{1}{2i} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

откуда

$$\int_C \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \pi.$$

Если C — произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя точку a, то

$$\int_C (z-a)^m\,dz = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i;$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Функция $f(z)$, аналитическая в точке a, имеет в этой точке производные всех порядков и в окрестности точки a разлагается в *ряд Тэйлора*:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Окружность круга сходимости ряда имеет центр в точке a и проходит через ближайшую к точке a особую точку функции.

Функцию $f(z)$ называют *голоморфной* в точке a, если она в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд относительно $z-a$. Свойство голоморфности функции комплексного переменного в точке a эквивалентно свойству ее аналитичности в той же точке.

Нулем функции $f(z)$, голоморфной в области G, называют всякую точку z_0 этой области, в которой имеет место равенство $f(z_0)=0$.

Говорят, что z_0 есть нуль порядка m для функции $f(z)$, если разложение функции в степенной ряд в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots$$

Функция $f(z)$, аналитическая внутри кольцевой области $r<|z-a|<R$ (где $r\geqslant 0$, $R\leqslant\infty$), ограниченной двумя концентрическими окружностями с радиусами r и R и с центром *в особой точке* a, разлагается в этом кольце *в ряд Лорана*:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n=\ldots+\frac{C_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+C_3(z-a)^3+\ldots;$$

коэффициенты определяются здесь по формуле

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},$$

где Γ — кривая, окружающая внутреннюю окружность и расположенная внутри кольца. Кольцо сходимости ряда Лорана, в который разложена некоторая функция $f(z)$, ограничено двумя концентрическими окружностями, проходящими через особые точки.

Ряд Тэйлора — частный случай ряда Лорана. Часть ряда Лорана, содержащая положительные степени $z-a$, называется *регулярной* или *правильной частью* ряда Лорана, а часть ряда, содержащая отрицательные степени $z-a$, называется *главной частью*.

Правильная часть ряда Лорана сходится всюду в круге $|z-a|<R$. Главная часть представляет степенной ряд относительно переменной $Z=\dfrac{1}{z-a}$, следовательно, он сходится всюду вне круга $|z-a|>r$. Ряд Лорана, которым представлена функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r<|z-a|<R$, *равномерно сходится* в любой замкнутой области, принадлежащей этому кольцу.

Ряд Лорана можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз без изменения области его сходимости.

Иногда внутренний радиус сходимости ряда Лорана бывает равен нулю, т. е. областью сходимости является круг с выброшенной центральной точкой.

Если в ряде Лорана имеется лишь конечное число членов с отрицательными степенями $z-a$, то внутренний радиус сходимости ряда Лорана обязательно равен нулю.

Найденное любым способом разложение аналитической функции в ряд по положительным и отрицательным степеням $z-a$ является лорановским разложением этой функции.

Пример. Рассмотрим некоторые разложения в ряд Тэйлора и ряд Лорана функции

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}.$$

Особые точки этой функции $z=1$, $z=2$ (*полюсы*)*. В точках 0 и ∞ эта функция аналитическая.

а) Внутри круга $|z|<1$ $f(z)$ регулярна и разлагается в ряд Тэйлора:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=(1+z+z^2+\ldots)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\ldots+\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}z^k+\ldots$$

б) Внутри круга $|z-1|<1$ функция $f(z)$ регулярна, исключая центр $z=1$, где находится полюс, а потому разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\frac{1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\ldots$$

* Вблизи полюса аналитическая функция стремится к бесконечности.

в) Вне круга $|z|>2$ функция $f(z)$ регулярна и разлагается в ряд:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\ldots+\frac{2^{k-1}-1}{z^k}+\ldots$$

г) В кольце между окружностями с центром O и радиусами 1 и 2 $(1<|z|<2)$ $f(z)$ регулярна и разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots\right)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}.$$

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

Если однозначная функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки a, за исключением самой этой точки, то точка a называется *изолированной особой точкой*. В окрестности такой точки $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, сходящийся в некотором круге с центром a, исключая самую точку a.

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции $f(z)$ в их окрестности.

Точка a называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Точка a называется *полюсом*, если $f(z)$ является бесконечно большой при приближении z к a, т. е. существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ (это означает, что $|f(z)|$ неограниченно возрастает при $z\to a$).

Точка a называется *существенно особой точкой*, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Для того чтобы a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки a не содержало главной части.

Устранимую особую точку можно «устранить», полагая $f(a)=\lim\limits_{z\to a} f(z)=C_0$, после чего функция $f(z)$ будет аналитической и в точке a.

Для того чтобы точка a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности a содержала лишь конечное число членов. Наибольший отрицательный показатель называется *порядком полюса*. Полюс 1-го порядка называется простым. Если n — порядок полюса, то в окрестности его $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция, не равная нулю в точке a. Если точка a есть нуль порядка m для функции $f(z)$ (или полюс порядка m), то та же точка для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ будет полюсом порядка m (соответственно нулем порядка m при условии $\dfrac{1}{f(z)}=0$). Видим, что нули и полюсы аналитических функций весьма просто связаны друг с другом.

Точка a тогда и только тогда является *существенно особой* для функции $f(z)$, когда главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки a содержит бесконечно много членов. В любой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает все значения, за исключением, быть может, двух (причем ∞ считается также значением функции).

Функция $f(z)$ имеет точку a существенно особой точкой одновременно с функцией $\dfrac{1}{f(z)}$.

Итак, изолированная особая точка будет устранимой, полюсом или существенно особой точкой, смотря по тому, будет ли в окрестности такой точки данная функция ограниченной, бесконечно большой или неопределенной.

Примеры: 1) Функция $e^{\frac{1}{z}}$ имеет при $z=0$ существенно особую точку. Разложение Лорана в окрестности этой точки

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$$

2) Функция $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ имеет полюс 1-го порядка при нуле функции $\sin z$.

Разделив формально степенные ряды для $\cos z$ и $\sin z$, получим:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \ldots;$$

разложение справедливо в окрестности нулевой точки.

ВЫЧЕТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке a [обозначение: $\operatorname{res} f(a)$] называется число $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$, где γ — достаточно малая окружность $|z-a| = \rho$. Величина вычета не зависит от величины ρ для достаточно малых ρ.

Вычет функции $f(z)$ в особой точке a равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности a.

В устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю. Если a есть полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n \cdot f(z)\}.$$

Для полюсов 1-го порядка имеем формулу

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a}\{(z-a) f(z)\}.$$

Если в окрестности точки a функция $f(z)$ определена как частное двух аналитических в этой точке функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(a) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в a нуль 1-го порядка (тогда $f(z)$ имеет в a полюс 1-го порядка), то имеем формулу

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Пример. Найти вычет функции $\frac{1}{\cos z}$ относительно простого полюса $a = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$.

Имеем

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{\cos a}\right) = C_{-1} = -\frac{1}{\sin a} = -\frac{1}{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n-1}.$$

Теорема о вычетах

Интеграл аналитической функции по замкнутому контуру, содержащему внутри конечное число изолированных особых точек, равен сумме вычетов относительно этих точек, умноженной на $2\pi i$:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_C \operatorname{res} f(a).$$

Теорема о вычетах имеет важные применения, в частности при вычислении интегралов функций действительного переменного.

Сущность методов вычисления интегралов, основанных на применении теоремы о вычетах, состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо (конечному или бесконечному) отрезку $[a, b]$ оси x. Дополним отрезок некоторой кривой C', которая вместе с отрезком $[a, b]$ составит замкнутый контур C, ограничивающий некоторую область G, и возьмем некоторую вспомогательную функцию $f(z)$, аналитическую в области G, кроме конечного числа особых точек, причем такую, чтобы на отрезке $[a, b]$ значения вспомогательной функции были равны значениям интегрируемой функции вещественного переменного. К вспомогательной функции применим теорему о вычетах и получим

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx + \int_{C'} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot R,$$

где R — сумма вычетов $f(z)$ в области G.

Если интеграл по C' удается вычислить или выразить через искомый интеграл, то задача вычисления искомого интеграла будет решена. В некоторых случаях вспомогательную функцию $f(z)$ выбирают так, чтобы заданная на $[a, b]$ функция была ее действительной или мнимой частью; тогда искомый интеграл находится соответственно отделением действительных или мнимых частей. В случае бесконечных отрезков $[a, b]$ обычно рассматривают семейства неограниченно расширяющихся контуров интегрирования, которые строят так, чтобы в результате предельного перехода получить интеграл по $[a, b)$. В этом случае интеграл по C' можно не вычислять, а лишь

найти его предел, причем часто оказывается, что он равен нулю. Так, если функция $g(z)$, определенная в точках некоторой полуокружности C радиуса R (т. е. $|z| = R$), стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$ при $R \to \infty$, то для любого положительного числа λ $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_C g(z)\, e^{i\lambda z} dz = 0$ (лемма Жордана).

Пример. Для вычисления интеграла Лапласа

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2}$$

выберем вспомогательную функцию $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ и будем ее интегрировать по периметру C полукруга, составленному из отрезка оси x (с концами в точках $-R$ и $+R$) и полуокружности C' (с радиусом $R > a$). Функция $f(z)$ будет аналитической во всей плоскости комплексного переменного за исключением точки ai, где она имеет простой полюс (так как при $z = ai$, $f(z) = \infty$). По теореме о вычетах имеем

$$\int\limits_C \frac{e^{iz}\, dz}{z^2 + a^2} = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int\limits_{C'} \frac{e^{iz}\, dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(ai).$$

Так как $f(z)$ представляет частное двух функций, то вычет определим по формуле

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

и получим

$$\operatorname{res} f(ai) = \frac{e^{i\cdot ai}}{2\cdot ai} = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int\limits_{C'} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

Предположим, что $R \to \infty$.

Заметим, что $|z^2 + a^2| > |z^2| - |a^2|$, откуда $\dfrac{1}{|z^2 + a^2|} < \dfrac{1}{|z|^2 - a^2}$, а так как для точек на окружности $|z| = R$, то функция $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2}$ на C' удовлетворяет неравенству $|g(z)| < \dfrac{1}{R^2 - a^2}$ и $g(z)$, при $R \to \infty$, стремится к нулю независимо от значений $\arg z$ (т. е. *равномерно* относительно $\arg z$). Следовательно, по теореме Жордана

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C'} \frac{e^{iz} dz}{z^2 + a^2} = 0;$$

поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

Заменяя $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

Отделяя в этом равенстве вещественные части, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{a},$$

а так как подинтегральная функция — четная, то

$$2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{a},$$

откуда окончательно

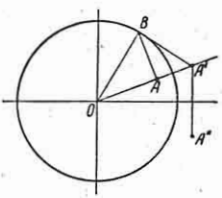
$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Преобразование плоскости, осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$, обладает свойством, что в окрестности точки z, для которой $w' \neq 0$, бесконечно малые векторы всех направлений: 1) увеличиваются (или уменьшаются) по своей длине в одно и то же число раз, равное $|w'|$ (с точностью до бесконечно-малых высшего порядка), и 2) поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg w'$. Фигуры в бесконечно малой области преобразуются в себе подобные, т. е. сохраняют форму, поэтому преобразование называется *конформным*; оно является обобщением преобразования подобия. Конформное отображение сохраняет постоянными углы между любыми двумя линиями отображаемой фигуры; в частности, координатные линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ преобразуются в два семейства взаимно ортогональных кривых, и обратно: для любого конформного отображения существует некоторая ортогональная сетка кривых (*изотермическая сетка*), которая преобразуется в декартову прямоугольную сетку.

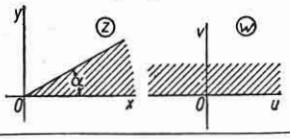
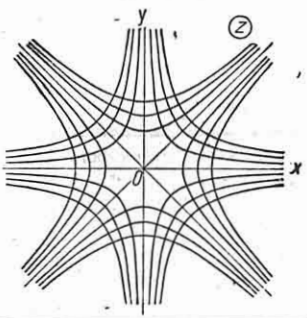
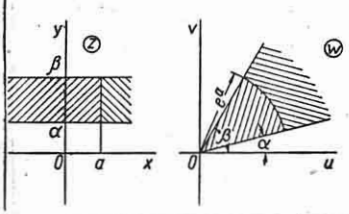
Пример. Преобразование $w = 2z + \bar{z}$ не конформно (см. фиг. 1). Преобразование $w = z^2$ конформно: координатные линии переходят в два семейства софокусных взаимно ортогональных парабол (фиг. 2); в точке $z = 0$ конформность нарушается ($w' = 0$); первый координатный квадрант переходит в верхнюю полуплоскость.

Важнейшие конформные отображения

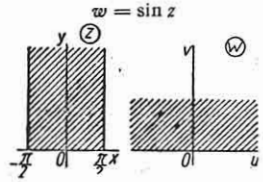
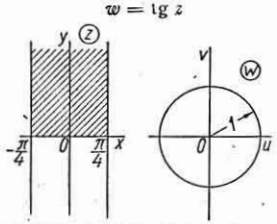
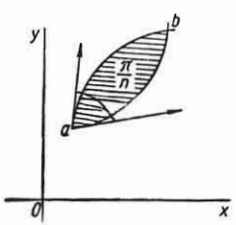
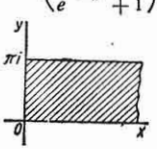
Функции	Свойства отображений
Линейная функция $w = az + b$ $(a = \rho e^{\varphi i})$	Преобразование может быть разложено на три: $t = e^{\varphi i} z$ — поворот плоскости около нулевой точки на угол φ; $s = \rho \cdot t$ — подобное растяжение в ρ раз; $w = s + b$ — параллельный сдвиг на вектор b. Фигуры плоскости z преобразуются в себе подобные, причем поворачиваются и сдвигаются. Точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ и $z_2 = \infty$ переходят сами в себя
Инверсия $w = \frac{1}{z}$  	Точка z с радиусом-вектором ρ и полярным углом φ преобразуется в точку с радиусом-вектором $\frac{1}{\rho}$ и углом $-\varphi$. Преобразование состоит из инверсии относительно единичного круга * и зеркального отражения относительно оси Ox. Круги переходят в круги (считая прямую частным случаем круга с радиусом ∞). Точка 0 переходит в ∞, точки 1 и -1 остаются неподвижными. Конформность нарушается при $z = 0$
Дробно-линейная функция $w = \frac{az + b}{cz + d}$	Преобразование может быть разложено на три: $t = cz + d$ (линейная функция); $s = \frac{1}{t}$ (инверсия); $w = \frac{a}{c} + (ad - bc)\, s$ (линейная функция). Дробно-линейная функция переводит круг в круг (считая прямую частным случаем круга); две точки, удовлетворяющие уравнению $z = \frac{az + b}{cz + d}$, не сдвигаются. Вся плоскость отображается на самое себя. Отображение определяется тремя парами соответствующих точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 и может быть записано в виде $\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$
$w = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} e^{-i\tau}$ ($\bar{a}$ — комплексное число, сопряженное числу a)	Функция переводит единичный круг ($\lvert z \rvert \leqslant 1$) в самого себя, если $\lvert a \rvert < 1$; при $\lvert a \rvert > 1$ функция переводит внутренность круга $\lvert z \rvert \leqslant 1$ во внешнюю часть круга $\lvert w \rvert \leqslant 1$. Точка $z = a$ переходит в точку $w = 0$. Направление τ в точке a переходит в направление действительной оси

* *Инверсией* относительно данного круга радиуса R называется преобразование точек плоскости, при котором точка A, находящаяся на расстоянии d от центра круга, переходит в точку A', находящуюся на радиусе OA или его продолжении, но на расстоянии $d_1 = \frac{R^2}{d}$ (см. фигуру); при этом преобразовании точки, лежащие вне круга, переходят внутрь его и обратно.

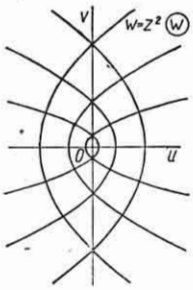
Продолжение

Функции	Свойства отображений
$w = \dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}$	Функция отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг ($\lvert w\rvert \leqslant 1$). Точка $z = a$ переходит в точку $w = 0$. Направление τ в точке a переходит в направление действительной оси
$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — *вещественные* числа	Функция отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю (если $ad - bc > 0$) или нижнюю (если $ad - bc < 0$) полуплоскость
$w = z^{a}$ (a — вещественное) $w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ 	Функция переводит угол с вершиной в начале и величиной α в угол величиной $a\alpha$. В частности, угол α функцией $w = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ переводится в полуплоскость
$w = z^2$ 	Вся плоскость z переходит в двойную плоскость w. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств гипербол $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$. Конформность нарушается при $z = 0$. Точки 0 и 1 неподвижны
$w = \sqrt{z}$	Функция двузначная; вся плоскость переходит: 1) в верхнюю полуплоскость, 2) в нижнюю полуплоскость. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств софокусных парабол с фокусом в начале и с осями, совпадающими с положительными и отрицательными направлениями оси x (см. фиг. 2 на стр. 205). Конформность нарушается при $z = 0$. Неподвижны точки 0 и 1
$w = e^{z}$ 	Показательная функция дает отображение полосы $a \leqslant y \leqslant \beta$, причем $\lvert\beta - \alpha\rvert < 2\pi$, на угол $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ с вершиной в начале. Полуполоса $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $x > a$ переходит в сектор $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $r \leqslant e^{a}$

Продолжение

Функции	Свойства отображений
$w = \operatorname{Log} z$ $(u = \ln \rho,\ v = \varphi + 2k\pi)$	Изотермическая сетка состоит из окружностей $\ln \rho = \text{const}$ и лучей $\varphi = \text{const}$, т. е. является полярной сеткой. Функция имеет бесконечное множество значений и переводит всю плоскость в ряд горизонтальных полос: $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$; $2\pi \leqslant v \leqslant 4\pi$ и т. д.
$w = \sin z$ 	Функция отображает полуполосу $y > 0$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ на верхнюю полуплоскость $v > 0$
$w = \lg z$ 	Функция отображает полосу $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{4}$ на круг $\lvert w \rvert \leqslant 1$
$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$	Функция отображает на верхнюю полуплоскость верхний полукруг единичного радиуса с центром в нулевой точке
$w = \left(\frac{z^n+1}{z^n-1}\right)^2$	Функция отображает на верхнюю полуплоскость сектор единичного радиуса с углом, равным $\frac{\pi}{n}$
$w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$ 	Функция отображает на верхнюю полуплоскость область, заключенную между двумя пересекающимися в точках a и b под углом $\frac{\pi}{n}$ дугами окружности
$w = \left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2$ 	Функция отображает на верхнюю полуплоскость полосу $0 \leqslant y \leqslant \pi$; $x > 0$

Имея произвольную аналитическую функцию, мы можем рассматривать различные конформные отображения, ею осуществляемые.



Фиг. 2. Отображение, осуществляемое функцией комплексного переменного $w = z^2$.

Таблицу важнейших конформных отображений см. на стр. 202—204.

Для практических целей больший интерес представляет значительно более трудная обратная задача, так называемая основная задача теории конформных отображений: *заданы области G и G^*; требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной области на другую.* Эту задачу можно решать, подбирая надлежащие комбинации элементарных функций

При конформных отображениях важную роль играет принцип соответствия границ и принцип симметрии Римана-Шварца: 1) если аналитическая функция устанавливает взаимно однозначное соответствие на границах областей, то соответствие взаимно однозначно и внутри области; 2) если границы областей D и Δ содержат дуги круга c и γ, которые соответствуют друг другу при конформном отображении, то отображение продолжается в областях $D + D'$ и $\Delta + \Delta'$, где D', Δ' — инверсии областей D, Δ относительно дуг c, γ, причем симметричные точки относительно c области $D + D'$ переходят в симметричные относительно γ точки области $\Delta + \Delta'$.

В ряде вопросов играет важную роль отображение, реализуемое функцией Н. Е. Жуковского $w = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Оно переводит внешность круга $|z| > r$ и одновременно внутренность круга $|z| < \frac{1}{r}$ $(r > 1)$ во внешность эллипса с полуосями $\frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ и $\frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$. В частности, внешность и внутренность единичного круга переходят на плоскость с разрезом $y = 0$, $-a \leqslant x \leqslant +a$.

Отображение верхней полуплоскости на внутренность ограниченного многоугольника реализуется функцией Кристоффеля-Шварца: если $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ $(0 < \alpha_k \leqslant 2,\ k = 1, 2, \ldots, n)$ — углы многоугольника при вершинах, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки вещественной оси, соответствующие вершинам многоугольника, то отображение дается функцией

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}\, dz + C',$$

где C и C' — некоторые постоянные.

Та же формула может быть применена к отображению круга на многоугольник; при этом a_k будут точки окружности, соответствующие вершинам многоугольника.

ГЛАВА IX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *

Уравнение называется *дифференциальным*, если, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, оно содержит производные неизвестных функций (или их дифференциалы).

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной.

Уравнение в частных производных содержит несколько независимых переменных, функции этих переменных и частные производные этих функций.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется система функций, подстановка которых вместо неизвестных обращает уравнение в тождество.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений решения могут быть *общие* (содержащие столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения, см. стр. 213), *частные*, получающиеся из общих при частных значениях произвольных постоянных, и *особые*, которые вообще не содержатся в общем решении, т. е. не получаются из него при частных значениях произвольных постоянных (см. стр. 210).

Решение дифференциальных уравнений в частных производных содержит произвольные функции.

Надлежащим выбором произвольных функций получается частное решение.

* См. литературу на стр. 349: [58], [35], [25].

ОБЫКНОВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА **

Виды уравнений:
неявный вид

$$F(x, y, y') = 0,$$

где

$$y' = \frac{dy}{dx};$$

явный вид

$$y' = f(x, y),$$

или

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ содержит одно произвольное постоянное C.

Соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* уравнения, если y как неявная функция есть решение дифференциального уравнения. *Частный* интеграл получается из общего при частном значении C. *Особый* интеграл не содержится в общем интеграле.

Если x, y — координаты точек плоскости, то кривая, соответствующая решению $y = \varphi(x, C_0)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения; общему решению $y = \varphi(x, C)$ или общему интегралу $\Phi(x, y, C) = 0$ соответствует *семейство интегральных кривых* дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, связывающее координаты x, y точки интегральной кривой и угловой коэффициент y' касательной к кривой в этой точке, выражает свойство, общее всем кривым семейства.

При выполнении условий теоремы о существовании и единственности решения (стр. 210) через заданную точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая.

** См. литературу на стр. 349: [58], [54], [51], [49], [56].

Чтобы выделить частное решение, надо задать C или задать значение y_0 искомой функции y, принимаемое при $x = x_0$.

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение — значит, найти все его решения.

В следующих случаях удается выразить общий интеграл в конечном виде или через неопределенные интегралы (в квадратурах).

Уравнение с разделенными переменными имеет вид

$$M(x)\,N(y)\,dx + P(x)\,Q(y)\,dy = 0.$$

Общий интеграл его

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

В некоторых случаях предварительной подстановкой уравнение сводится к этому типу. Например, уравнение $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$, где a, b — постоянные, заменой функции y новой неизвестной функцией $u = ax + by$ сводится к виду

$$\frac{du}{dx} = bf(u) + a.$$

Однородные уравнения. Функция $F(x, y)$ называется *однородной*, если она удовлетворяет условию $F(tx, ty) = t^m F(x, y)$; m — *степень* однородности. Дифференциальное уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)\,dy = 0$ называется *однородным*, если M и N — однородные функции одной и той же степени однородности. Уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

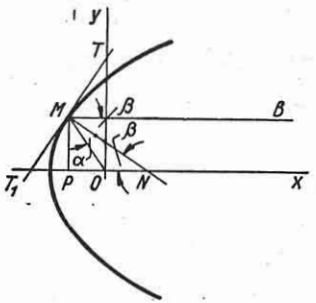
Замена $u = \frac{y}{x}$ приводит его к уравнению с разделенными переменными.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right),$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — постоянные, приводится к однородному подстановкой $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$; постоянные α, β находятся решением системы уравнений $a\alpha + b\beta + c = 0$, $a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$ при условии $ab_1 - a_1b \neq 0$. Если же $ab_1 - a_1b = 0$, то дифференциальное уравнение преобразуется к виду $\frac{dy}{dx} = f_1(ax + by)$; подстановка $v = ax + by$ приводит уравнение к виду с разделенными переменными.

Пример. Найти форму зеркала, которое все лучи, выходящие из точки O, отражало бы параллельно данному направлению. Ищем форму зеркала в виде поверхности вращения с осью Ox (данное направление); точка O — начало координат. Пусть сечение поверхности меридианной плоскостью xOy есть $y = f(x)$ — искомая кривая, $M(x, y)$ — текущая точка. Дифференциальное уравнение получится, если приравняем (фиг. 1)



Фиг. 1. К определению формы зеркала.

тангенсы углов BMT и OMT_1 (угол падения равен углу отражения): OM — падающий луч, MB — отраженный, MN — нормаль: $\operatorname{tg} BMT = \frac{dy}{dx}$;

$$\angle OMN = \alpha,\ \angle BMN = \angle MNO = \angle\beta;$$

$$\angle\alpha = \angle\beta;\ ON = OM = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$OMT_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\operatorname{tg} OMT_1 = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{PN}{y}$; отрезок $PN = PO + ON = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$. Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ или $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ — однородное. Замена $u = \frac{y}{x}$ или $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ приводит уравнение к виду $\frac{u\,du}{\sqrt{1 + u^2} - (1 + u^2)} = \frac{dx}{x}$ — уравнение с разделенными переменными. Но проще решать уравнение искусственно:

$$y\,dy + x\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;$$

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx;\quad d\sqrt{x^2 + y^2} = dx,$$

откуда $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$ или $y^2 = 2Cx + C^2$ — параболы с фокусом в начале координат. Искомая форма зеркала — параболоид вращения.

Линейное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x).$$

В случае $Q(x) \equiv 0$ в уравнении $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ (однородное относительно y и $\frac{dy}{dx}$) переменные разделяются, и его общее решение имеет вид $y = C\varphi(x)$, $\varphi(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$. Решение неоднородного (исходного) уравнения ищем в форме $y = u\varphi(x)$ (метод вариации произвольной постоянной). Общее решение имеет вид

$$y = e^{-\int P dx}\left(C + \int Q e^{\int P dx}\,dx\right).$$

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$

сводится к линейному уравнению подстановкой $z = y^{-n+1}$.

Уравнение Риккати

$$y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x)$$

вообще не интегрируется в квадратурах, но решение существует в силу теоремы Коши (см. стр. 210). Если известно одно частное решение $y_1(x)$, то подстановка $y = y_1 + z$ приводит к уравнению Бернулли относительно z.

Уравнение в полных дифференциалах. Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

в котором $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (условие интегрируемости), называется уравнением в полных дифференциалах. Левая часть $M dx + N dy$ есть полный дифференциал некоторой функции u: $du = M\,dx + N\,dy = 0$, и решение имеет вид

$$u = \int M(x, y)\,dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right]dy = C.$$

Если $M\,dx + N\,dy$ не является полным дифференциалом некоторой функции, то существует так называемый *интегрирующий множитель* $\mu(x, y)$, умножением на который уравнение приводится к виду в полных дифференциалах. Условие интегрируемости $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ есть уравнение в частных производных, служащее для определения μ.

Пример. Линейное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx}.$$

Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. В общем виде уравнение 1-го порядка $F(x, y, p) = 0$, где $p = \frac{dy}{dx}$, определяющее p как неявную многозначную функцию от x, y, разрешают относительно p: $p = f_1(x, y), p = f_2(x, y), \ldots, p = f_n(x, y)$ (f_i — однозначные, непрерывные ветви многозначной функции p). Если общие интегралы этих уравнений $\Phi_1(x, y, C) = 0$, $\Phi_2(x, y, C) = 0, \ldots, \Phi_n(x, y, C) = 0$, то общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\Phi_1(x, y, C)\,\Phi_2(x, y, C)\ldots\Phi_n(x, y, C) = 0.$$

В некоторых случаях можно найти общий интеграл без того, чтобы искать явные функции p от x, y.

1. Если уравнение имеет вид $F(x, p) = 0$ и может быть решено относительно x, то, дифференцируя $x = f(p)$, получим

$$dx = f'(p)\,dp;$$

так как $dy = p\,dx$, то

$$dy = pf'(p)\,dp.$$

Общий интеграл дается параметрическим представлением

$$x = f(p);\ y = C + \int pf'(p)\,dp.$$

Исключая параметр p, можно общий интеграл получить в виде $\Phi(x, y, C) = 0$.

2. Аналогично рассматривается уравнение $F(y, p) = 0$. Если $y = f(p)$, то

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C.$$

3. Если $F(x, p) = 0$ можно параметризовать:

$$x = u(t),\ p = v(t),\ \text{и}\ F[u(t), v(t)] = 0,$$

то

$$dy = p\,dx = v(t)\,u'(t)\,dt.$$

Получаем общее решение в параметрической форме:

$$x = u(t),\quad y = \int v(t)\,u'(t)\,dt + C.$$

4. Аналогично получается общее решение уравнения в случае, когда

$F(y, p) = 0$ можно параметризовать: $y = u(t)$, $p = v(t)$, тогда

$$x = \int \frac{u'(t)}{v(t)}\,dt + C, \quad y = u(t).$$

Пример. $p^3 - y^2(a - p) = 0$. Пусть $y = pt$; из данного уравнения

$$p = \frac{at^2}{1+t^2}; \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

Из соотношения $dy = p\,dx$ получаем

$$dx = \frac{1+t^2}{at^2} \cdot \frac{a(3t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt,$$

откуда

$$x = \int \frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt = t + 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Решение:

$$x = t + 2\operatorname{arctg} t + C; \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}.$$

5. Если уравнение $F\left(\frac{y}{x}, p\right) = 0$ можно параметризовать в виде $\frac{y}{x} = u(t)$, $p = v(t)$, $F[u(t), v(t)] \equiv 0$, то, дифференцируя соотношение $y = xu(t)$ по x, получим

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx},$$

откуда

$$v - u = xu'\frac{dt}{dx}$$

или $\frac{dx}{x} = \frac{u'}{v-u}\,dt$ — уравнение с разделенными переменными. Общее решение:

$$x = Ce^{\int \frac{u'\,dt}{v-u}}; \quad y = xu(t).$$

6. Если уравнение $F(x, y, p) = 0$ содержит y или x в первой степени, например $y = f(x, p)$, то $dy = p\,dx$, $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$, и если для последнего уравнения найдем общее решение $p = \varphi(x, C)$, то общее решение исходного уравнения

$$y = f(x, \varphi(x, C)).$$

Уравнение Лагранжа $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ решается указанным приемом. После дифференцирования по x получаем

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Считая x искомой функцией, p — аргументом, находим $[\varphi(p) \neq p]$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

— линейное уравнение. Общий интеграл его вместе с исходным дифференциальным уравнением дает параметрическое представление общего интеграла уравнения Лагранжа.

Если $\varphi(p) - p = 0$ имеет корнем $p = C_0$, то $y = \varphi(C_0)\,x + \psi(C_0)$ есть особое решение уравнения Лагранжа.

Уравнение Клеро $y = px + \psi(p)$ тем же методом дифференцирования приводится к уравнению

$$\frac{dp}{dx}[\psi'(p) + x] = 0.$$

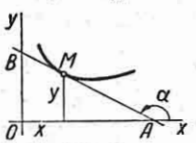
а) $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$. Общему интегралу $y = Cx + \psi(C)$ соответствует семейство прямых.

б) $\psi'(p) + x = 0$; исключая p из $\psi'(p) + x = 0$, $y = px + \psi(p)$, получим особый интеграл уравнения Клеро. Геометрически особый интеграл означает огибающую семейства прямых, представляющего общее решение (см. стр. 210).

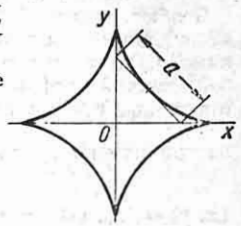
Пример. Найти кривую, отрезок касательной которой между осями координат равен $a = \text{const}$.

Если $y = f(x)$ — искомая кривая в системе xOy, то касательная $Y - y = y'(X - x)$ отсекает на осях отрезки $OB = y - xy'$ и $OA = \frac{xy' - y}{y'}$ (фиг. 2).

Получаем уравнение



Фиг. 2.



Фиг. 3. Астроида.

$(y - xp)^2 + \frac{(xp - y)^2}{p^2} = a^2$ или $y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ — уравнение Клеро.

Общее его решение $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$. Особый интеграл получим, исключая p из уравнений $x \pm \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} = 0$ и $y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$; вставляя сюда $x = \mp \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}$, найдем $y = \pm \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}$. Исключение p дает $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида) (фиг. 3).

Теорема (Коши) существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x, y)$: если $f(x, y)$ есть однозначная, непрерывная функция в некоторой области D изменения переменных x, y и если для любых пар точек (x, y_1), (x, y_2) в этой области $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N|y_1 - y_2|$, где N — некоторая постоянная, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ заданного уравнения, определенное и непрерывное внутри D, принимающее при $x = x_0$ значение y_0, причем точка (x_0, y_0) принадлежит области D. Считая x_0 постоянным, а y_0 параметром, меняющимся в некотором промежутке, получим зависящее от одного параметра $y_0 = C$ семейство решений $y = \varphi(x, C)$, т. е. общее решение. Если существует непрерывная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, то существует $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$.

Условие Липшица выполняется, если $f(x, y)$ имеет в области D ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$. В этом случае постоянная N равна верхней границе $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в области D.

Особые точки. Если условия предыдущей теоремы в точке (x_0, y_0) не выполняются, то такую точку называют особой точкой уравнения. Если вблизи точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ является неограниченной, то $\frac{1}{f(x, y)} \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$; примем $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$, тогда для уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$ условия предыдущей теоремы выполнены.

Особая точка называется изолированной, если условия теоремы выполняются вблизи некоторой точки везде, кроме самой точки. Примером такой точки (x_0, y_0) будет случай $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, если $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$. В частности, уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ имеет в точке (0,0) изолированную особую точку. Поведение интегральных кривых в ее окрестности зависит от корней квадратного уравнения $\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ad = 0$. Точка может быть *узлом* [интегральные кривые проходят через (0,0)], *седлом* [две прямые проходят через (0,0)], *фокусом* [спиральные интегральные кривые приближаются к (0,0) асимптотически], *центром* [замкнутые кривые окружают (0,0)].

Особое решение. *Особым* решением называют такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в окрестности каждой точки (x, y) особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку. В частности, если $f(x, y)$ непрерывна во всей области D, то особые решения могут проходить через те точки, в которых не выполняется условие Липшица. Последнее не выполняется в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ становится бесконечной.

Такой простейший случай встречается, когда $f(x, y)$ — иррациональная функция от y в уравнении $p = f(x, y)$. Освободившись от иррациональности, получим $F(x, y, p) = 0$ — алгебраическое уравнение n-й степени относительно p. Если составить

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

и исключить p из этих двух уравнений, то получается $\Phi(x, y) = 0$ — дискриминантная кривая (стр. 268). Если функция $y = \varphi(x)$, определенная этим уравнением дискриминантной кривой, является решением дифференциального уравнения $F(x, y, p) = 0$, то такое решение (вообще говоря) особое.

Если дискриминантная кривая является особым решением, то она — огибающая обыкновенных интегральных кривых.

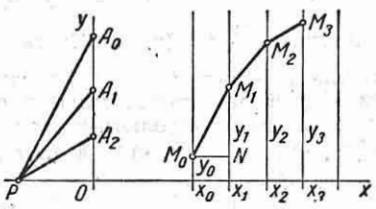
Дискриминантная кривая может не являться особым решением уравнения, тогда она состоит из особых точек обыкновенных интегральных кривых.

Если известен общий интеграл $\Phi(x, y, C)=0$ дифференциального уравнения, то огибающая этого семейства интегральных кривых дает особое решение (см. стр. 268).

Поле направлений. В каждой точке области D можно из уравнения $y' = f(x, y)$ получить направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Совокупность этих направлений образует *поле направлений*. Поле направлений удобно представить при помощи изоклин. Линия $f(x, y) = C$ называется *изоклиной*; каждой точке такой линии соответствует одно и то же направление с угловым коэффициентом C. Проинтегрировать уравнение значит построить кривую, выходящую из данной точки (x_0, y_0), которая, проходя через точку поля, касалась бы в этой точке уже построенной стрелки, указывающей направление поля.

Приближенные решения.

1. *Способ Эйлера.* Чтобы построить интегральную кривую уравнения $y' = f(x, y)$, проходящую через точку



Фиг. 4. Графическое интегрирование.

$M_0(x_0, y_0)$, надо через эту точку провести луч с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения его в точке M_1 с прямой $x = x_1$, параллельной Oy. Ордината y_1 точки M_1 определяется из равенства $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. На фиг. 4 $M_0N = x_1 - x_0$; $NM_1 = y_1 - y_0$; $M_0M_1 \parallel PA_0$; $\operatorname{tg}(\angle OPA_0) = f(x_0, y_0) = \dfrac{OA_0}{OP}$; $OA_0 = f(x_0, y_0)$, если $OP = 1$.

Из точки $M_1(x_1, y_1)$ проводят луч M_1M_2 с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения с прямой $x = x_2$; тогда $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$ и т. д. Если надо определить y для заданного x, то отрезок $[x_0, x]$ делят на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, последовательно вычисляют ординаты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ по предыдущим формулам, последнюю ординату Y находят по формуле $Y - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1})$ и полагают $y \approx Y$.

Пример. Найдем решение уравнения $y' = \dfrac{xy}{2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Положим $x_1 - x_0 = \ldots = x_{k+1} - x_k = 0{,}1$; $x_0 = 0$; $y_{k+1} - y_k = \Delta y$.

Вычисления располагаем в форме следующей таблицы:

x	y	$\dfrac{xy}{2}$	$\Delta y = \dfrac{xy}{2} \cdot 0{,}1$
0	1	0	0
0,1	1	0,05	0,005
0,2	1,005	0,1005	0,0101
0,3	1,0151	0,1523	0,0152
0,4	1,0303	0,2061	0,0206
0,5	1,0509	0,2627	0,0263
0,6	1,0772	0,3232	0,0323
0,7	1,1095	0,3883	0,0388
0,8	1,1483	0,4593	0,0459
0,9	1,1942	0,5374	0,0537

2. *Способ последовательных приближений.* Уравнение $y' = f(x, y)$ переписывается в виде $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$.

Первое приближение:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx;$$

второе: $y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$; ... n-ое приближение: $y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx$.

Последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ — точное решение уравнения, причем $y(x_0) = y_0$.

3. *Применение рядов.* Можно искать решение в виде ряда Тейлора

$$y = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y_0''' + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}y_0^{(n)} + \ldots,$$

коэффициенты $y_0', y_0'', y_0''', \ldots$ находятся из $y' = f(x, y)$ последовательным дифференцированием и вычислением производных при $x = x_0$, $y = y_0$.

4. *Метод акад. С. А. Чаплыгина* *. Пусть в некоторой области D плоскости (x, y) дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ обладает единственным решением $y(x)$, удовлетворяющим условию $y(x_0) = y_0$, т. е. интегральная кривая $y = y(x)$ проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ области D (см. стр. 210, теорема Коши).

Метод Чаплыгина для приближенного интегрирования уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ состоит в том, чтобы в области D найти такие проходящие через данную точку M_0 две кривые $y = u(x)$ и $y = v(x)$, из которых кривая $y = u(x)$ лежит ниже интегральной кривой $y = y(x)$, т. е. $u(x) < y(x)$, а кривая $y = v(x)$ лежит выше интегральной кривой $y = y(x)$, т. е. $v(x) > y(x)$, и чтобы эти кривые были близки друг к другу. Кратко такую пару кривых будем обозначать $[u(x), v(x)]$. В точке M_0

$$u(x_0) = v(x_0) = y(x_0) = y_0.$$

Такая пара функций $[u, v]$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{du}{dx} - f(x, u) < 0; \quad \frac{dv}{dx} - f(x, v) > 0.$$

Для решения этих неравенств следует выбрать две функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, между которыми заключена данная функция $f(x, y)$, т. е.

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y),$$

причем эти функции должны быть такими, чтобы легко интегрировались уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y) \text{ и } \frac{dy}{dx} = f_2(x, y). \quad (1)$$

Решения этих уравнений $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие условиям $u(x_0) = v(x_0) = y_0$, образуют требуемую пару $[u, v]$.

Чаплыгин предложил в качестве таких дифференциальных уравнений (1) использовать линейные дифференциальные уравнения. Это возможно, если производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ сохраняет знак в рассматриваемой области D.

Первая пара $[u_1(x), v_1(x)]$ выбирается произвольно. Тогда, если известна пара $[u_n(x), v_n(x)]$, то следующая пара $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ получается как решение двух линейных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n}(y - u_n) + f(x, u_n);$$

$$\frac{dy}{dx} = f'_y(x, u_n)(y - u_n) + f(x, u_n).$$

Решения u_{n+1}, v_{n+1} должны удовлетворять условиям: $u_{n+1}(x_0) = v_{n+1}(x_0) = y_0$. Пара $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ находится внутри пары $[u_n, v_n]$ и сама содержит внутри себя искомую интегральную кривую $y = y(x)$.

Получается последовательность пар $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]$, ..., $[u_n, v_n]$..., проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, содержащих каждая все следующие за ней и как угодно близко подходящие к искомой интегральной кривой $y = y(x)$.

Для оценки разности $\delta_n(x) = v_n(x) - u_n(x)$ мы обозначим через $[x_0, x_1]$ тот отрезок, на котором производится приближенное интегрирование данного уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Пусть длина отрезка $x_1 - x_0 = l > 0$. Обозначим через λ и μ два положительных числа, превышающих абсолютные значения $|f'_y(x, y)|$ и $|f''_{yy}(x, y)|$ в рассматриваемой области D:

$$|f'_y(x, y)| < \lambda, \quad |f''_{yy}(x, y)| < \mu.$$

Обозначим $C = \frac{e^{-\lambda l}}{2\mu l}$. Если первая пара $[u_1(x), v_1(x)]$ удовлетворяет условию, чтобы на всем отрезке $[x_0, x_1]$ выполнялось неравенство

$$\delta_1(x) = v_1(x) - u_1(x) < C,$$

то все дальнейшие разности $\delta_n(x)$ необходимо удовлетворяют неравенству

$$\delta_n(x) < \frac{2C}{2^{2^n}},$$

справедливому для всех значений x на отрезке $[x_0, x_1]$.

5. *Численное интегрирование** (метод Рунге-Кутта). Для нахождения точек интегральной кривой, проходящей через (x_0, y_0), берут $h = \Delta x$ — при-

* См. литературу на стр. 349 [31].

* См. литературу на стр. 351 [124].

ращение аргумента — и составляют величины k_1, k_2, k_3, k_4 по формулам

$$k_1 = f(x_0, y_0)\,h;$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ y_0 + \frac{k_1}{2}\right)h;$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2};\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right)h;$$

$$k_4 = f(x_0 + h;\ y_0 + k_3)\,h.$$

Полагают $\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$. Находят $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + \Delta y$. Таким же образом вычисляют (x_2, y_2) и т. д. Зная x_n, y_n, находят

$$k_1 = f(x_n, y_n)\,h;$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2};\ y_n + \frac{k_1}{2}\right)h;$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2};\ y_n + \frac{k_2}{2}\right)h;$$

$$k_4 = f(x_n + h;\ y_n + k_3)\,h;$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$x_{n+1} = x_n + h;\quad y_{n+1} = y_n + \Delta y.$$

ОБЫКНОВЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, содержащая n произвольных постоянных и обращающая уравнение в тождество, называется *общим решением* уравнения. Соотношение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию независимой переменной, называется *общим интегралом* уравнения. Произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ должны входить в общее решение (или в общий интеграл) так, чтобы надлежащим выбором для них частных значений можно было получить любое частное решение, соответствующее любым *начальным условиям*: при $x = x_0$ искомая функция y и ее производные $y', \ldots, y^{(n-1)}$ принимают заданные *начальные значения* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Существование и единственность решения обеспечиваются теоремой Коши (см. стр. 214).

Понижение порядка. Важным методом решения уравнения $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ является замена переменных, приводящая к уравнениям низшего порядка.

1. Уравнение $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$. Последовательным интегрированием получаем общее решение

$$y = \int \ldots \int f(x)\,dx^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n$$

или

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

2. Уравнение $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ заменой $u = \frac{d^k y}{dx^k}$ приводится к уравнению $F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0$. Используя решение последнего $u = u(x)$, находим y из уравнения $\frac{d^k y}{dx^k} = u(x)$.

Пример. $y'' - xy''' + (y''')^2 = 0$. Замена $y'' = p$ приводит к уравнению Клеро

$$p = x\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3.$$

Общее решение

$$p = C_1 x + C_1^3,$$

откуда

$$y = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_1^3 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

3. Уравнение $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка после замены $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)$ и т. д.

Пример. $yy'' - y'^2 = 0$; $y' = p$; $y'' = p\frac{dp}{dy}$; $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, откуда $p = 0$; $y\frac{dp}{dy} - p = 0$.

Первое уравнение дает $y = C_1$, а второе уравнение дает $y = C_1 e^{C_2 x}$, причем при $C_2 = 0$ получается первое решение.

4. Уравнение $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ называется *однородным* порядка k относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, если имеет место тождество $F(x, ty, ty', ty'', \ldots) = t^k F(x, y, y', y'', \ldots)$. Заменой $y = e^{\int z\,dx}$ порядок уравнения понижается на 1.

Пример. Уравнение $xyy'' - 2xy'^2 + yy' = 0$ — однородное 2-го порядка относительно y, y', y''. Замена $y = e^{\int z\,dx}$, $y' = ze^{\int z\,dx}$, $y'' = (z' + z^2)e^{\int z\,dx}$ дает $z' + \frac{z}{x} = z^2$ — уравнение Бернулли, общий интеграл которого $z = \frac{1}{x}(C_1 - \ln x)^{-1}$. Отсюда $\ln y = \int z\,dx = \int \frac{dx}{x(C_1 - \ln x)} + \ln C_2$; $y = \frac{C_2}{C_1 - \ln x}$.

Система n дифференциальных уравнений 1-го порядка с неизвестными функциями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в нормальной форме*

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

имеет единственную систему решений $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определенную и непрерывную в некотором промежутке $|x - x_0| < h$, принимающую при $x = x_0$ заданные начальные значения $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, n)$, если функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны относительно $x, y_1, \ldots, y_n$ и удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(x, y_1 + \Delta y_1, \ldots, y_n + \Delta y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K(|\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_n|)$$

для значений x, y_i и $y_i + \Delta y_i$, лежащих в некоторой области вблизи их начальных значений; $K > 0$ — некоторое постоянное (теорема Коши).

Уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ приводится к системе в нормальной форме из n уравнений 1-го порядка вида $y' = y_1$, $y_1' = y_2, \ldots, y_{n-1}' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ с искомыми функциями $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ и аргументом x.

Система дифференциальных уравнений порядка выше первого аналогично приводится к нормальной форме введением новых неизвестных функций.

Нормальная система уравнений эквивалентна, вообще говоря, одному уравнению порядка n. Чтобы его получить, надо 1-е уравнение дифференцировать по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_n = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Полученное уравнение надо снова дифференцировать по x:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n = F_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

и т. д.; последнее равенство получим в виде

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Если теперь из системы

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1, \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}$$

определить $n - 1$ величин $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ и подставить их в последнее уравнение $\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n$, то получим одно уравнение n-го порядка:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right),$$

заменяющее систему. Если решение этого уравнения $y_1(x)$ дифференцировать и вычислить $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$, то можно получить $y_2, y_3, \ldots, y_n$ как функции x, удовлетворяющие системе.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейное относительно неизвестной функции и ее производных дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x)$$

и называется *неоднородным*, если $f(x) \not\equiv 0$. Функции $p_j(x)$ $(j = 1,2,\ldots,n)$, $f(x)$ — непрерывные. В случае $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным* или *без правой части*. Если в однородном уравнении $p_j(x)$ те же самые, как и в неоднородном, то однородное уравнение называется *соответствующим* данному неоднородному уравнению.

Если y_1, $y_2,\ldots, y_k$ — частные решения однородного уравнения, то $y = C_1y_1 + \ldots + C_ky_k$ — также решение того же уравнения, где C_j — произвольные постоянные. Система функций $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация $C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$ ни при каких значениях C_1, $C_2,\ldots, C_n$, кроме $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, не обращается тождественно в нуль. Необходимым и достаточным условием линейной независимости $y_1,\ldots, y_n$ является неравенство

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0;$$

W называется определителем Вронского для $y_1, y_2,\ldots, y_n$. Если функции $y_1, y_2,\ldots y_n$ суть линейно независимые частные решения однородного уравнения, то их называют *фундаментальной* системой решений.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n$, где $y_1,\ldots, y_n$ — фундаментальная система решений, C_j — произвольные постоянные. Последние можно определить так, чтобы частное решение удовлетворяло начальным условиям $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$.

Если известен частный интеграл $y_1(x)$ однородного уравнения, то подстановкой $z = \frac{y}{y_1}$, а затем $z' = u$ получим линейное уравнение порядка $n - 1$.

Общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Если известно общее решение $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ соответствующего однородного уравнения, то решение неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных. Решение имеет вид $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)y_n$, где неизвестные функции $C_j(x)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений относительно производных $\frac{dC_j}{dx}$:

$$y_1\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_n\frac{dC_n}{dx} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n-2)}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_n^{(n-2)}\frac{dC_n}{dx} = 0;$$

$$y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx} = f(x).$$

Решив систему и получив $\frac{dC_j}{dx} = \varphi_j(x)$, находим C_j квадратурами: $C_j = \int \varphi_j(x)\,dx + A_j$; A_j — постоянные интегрирования.

Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$ имеет решением функцию e^{kx}, где k — корень *характеристического* уравнения $k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$. Если все корни $k_1, k_2,\ldots, k_n$ различны, то $e^{k_1x}, e^{k_2x},\ldots, e^{k_nx}$ образуют фундаментальную систему решений и $y = C_1e^{k_1x} + \ldots + C_ne^{k_nx}$ — общее решение заданного (однородного) уравнения; $C_1,\ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Если корни k комплексные, то они попарно сопряженные (при вещественных $a_1, \ldots, a_n$), например $k_r = \alpha + \beta i$, $k_{r+1} = \alpha - \beta i$, тогда e^{k_rx}, $e^{k_{r+1}x}$ заменяются действительными функциями $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, и получается новая фундаментальная система.

Если $k = k_s$ имеет кратность m, то в фундаментальную систему решений, кроме $e^{k_s x}$, надо включить функции $xe^{k_s x}$, $x^2 e^{k_s x}, \ldots, x^{m-1} e^{k_s x}$.

Если $k = \alpha + \beta i$ — корень кратности m ($\alpha - \beta i$ — корень той же кратности, если $a_1, \ldots, a_n$ — вещественные), то в фундаментальную систему решений входят функции

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

$$xe^{\alpha x} \cos \beta x; \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x;$$

. . . . . .

$$x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Неоднородное уравнение $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ решается методом вариации произвольных постоянных. Его частное решение $\bar{y}(x)$ можно найти по формуле

$$\bar{y}(x) = \int_0^x Y(x - t) f(t)\, dt,$$

где $Y(x)$ — решение соответствующего однородного уравнения с условиями

$$Y(0) = 0; \quad Y'(0) = 0; \ldots;$$

$$Y^{(n-2)}(0) = 0; \quad Y^{(n-1)}(0) = 1;$$

тогда общее решение имеет вид $y = \bar{y} + \bar{z}$, причем z — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения находится методом неопределенных коэффициентов в случае, когда

$$f(x) = e^{ax} [P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx],$$

где P и Q — многочлены от x. Решение $\bar{y}$ подбирается в форме правой части $f(x)$:

$$\bar{y} = e^{ax} [P_1(x) \cos bx + Q_1(x) \sin bx],$$

если $a + bi$ не является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, и в форме

$$\bar{y} = x^m e^{ax} [P_1(x) \cos bx + Q_1(x) \sin bx],$$

если $a + bi$ — корень кратности m характеристического уравнения. Здесь P_1 и Q_1 — многочлены от x с неопределенными коэффициентами степени, совпадающей с наибольшей из степеней P и Q.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, где $\bar{y}_1$ — решение уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_n y = f_1(x)$, $\bar{y}_2$ — решение уравнения $y^{(n)} + \ldots + a_n y = f_2(x)$.

Пример. $y^{IV} + y'' = x + e^x \sin x + x \cos x$. Характеристическое уравнение $k^4 + k^2 = 0$ имеет корни: $k_1 = k_2 = 0$; $k_3 = i$; $k_4 = -i$.

Фундаментальная система решений: $e^{0x} = 1$, $xe^{0x} = x$, e^{ix}, e^{-ix}, причем e^{ix}, e^{-ix} заменяются функциями $\cos x$, $\sin x$. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Частное решение ищем в виде

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3,$$

где $\bar{y}_1$ — частное решение уравнения $y^{IV} + y'' = x$; $\bar{y}_2$ — частное решение уравнения $y^{IV} + y'' = e^x \sin x$; $\bar{y}_3$ — частное решение уравнения $y^{IV} + y'' = x \cos x$.

Полагаем

$$\bar{y}_1 = x^2 (Ax + B);$$

$$\bar{y}_2 = e^x (C \cos x + D \sin x);$$

$$\bar{y}_3 = x [(M_1 x + N_1) \cos x + (M_2 x + N_2) \sin x].$$

Вычисляя $\bar{y}''$, $\bar{y}^{IV}$, подставляя в соответствующее неоднородное уравнение, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих частей равенства, получаем

$$6A = 1; \quad B = 0; \quad 6C = -1; \quad D = 2C = -\frac{1}{3};$$

$$M_1 = 0; \quad 4N_1 = -5; \quad 4M_2 = -1; \quad N_2 = 0.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{6} x^3 + e^x \left(-\frac{1}{6} \cos x - \frac{1}{3} \sin x \right) + x \left[-\frac{5}{4} \cos x - \frac{1}{4} x \sin x \right].$$

Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. Уравнение Эйлера

$$(ax + b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (ax + b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} (ax + b) \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

заменой x новым аргументом t по формуле $ax + b = e^t$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

2. Уравнение $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$ заменой $x=\cos\varphi$ приводится к виду $\frac{d^2y}{d\varphi^2}+n^2y=0$. Фундаментальная система решений:

$y_1=\cos(n\arccos x)$; $y_2=\sin(n\arccos x)$.

При целом n функция $y_1(x)$ является многочленом степени n, так как $\cos n\varphi$ выражается в виде многочлена от $\cos\varphi$; в этом случае $\frac{y_1}{2^{n-1}}$ называется *полиномом Чебышева* n-й степени (см. стр. 224).

Система линейных дифференциальных уравнений

Решением линейной однородной системы уравнений

$$\frac{dy_i}{dx}+a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{in}y_n=0$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

называется совокупность функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, удовлетворяющих тождественно системе уравнений. Здесь a_{ik} — функции от x, непрерывные на некотором отрезке S $(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$.

n частных решений $y_1^{(k)}, y_2^{(k)},\ldots,y_n^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ образуют фундаментальную систему решений, если определитель

$$D=\begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}\neq 0$$

на отрезке S. Общее решение системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} y_1&=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)}+\ldots+C_ny_1^{(n)};\\ y_2&=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)}+\ldots+C_ny_2^{(n)}; \quad (2)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}, \end{aligned}$$

где произвольные постоянные $C_1,\ldots,C_n$ можно определить так, что функции $y_1,\ldots,y_n$ будут при $x=x_0$ $(x_1\leqslant x_0\leqslant x_2)$ удовлетворять начальным условиям $y_1(x_0)=y_1^{(0)}$, $y_2(x_0)=y_2^{(0)},\ldots,y_n(x_0)=y_n^{(0)}$. Общее решение неоднородной системы

$$\frac{dy_i}{dx}+a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n=V_i(x)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} y_1&=\bar{y}_1+z_1,\\ y_2&=\bar{y}_2+z_2,\\ &\ldots\ldots\\ y_n&=\bar{y}_n+z_n, \end{aligned}$$

где $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n$ — некоторое частное решение неоднородной системы, а $z_1,\ldots,z_n$ — общее решение соответствующей однородной системы

$$\frac{dz_i}{dx}+a_{i1}z_1+\ldots+a_{in}z_n=0$$
$$(i=1,\ldots,\ n).$$

Решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, если известна фундаментальная система решений соответствующей однородной системы. Считая в равенствах (2) C_i неизвестными функциями x, мы из уравнений

$$\begin{aligned} &y_1^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_1^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_1^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_1;\\ &y_2^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_2^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_n^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_n^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_n \end{aligned}$$

найдем $\frac{dC_i}{dx}=\varphi_i(x)$; $C_i=\int\varphi_i(x)dx+A_i$; A_i — постоянные $(i=1,\ldots n)$.

Линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n=0;\\ &\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+\ldots+a_{2n}y_n=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n=0 \end{aligned}$$

имеет частное решение вида

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x};\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x};\ \ldots;\ y_n = \gamma_n e^{\lambda x},$$

где постоянная λ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12}, \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda, \ldots & a_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1} & a_{n2}, \ldots, & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *характеристическим*, а постоянные $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} &(a_{11}+\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ &a_{21}\gamma_1 + (a_{22}+\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0; \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ &a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}+\lambda)\gamma_n = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если все n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различны, то ранг матрицы

$$M(\lambda) \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}+\lambda, \ldots, & a_{1n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n1}, \ldots, & a_{nn}+\lambda \end{Vmatrix}$$

для любого корня λ_i равен $n-1$ [т. е. по крайней мере один определитель $(n-1)$-го порядка матрицы $M(\lambda_i)$ отличен от нуля]. Из системы (3) при $\lambda=\lambda_i$ определяются $\gamma_1^{(i)}, \ldots, \gamma_n^{(i)}$, с точностью до произвольного множителя пропорциональности C_i:

$$\gamma_1^{(i)} = C_i k_1^{(i)};\ \gamma_2^{(i)} = C_i k_2^{(i)}; \ldots;\ \gamma_n^{(i)} = C_i k_n^{(i)},$$

где $k_1^{(i)}, \ldots, k_n^{(i)}$ — алгебраические дополнения любой строки определителя $\Delta(\lambda_i)$, для которой они не все равны нулю. Корню λ_i соответствует частное решение системы (полагаем $C_i = 1$)

$$y_1^{(i)} = k_1^{(i)} e^{\lambda_i x};\ y_2^{(i)} = k_2^{(i)} e^{\lambda_i x}, \ldots,$$
$$y_n^{(i)} = k_n^{(i)} e^{\lambda_i x}.$$

При $i = 1, 2, \ldots, n$ получаем n различных частных решений, образующих фундаментальную систему решений.

Если корень λ_i характеристического уравнения имеет кратность m_i, то решения системы дифференциальных уравнений следует искать в виде

$$y_1 = P_{i1}(x) e^{\lambda_i x};\ y_2 = P_{i2}(x) e^{\lambda_i x}; \ldots;$$
$$y_n = P_{in}(x) e^{\lambda_i x},$$

где $P_{i1}(x), \ldots, P_{in}(x)$ — многочлены степени, не большей чем $m_i - 1$. Для нахождения общего решения надо составить для каждого корня λ_i выражения указанных видов с неопределенными коэффициентами, подставить эти выражения в данную систему дифференциальных уравнений и решить относительно неопределенных коэффициентов полученную линейную систему уравнений. Число неизвестных коэффициентов, остающихся произвольными, равно кратности корня.

Общее решение представится в виде

$$y_j = P_{1j}(x) e^{\lambda_1 x} + P_{2j}(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_{sj}(x) e^{\lambda_s x},$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$; $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ *

Функция $\bar{x}(p)$, определенная равенством

$$\bar{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt,$$

называется *лапласовым преобразованием* (L-изображением) функции $x(t)$. Предполагается, что комплексная величина p имеет положительную действительную часть: $\operatorname{Re} p = \alpha_0 > 0$. Функция $\bar{x}(p)$ определена для всех p, для которых $\int_0^\infty e^{-\alpha_0 t} x(t)\, dt$ существует.

Примеры:

1) $\int_0^\infty e^{-pt} dt = \left| \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p}$; $\frac{1}{p}$ есть лапласово преобразование $x(t) = 1$.

2) $\int_0^\infty e^{-pt} e^{at}\, dt = \frac{1}{p-a}$ — лапласово преобразование $x = e^{at}$ при условии $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

Ниже приведена таблица лапласовых преобразований наиболее употребитель-

* См. литературу на стр. 350: [73], [74].

Таблица лапласовых преобразований

$$\bar{x}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt.$$

$\bar{x}(p)$	$x(t)$	$\bar{x}(p)$	$x(t)$
1. $\bar{x}_1(p) + x_2(p)$	$x_1(t) + x_2(t)$	16. $\frac{a}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{sh} at$
2. $p\bar{x}(p) - x(0)$	$\frac{dx}{dt}$	17. $\frac{p}{p^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$
3. $p^n\bar{x}(p) - [p^{n-1}x(0) + p^{n-2}x'(0) + \ldots + x^{(n-1)}(0)]$	$\frac{d^n x}{dt^n}$	18. $\frac{p}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
4. $\frac{1}{p}\bar{x}(p)$	$\int_0^t x(\tau)\, d\tau$	19. $\frac{p^n}{(p^2 + a^2)^{n+1}}$	$\frac{1}{2^n n!\, a} t^n \sin at$, n — целое число
5. $\bar{x}(p + a)$	$e^{-at}x(t)$	20. $\frac{a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at - at\cos at)$
6. $e^{-ap}\bar{x}(p)$	$\begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ x(t-a), & t > a \end{cases}$	21. $\frac{b}{(p + a)^2 + b^2}$	$e^{-at}\sin bt$
7. $\bar{x}_1(p)\,\bar{x}_2(p)$	$\int_0^t x_1(\tau)\, x_2(t - \tau)\, d\tau$	22. $\frac{p + a}{(p + a^2) + b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
8. $\frac{1}{p}$	1	23. $\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
9. $\frac{e^{-ap}}{p}$	$\begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$	24. $\frac{1}{p^{n + \frac{1}{2}}}$	$\frac{(2t)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\sqrt{\pi t}}$, n — целое > 0
10. $\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$ (n — целое число, причем $n > -1$)	25. $\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$	$J_0(t)$
11. $\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $\operatorname{Re} n > -1$	26. $\frac{1}{\sqrt{p^2 + \lambda^2}} \times \left(\frac{\sqrt{p^2 + \lambda^2} - p}{\lambda}\right)^n$	$J_n(\lambda t)$, $\operatorname{Re} n > -1$
12. $\frac{1}{p + a}$	e^{-at}	27. $\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}}$	$I_0(t)$
13. $\frac{1}{(p + a)^{n+1}}$	$\frac{1}{\Gamma(n+1)} t^n e^{-at}$		
14. $\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin at$		
15. $\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos at$		

ных функций (см. стр. 219). Существует обратное преобразование (формула Римана-Меллина)

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{pt}\bar{x}(p)\,dp, \qquad (4)$$

определяющее функцию $x(t)$ по ее лапласову преобразованию $\bar{x}(p)$ и справедливое при условиях: $x(t)$ имеет непрерывную производную, $|x(t)|<ke^{ct}$, где k и c — положительные постоянные. Интеграл берется по прямой, параллельной мнимой оси в плоскости комплексной переменной p и расположенной где угодно справа от всех особых точек функции $\bar{x}(p)$.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x=x_0$, $\frac{dx}{dt}=x_1,\ldots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=x_{n-1}$ при $t=0$, может быть найдено следующим образом. Над каждым членом данного уравнения совершаем лапласово преобразование и обозначаем $\Delta(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$. Если принять во внимание начальные условия, то получается уравнение

$$\begin{aligned}\Delta(p)\bar{x}(p)&=(p^{n-1}x_0+\ldots+px_{n-2}+x_{n-1})+\\&+a_1(p^{n-2}x_0+\ldots+px_{n-3}+x_{n-2})+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+a_{n-2}(px_0+x_1)+\\&+a_{n-1}x_0+\bar{f}(p)=\varphi(p),\end{aligned}$$

называемое *вспомогательным уравнением* для данного дифференциального уравнения с данными начальными условиями. Отсюда

$$\bar{x}(p)=\frac{\varphi(p)}{\Delta(p)}.$$

Искомое решение находим по формуле (4). Если $\varphi(p)$ — многочлен, то решение $x(t)$ можно найти проще: разлагаем $\frac{\varphi(p)}{\Delta(p)}$ на простейшие дроби (стр. 156), для каждой простейшей дроби находим по таблице лапласовых преобразований соответствующую функцию; искомое решение равно сумме найденных таким образом функций.

Пример. Найти решение уравнения $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}-4x=\cos 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=1$. Здесь $f(t)=\cos 2t$; $\bar{f}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cos 2t\,dt$. Из таблицы $\bar{f}(p)=\frac{p}{p^2+4}$. Применение лапласова преобразования к уравнению дает

$$(p^3-p^2+4p-4)\bar{x}=1+\frac{p}{p^2+4}.$$

Уравнение $p^3-p^2+4p-4=0$ имеет корни $p_1=1$, $p_{2,3}=\pm 2i$, следовательно,

$$(p^2+4)(p-1)\bar{x}(p)=1+\frac{p}{p^2+4}=\frac{p^2+p+4}{p^2+4},$$

откуда

$$\bar{x}(p)=\frac{p^2+p+4}{(p-1)(p^2+4)^2}.$$

Разлагаем правую часть на простейшие дроби

$$\bar{x}(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{(p^2+4)^2}+\frac{Mp+N}{p^2+4}$$

и находим

$$A=\frac{6}{25};\quad B=-\frac{1}{5};\quad C=\frac{4}{5};\quad M=-\frac{6}{25};\quad N=-\frac{6}{25};$$

$$\bar{x}(p)=\frac{6}{25}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{5}\frac{p}{(p^2+4)^2}+\frac{1}{5}\frac{4}{(p^2+4)^2}-\frac{6}{25}\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{25}\frac{2}{p^2+4}.$$

Из таблицы находим

$$x(t)=\frac{6}{25}e^t-\frac{1}{5}\frac{t}{2\cdot 2}\sin 2t+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)-\frac{6}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t$$

или

$$x(t)=\frac{6}{25}e^t-\frac{t}{20}(\sin 2t+2\cos 2t)-\frac{1}{100}(7\sin 2t+24\cos 2t).$$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть y_1, y_2 — фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0.$$

Если известно одно частное решение $y_1(x)$, то второе частное решение

$$y_2 = Cy_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)\,dx} dx, \qquad (5)$$

где C — произвольное постоянное.

Общее решение неоднородного уравнения

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x)$$

имеет вид

$$y = y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx - y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx + A_1 y_1 + A_2 y_2,$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные; y_1, y_2 — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Если в уравнении

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x)$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ — многочлены или разлагаются в степенные сходящиеся ряды из целых неотрицательных степеней $x - x_0$, причем $p_0(x_0) \neq 0$, то решения уравнения тоже выражаются сходящимися рядами по степеням $x - x_0$. Чтобы найти решение вида

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

следует подставить этот ряд в уравнение и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, получить уравнения для A_0, A_1, A_2,...

Если $p_0(x_0) = 0$, то в некоторых случаях тем же методом можно получить решение в виде сходящегося ряда

$$y = A_0(x - x_0)^r + A_1(x - x_0)^{r+1} + A_2(x - x_0)^{r+2} + \ldots,$$

где r — вообще нецелое число.

В частности, уравнение

$$x^2 y'' + p_1(x)\, xy' + p_2(x)\, y = 0$$

имеет при $x = 0$ особую точку. Если $p_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, $p_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$, то решение можно искать в виде

$$y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

причем $A_0 \neq 0$. Для неопределенных коэффициентов получаются уравнения

$$\begin{gathered}
[r(r-1) + a_0 r + b_0]\, A_0 = 0; \\
[(r+1)\, r + a_0 (r+1) + b_0]\, A_1 + \\
+ a_1 r A_0 + b_1 A_0 = 0; \\
[(r+2)(r+1) + a_0 (r+2) + b_0]\, A_2 + \\
+ a_1 (r+1) A_1 + a_2 r A_0 + b_1 A_1 + b_2 A_0 = 0, \qquad (6) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Из уравнения $r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0$, называемого *определяющим*, находим корни r_1 и r_2. Если разность $r_1 - r_2$ не равна целому числу, то $y_1 = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k' x^k$, $y_2 = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k'' x^k$ определяют фундаментальную систему решений. Здесь A_k' и A_k'' получаются из системы линейных уравнений (6), где r заменяется через r_1 для получения A_k' и через r_2 для получения A_k''; $A_0' \neq 0$, $A_0'' \neq 0$ — произвольные постоянные. Ряды сходятся в том же промежутке, где сходятся ряды $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

Если $r_1 - r_2$ есть целое положительное число или нуль, то, вообще говоря, получается указанным способом одно решение y_1. Решение y_2, независимое линейно от y_1, отыскивается при помощи формулы (5).

Фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 \text{ и } y_2 = By_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k,$$

где $B = \text{const}$, $B_k = \text{const}$.

Уравнение Бесселя. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0$; ν — постоянное. Определяющее уравнение $r(r-1) + r - \nu^2 \equiv r^2 - \nu^2 = 0$ имеет корни $r = \pm \nu$.

Решением будет $y = x^{\nu}\quad (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)$,
где A_0 — произвольное постоянное; $A_1 = 0$;

$$A_2 = -\frac{A_0}{2(2\nu+2)};\quad A_3 = 0;$$

$$A_4 = \frac{A_0}{2\cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)};$$

$$A_5 = 0 \text{ и т. д.}$$

Бесселевы функции *. Решение уравнения Бесселя, принимающее при $x = 0$ конечное значение и при $A_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$, определяет *бесселеву* (или *цилиндрическую*) функцию ν-го порядка 1-го рода:

$$J_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)} - \ldots\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

Здесь $\Gamma(z)$ — так называемая гамма-функция (см. стр. 178).

Бесселевы функции нулевого и первого порядка (1-го рода):

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots;$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots\right] = -J_0'(x).$$

Ряды равномерно сходятся при всяком ν (вещественном и комплексном).

Графики J_0 и J_1 изображены на фиг. 5.

При $\nu = n + \frac{1}{2}$ (n — целое число) функция Бесселя выражается через элементарные функции, например

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

При ν, не равном целому числу, общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Если $\nu = n$ — целое число, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. В этом случае вторым решением уравнения Бесселя, линейно не зависимым от функции J_n, является функция Бесселя 2-го рода

Фиг. 5. Графики бесселевых функций $J_0(x)$, $J_1(x)$.

порядка n (функция Вебера), определяемая формулой

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\times\left[\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right],$$

где C — постоянная Эйлера (см. стр. 135), и при $k = 0$ $\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}$ означает пустую сумму, т. е. нуль. В случае ν нецелого функция Бесселя 2-го рода определяется формулой

$$Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Отсюда при $\nu \to n$, n — целое число, предельным переходом получается $Y_n(x)$.

* См. литературу на стр. 349: [35], [36], [75], [86].

Разложения $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ в ряды:

$$\frac{\pi}{2} Y_0(x) = \left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \\ + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1+\frac{1}{2}}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \\ + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \ldots;$$

$$\frac{\pi}{2} Y_1(x) = \left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \\ - \frac{1}{x} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{1+2k} \times \\ \times \left[2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k+1}\right];$$

$$Y_1(x) = -Y_0'(x).$$

Графики $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ даны на фиг. 6. Зависимости между бесселевыми функциями:

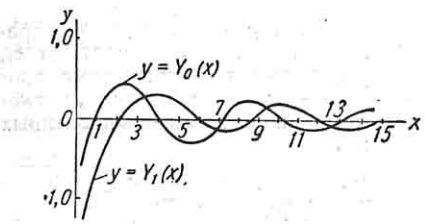
$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x);$$

$$2\frac{d}{dx} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x).$$

Такие же зависимости имеются для $Y_\nu(x)$.

$$J_\nu \frac{d}{dx} Y_\nu - Y_\nu \frac{d}{dx} J_\nu = \frac{2}{\pi x}.$$

При вещественном ν функция $J_\nu(x)$ имеет бесчисленное множество веще-



Фиг 6. Графики бесселевых функций $Y_0(x)$, $Y_1(x)$.

ственных нулей [значений x, при которых $J_\nu(x) = 0$] и конечное число чисто мнимых нулей. Если $J_\nu(x) = 0$, то $J_\nu(-x) = 0$. При $\nu > -1$ все нули $J_\nu(x)$ вещественны. Функции $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ не имеют общих нулей, кроме, может быть, $x = 0$, но между двумя последовательными нулями функции $J_\nu(x)$ лежит один и только один нуль функции $J_{\nu-1}$ и функции $J_{\nu+1}$. Нули $J_\nu(x)$ — простые, кроме $x = 0$.

Если $n = 0, 1, 2\ldots$, то $|J_n(x)| \leqslant 1$, $\left|\frac{d^k}{dx^k} J_n(x)\right| \leqslant 1$.

Бесселевы функции мнимого аргумента определяются формулой

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \times \\ \times \left[1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(\nu+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(\nu+1)(\nu+2)} + \ldots\right]$$

и удовлетворяют уравнению

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0.$$

О свойствах ортогональности функций Бесселя см. стр. 311.

Функции Лежандра [86], [35] определяются как решения дифференциального уравнения Лежандра

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0.$$

Для n целого (и $n = 0$) решениями являются *полиномы Лежандра* n-й степени (*шаровые функции*)

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{n!} \times \\ \times \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots\right] = \\ = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Рекуррентная формула:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

$P_n(x)$ имеет n простых корней в промежутке $(-1, +1)$.

Свойство ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ функции $|P_n(x)|$, $\frac{1}{n^2}\left|P_n'(x)\right|$, $\frac{1}{n^4}\left|P_n''(x)\right|$ не превосходят единицы. $P_n(1) = 1$.

Полиномы Чебышева [35], [67] $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$ удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0;$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n], \quad (n \geqslant 1);$$

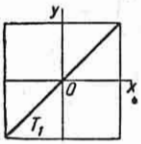
$$T_0(x) \equiv 1;\ T_1 = xT_0 = x;\ T_2 = xT_1 - \frac{1}{4}T_0 = \frac{1}{4} = x^2 - \frac{1}{2};$$

$$T_{n+1} = xT_n - \frac{1}{4}T_{n-1}\ (n \geqslant 2);$$

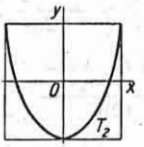
$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x);$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n T_m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & (n \neq m) \\ \pi : 2^{2n-1}, & (n = m). \end{cases}$$

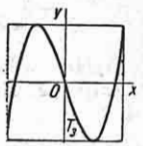
Все корни $T_n(x)$ — простые, действительные и лежат на отрезке $(-1,1)$. Эти полиномы наименее уклоняются от нуля в промежутке $(-1, +1)$, т. е. по сравнению с любым полиномом n-й степени с вещественными коэффициентами и коэффициентом 1 при x^n полином T_n таков, что $\max|T_n|$ в промежутке $(-1, +1)$ имеет наименьшее значение.



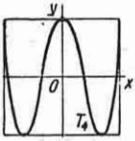
Фиг. 7.



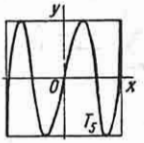
Фиг. 8.



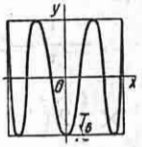
Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Фиг. 7 — 12. Графики полиномов Чебышева: T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.

Графики T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 даны на фиг. 7 —12, причем масштаб на оси Oy увеличен в 2^{n-1} раз.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ *

Линейные уравнения 1-го порядка. Решение однородного уравнения

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные, $X_1, \ldots, X_n$ зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и имеют непрерывные производные, z — искомая функция, равносильно решению системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Если $\varphi_i(x_1, \ldots x_n) = C_i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — решение этой системы, то $z = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ — общее решение уравнения в частных производных, причем Φ — произвольная дифференци-

* См. литературу на стр. 350: [58], [50], [59].

руемая функция своих $n-1$ аргументов. В случае неоднородного уравнения

$$X_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R,$$

где X_i, R зависят от $x_1, \ldots, x_n, z$, общий интеграл z определяется из равенства $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)=0$, где Φ — произвольная дифференцируемая функция, а $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z)=C_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$ — система интегралов системы уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dz}{R}.$$

Линейное уравнение 2-го порядка. Наиболее часто встречаются следующие уравнения, называемые уравнениями математической физики:

1) *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа (см. стр. 234), описывающее колебания некоторой среды;

2) *телеграфное уравнение*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

3) *уравнение распространения тепла*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k^2\Delta u;$$

4) *уравнения теории потенциала*: $\Delta u=0$ — уравнение Лапласа; $\Delta u=4\pi\rho(x, y, z)$ — уравнение Пуассона.

Обычно ищут частное решение, удовлетворяющее начальным и граничным условиям.

Пример. Решить волновое уравнение (колебания закрепленной струны) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ по методу Фурье с условиями $z(x, t)\,|_{t=0}=f(x)$; $\frac{\partial z(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$ (начальные условия); $z(0, t)=z(l, t)=0$, $t>0$ (граничные условия). Ищем решение в виде произведения функции от x на функцию от t: $z=X(x)\,T(t)$. Подставляя z в уравнение, получим $\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}$. Левая часть не зависит от t, а правая не зависит от x, поэтому равенство отношений возможно, если каждое из них — постоянное: $X''=\lambda X$, $T''=a^2\lambda T$, $\lambda=\text{const}$. Из первого уравнения $X=C_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,x+C_2\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,x$. Условие $z(0, t)=0$ дает $C_2=0$. Условию $z(l, t)=0$ можно удовлетворить только считая λ отрицательным; из условия $0=C_1\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l$, или $\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l=0$, $(C_1\neq 0)$, или $\sin i\sqrt{\lambda}\,l=0$ (см. стр. 196), получаем $i\sqrt{\lambda}\,l=\pi n$, $\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n=1, 2, \ldots)$; тогда $i\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,x=\sin i\sqrt{\lambda}\,x=\sin\frac{n\pi}{l}x$; следовательно, $X=C_1\sin\frac{\pi n x}{l}$.

Второе уравнение дает решение

$$T_n=a_n\cos\frac{na\pi}{l}t+b_n\sin\frac{na\pi}{l}t;$$

общее решение

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{na\pi}{l}t+b_n\sin\frac{na\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

(с произвольными постоянными a_n, b_n, куда включен C_1). При $t=0$ должны быть выполнены начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n na\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x).$$

Используя формулы разложения $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд Фурье, получим:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx;$$

$$b_n=\frac{2}{na\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

и искомая функция $z=z(x, t)$ определена.

Теорема о существовании решений системы уравнений в частных производных принадлежит великой русской ученой С. В. Ковалевской.

ГЛАВА X

ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ *

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В существующей литературе, посвященной векторному и тензорному исчислению, имеет место большое разнообразие в терминологии и в обозначениях одного и того же понятия. Ниже приняты наиболее употребительные обозначения и термины.

Величины разделяются на *скалярные* и *векторные*.

Скалярная величина (скаляр) при избранной единице меры вполне характеризуется одним числом, отрицательным или положительным, например, масса, работа, температура, объем.

Векторная величина (вектор) определяется числом, измеряющим ее в некоторых единицах, и направлением в пространстве, например, скорость, ускорение, сила.

Изображают вектор (см. стр. 3) направленным отрезком $\overline{M_1M_2} = \bar{a}$ (фиг. 1). Длина отрезка (в некотором масштабе) есть число, характеризующее вектор; оно называется *модулем* вектора, длиной, численным значением вектора и обозначается $|\bar{a}| = a = |\overline{M_1M_2}| > 0$. Направление вектора отмечается на отрезке стрелкой. Прямая, на которой лежит вектор, называется *носителем* его, линией действия вектора.

Фиг. 1. Вектор.

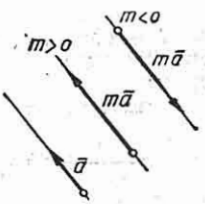
Векторы бывают: 1) свободные, т. е. не связанные с линией действия; 2) скользящие (переносятся вдоль носителя) и 3) неподвижные, связанные с точкой своего приложения.

В дальнейшем рассматриваются свободные векторы.

Вектор равен нулю, если его модуль равен нулю.

Равными векторами называются векторы одинаковой длины и одинаково направленные: $\bar{a} = \bar{b}$. Вектор $\bar{b} = -\bar{a}$, если длины равны, $b = a$, но направление $\bar{a}$ противоположно направлению $\bar{b}$.

Векторы $\bar{a}$ и $-\bar{a}$ называются *противоположными* друг другу.



Фиг. 2. Коллинеарные векторы.

Произведение вектора $\bar{a}$ *на скаляр* m обозначается $m\bar{a}$ или $\bar{a}m$ и есть новый вектор, модуль которого равен произведению $|\bar{a}|$ на абсолютную величину $|m| : |m\bar{a}| = |m| \cdot |\bar{a}|$; направление $m\bar{a}$ совпадает с направлением $\bar{a}$, если $m > 0$, и противоположно $\bar{a}$, если $m < 0$ (на фиг. 2 $|m| = 2$).

Векторы $\bar{a}$ и $m\bar{a}$ лежат на одном носителе или на параллельных носителях.

Коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ лежат на параллельных прямых (носителях). Условие коллинеарности

$$\bar{b} = m\bar{a}.$$

Единичный вектор $\bar{a}^0$ вектора $\bar{a}$ (орт направления $\bar{a}$) одинаково направлен с вектором $\bar{a}$ и имеет модуль, равный единице, $|\bar{a}^0| = 1$; имеем

$$\bar{a} = a\bar{a}^0.$$

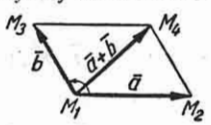
* См. литературу на стр. 350: [89], [91], [93].

Сложение двух векторов производится по правилу параллелограмма: сумма векторов (называемая еще *геометрической суммой*) $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть вектор $\bar{c} = \overline{M_1M_4}$, изображаемый диагональю M_1M_4 параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (фиг. 3):

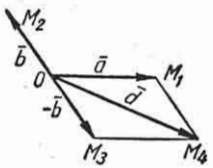
$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\bar{a}, \bar{b}),$$

где $(\bar{a}, \bar{b})$ — угол, образованный вектором $\bar{b}$ с вектором $\bar{a}$. В случае многих слагаемых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ сумму можно находить по правилу многоугольника: из произвольной точки O строят $\overline{OM_1} = \bar{a}$, затем строят $\overline{M_1M_2} = \bar{b}$, $\overline{M_2M_3} = \bar{c}$; замыкающий вектор $\overline{OM_3}$ ломаной $OM_1M_2M_3$ и есть сумма



Фиг. 3. Сложение векторов.



Фиг. 4. Вычитание векторов.

$$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}.$$

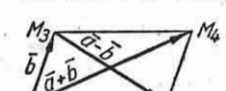
Модуль суммы векторов не превосходит суммы модулей слагаемых:

$$|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}|.$$

Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть новый вектор $\bar{d}$, равный сумме векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$ (фиг. 4):

$$\bar{d} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = \overline{OM_4}.$$

В одном параллелограмме, построенном на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, диагонали $\overline{M_1M_4} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{M_3M_2} = \bar{a} - \bar{b}$ (фиг. 5).



Фиг 5. Сумма и разность векторов.

Справедливы равенства:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (переместительный закон);

2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (сочетательный закон);

3) $m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b}$ (распределительный закон).

Компланарные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях; можно найти два таких скаляра m и n, что $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$ — условие компланарности трех векторов.

Это же равенство дает разложение $\bar{c}$ на два составляющие вектора $m\bar{a}$, $n\bar{b}$, параллельные заданным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

В пространстве всякий вектор $\bar{d}$ можно разложить на три составляющие вектора, параллельные заданным некомпланарным векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, и представить в форме

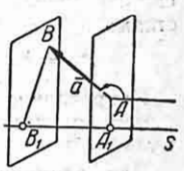
$$\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c};$$

слагаемые $m\bar{a}$, $n\bar{b}$, $p\bar{c}$ называются *компонентами*.

Осью называют прямую, на которой установлено положительное и отрицательное направление.

Направление оси S обычно определяется вектором $\bar{s}$, имеющим с осью одинаковое направление. Орт $\bar{s}^0$ называется ортом оси.

Проекцией вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось S (или вектор $\bar{s}$) называют длину отрезка этой оси A_1B_1, где точка A_1 есть проекция (ортогональная) точки A на S, точка B_1 — проекция точки B на S, взятую со знаком плюс, если направление A_1B_1 совпадает с положительным направлением S, и со знаком минус, если направление A_1B_1 совпадает с отрицательным направлением S (фиг. 6).



Фиг. 6. Проекция вектора на ось.

Обозначают:

$$\text{пр}_S\bar{a} = a_S = \text{пр}_s\overline{AB} = (AB)_s = \pm A_1B_1.$$

Векторной проекцией вектора $\bar{a}$ на ось S называют вектор $\bar{a}_S$, началом и концом которого являются соответственно начало и конец проекции $\bar{a}$ на S, и обозначают

$$\text{пр}_S\bar{a} = \bar{a}_S.$$

Свойства проекции:

$$\text{пр}_S\bar{a} = |\bar{a}|\cos(S, \bar{a});$$

$\text{пр}_S(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = \text{пр}_S\bar{a} + \text{пр}_S\bar{b} + \text{пр}_S\bar{c}$;

$$\text{пр}_S(m\bar{a}) = m\text{пр}_S\bar{a} = ma_S.$$

Проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат x, y, z вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_x &= a\cos(x, \bar{a});\\ a_y &= a\cos(y, \bar{a});\\ a_z &= a\cos(z, \bar{a}). \end{aligned} \qquad (1)$$

Вектор $\bar{a}$ можно представить в виде

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы (орты) положительных направлений осей координат Ox, Oy, Oz. Эти проекции называют также *координатами вектора* и обозначают $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ или $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Для модуля вектора $\bar{a}$ имеем

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор $\bar{a} = 0$, когда $a_x = a_y = a_z = 0$.

Равенство векторов $\bar{a} = \bar{b}$ равносильно трем алгебраическим равенствам:

$$a_x = b_x;\ a_y = b_y;\ a_z = b_z.$$

Направление вектора определяется направляющими косинусами по формулам (1).

Для единичного вектора $\bar{a}^0$ имеем

$$\bar{a}^0 = \bar{i}\cos(x, \bar{a}) + \bar{j}\cos(y, \bar{a}) + \bar{k}\cos(z, \bar{a}).$$

Радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ есть вектор $\bar{r}$, соединяющий начало координат с точкой M. Координаты $\bar{r}$ — декартовы координаты конца вектора: $\bar{r}\{x, y, z\}$ или

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z.$$

Вектор, определяемый двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, равен

$$\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2-x_1)\bar{i} + (y_2-y_1)\bar{j} + (z_2-z_1)\bar{k}.$$

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется скалярная величина, равная произведению их модулей на косинус угла между ними; она записывается в виде $\bar{a}\bar{b}$:

$$\bar{a}\bar{b} = ab\cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Отсюда

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab};$$

$$\bar{a}\bar{b} = a\text{пр}_a\bar{b} = b\text{пр}_b\bar{a}.$$

Координатное выражение $\bar{a}\bar{b}$:

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Свойства:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a};\ m(\bar{a}\bar{b}) = (m\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(m\bar{b});$$
$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

Если векторы взаимно перпендикулярны, то $\bar{a}\bar{b} = 0$.

Если $\bar{a} = \bar{b}$, то обозначают произведение $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2$ и называют *скалярным квадратом вектора* $\bar{a}$; он равен квадрату его модуля $\bar{a}^2 = a^2$.

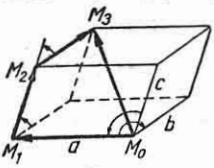
Скалярные произведения координатных ортов:

$$\bar{i}^2 = 1;\ \bar{j}^2 = 1;\ \bar{k}^2 = 1;\ \bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{i} = 0;$$
$$\bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{j} = 0;\ \bar{k}\bar{i} = \bar{i}\bar{k} = 0.$$

Пример. Если в параллелепипеде известны три ребра a, b, c и образованные ими попарно углы, то (фиг. 7), введя векторы $\overline{M_0M_1} = \bar{a}$, $\overline{M_1M_2} = \bar{c}$, $\overline{M_2M_3} = \bar{b}$, получим:

$$\overline{M_0M_3} = \bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c};$$

$$\bar{d}^2 = (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{a}\bar{c} + 2\bar{b}\bar{c}$$



Фиг. 7. Сложение трех некомпланарных векторов.

или

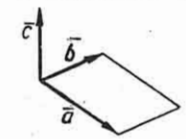
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(\bar{a}, \bar{b}) + 2bc\cos(\bar{b}, \bar{c}) + 2ca\cos(\bar{c}, \bar{a})$$

формула для квадрата диагонали. Она же дает квадрат стороны четырехугольника как пространственного, так и плоского.

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, модуль которого

$$c = ab\sin(\bar{a}, \bar{b})$$

равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (фиг. 8), и который направлен по перпендикуляру к плоскости, проходящей через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ таким образом, что $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, т. е., если смотреть с конца вектора $\bar{c}$, то поворот от первого множителя $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$ в параллелограмме, ими образованном, совершается против часовой стрелки.



Фиг. 8. Векторное произведение.

Обозначения:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}\,\bar{b}].$$

Свойства:

$$\bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{b});$$

если $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны или один из перемножаемых векторов равен нулю; если

$$\bar{a} \perp \bar{b}, \text{ то } |\bar{a} \times \bar{b}| = ab;$$
$$(m\bar{a}) \times \bar{b} = m(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (m\bar{b});$$
$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

Проекции векторного произведения на оси координат:

$$c_x = (\bar{a} \times \bar{b})_x = a_y b_z - a_z b_y;$$
$$c_y = (\bar{a} \times \bar{b})_y = a_z b_x - a_x b_z;$$
$$c_z = (\bar{a} \times \bar{b})_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Выражение $\bar{a} \times \bar{b}$ через координаты сомножителей:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Векторные произведения координатных ортов:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0; \quad \bar{j} \times \bar{j} = 0; \quad \bar{k} \times \bar{k} = 0;$$
$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j};$$
$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}; \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}; \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.$$

Примеры: 1) Момент силы F с точкой приложения A $(\overline{OA} = \bar{r})$ относительно точки O равен $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$, отсюда, в частности, $M_x = yF_z - zF_y$.

2) Если точка A совершает вращение вокруг оси OL с угловой скоростью $\bar{\omega}$, тогда в данный момент вектор скорости (фиг. 9) $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

3) В пирамиде $M_1M_2M_3M_4$, заданной своими вершинами M_1 (2, 3, 1); M_2 (1, — 2,0); M_3 (0, 2, 1); M_4 (3, 1, 4), вычислить площадь $\triangle M_1M_2M_3$ и двугранный угол при ребре M_1M_2. Векторы: $\overline{M_1M_2}\{-1, 4, 1\}$, $\overline{M_1M_3}\{1, 5, 1\}$, $\overline{M_1M_4}\{2, 3, 4\}$. Вычисляем вектор $\overline{N_1} \perp \triangle M_1M_2M_3$:

$$\overline{N_1} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2\bar{j} + 9\bar{k}.$$

Площадь

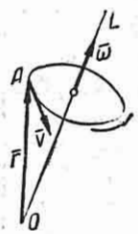
$$\triangle M_1M_2M_3 = \frac{1}{2}|\overline{N_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+81} = \frac{1}{2}\sqrt{86}.$$

Вычислим вектор

$$\overline{N_2} \perp \triangle M_2M_3M_4;$$

тогда угол $(\overline{N_1}, \overline{N_2})$ будет измерять двугранный угол при ребре M_2M_3:

$$\overline{N_2} = \overline{M_2M_4} \times \overline{M_2M} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -13\bar{i} - 6\bar{j} + 11\bar{k};$$
$$\cos(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = \frac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{N_1N_2} = \frac{-13 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 11 \cdot 9}{\sqrt{169+36+121}\,\sqrt{86}} \approx$$
$$\approx 0{,}585.$$



Фиг. 9. Вектор скорости во вращательном движении.

Сложные произведения векторов.

1) *Смешанное или векторно-скалярное* произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

равно по абсолютному значению объему параллелепипеда, построенного на $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, как на ребрах.

Свойства: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = -\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = -\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b}$. Если $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$, то векторы компланарны.

2) *Двойное векторное или векторно-векторное произведение* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{a}\,\bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a}\,\bar{b}).$$

3) $(\bar{a} \times \bar{b})\,(\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a}\bar{c})\,(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})\,(\bar{b}\bar{c})$.

4) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{b}\,\{\bar{a}\,(\bar{c} \times \bar{d})\} - \bar{a}\,\{\bar{b}\,(\bar{c} \times \bar{d})\} = \bar{b}\,(\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{d}) - \bar{a}\,(\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d})$.

5) $[(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}] \times \bar{d} = (\bar{a}\,\bar{c})\,(\bar{b} \times \bar{d}) - (\bar{b}\,\bar{c})\,(\bar{a} \times \bar{d}) = \bar{c}\,(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d}) - (\bar{a} \times \bar{b})\,(\bar{c}\,\bar{d})$.

Выражение через скалярные произведения:

1) скалярного квадрата векторного произведения

$$(\bar{a}\,\bar{b})^2 + (\bar{a} \times \bar{b})^2 = \bar{a}^2\,\bar{b}^2;$$

2) квадрата смешанного произведения

$$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}\,\bar{a} & \bar{a}\,\bar{b} & \bar{a}\,\bar{c} \\ \bar{b}\,\bar{a} & \bar{b}\,\bar{b} & \bar{b}\,\bar{c} \\ \bar{c}\,\bar{a} & \bar{c}\,\bar{b} & \bar{c}\,\bar{c} \end{vmatrix}.$$

Основные векторные уравнения

Неизвестными являются вектор $\bar{r}$ и скаляры x, y, z, а остальные величины векторные и скалярные известны.

Уравнение	Решение
1) $\bar{r} + \bar{a} = \bar{b}$	$\bar{r} = \bar{b} - \bar{a}$
2) $m\bar{r} = \bar{a}$	$\bar{r} = \frac{\bar{a}}{m}$
3) $\begin{cases} \bar{a} \times \bar{r} = \bar{b} \\ \bar{c}\bar{r} = m \end{cases}$	$\bar{r} = \frac{m\bar{a}}{\bar{a}\bar{c}} + \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{\bar{a}\bar{c}}$
4) $\bar{a} \times \bar{r} = \bar{b}$	$\bar{r} = c\bar{a} + \frac{\bar{b} \times \bar{a}}{a^2}$, c — произвольный скаляр
5) $\bar{a}\bar{r} = m$	$\bar{r} = \frac{m}{a^2}\bar{a} + \bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{c}$ — произвольный вектор
6) $\begin{cases} \bar{a}\bar{r} = \alpha \\ \bar{b}\bar{r} = \beta \\ \bar{c}\bar{r} = \gamma \end{cases}$	$\bar{r} = \frac{\alpha(\bar{b} \times \bar{c}) + \beta(\bar{c} \times \bar{a}) + \gamma(\bar{a} \times \bar{b})}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$
7) $\bar{a} \times \bar{r} + m\bar{r} = \bar{b}$	$\bar{r} = \frac{\bar{a}(\bar{a}\bar{b}) + m^2\bar{b} + m(\bar{b} \times \bar{a})}{m(a^2 + m^2)}$
8) $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$	$x = \frac{\bar{d}\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$, $y = \frac{\bar{a}\bar{d}\bar{c}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$, $z = \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{d}}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Если $\bar{a}$ изменяется по величине и по направлению, являясь функцией скалярной величины t, то его обозначают $\bar{a}(t)$ и называют *векторной функцией* от t. Если начало всех векторов поместить в одной точке O, то конец $\bar{a}$ опишет кривую, называемую *годографом* вектора $\bar{a}(t)$.

Производная векторной функции $\bar{a}(t)$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}$$

есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\bar{a}(t)$. Координаты $\bar{a}(t)$ $\{a_x, a_y, a_z\}$ суть скалярные функции от t. Координаты производной:

$$\frac{d\bar{a}}{dt}\left\{\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt}\right\}.$$

Производная единичного переменного вектора $\bar{a}^0$ есть вектор, перпендикулярный к дифференцируемому вектору: $\frac{d\bar{a}^0}{dt} \perp \bar{a}^0$.

Правила дифференцирования векторных функций:

$$\frac{d}{dt}(\varphi\bar{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\bar{a} + \varphi\frac{d\bar{a}}{dt};$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\bar{a}^0) = \frac{da}{dt}\bar{a}^0 + a\frac{d\bar{a}^0}{dt},$$

где φ и a — скалярные функции от аргумента t;

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\,\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt}\bar{b} + \bar{a}\frac{d\bar{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} \times \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt};$$

$$\frac{d\bar{a}\,[t(s)]}{ds} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Скалярное поле

Скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого определена функция u (*функция поля*), зависящая только от координат этой точки:

$$u = u(x, y, z) \text{ или } u = u(\bar{r}).$$

Поля, которые не зависят от времени, называются *стационарными*; поля

называются *переменными*, если $u = u(x, y, z, t)$. Скалярные функции, далее рассматриваемые, непрерывны, с непрерывными частными производными.

Поверхность, определяемая уравнением $u(x, y, z) = \text{const}$, называется *поверхностью уровня*.

Скорость изменения u (x, y, z) в точке M по направлению вектора $\overline{MM'}$ определяется *производной по направлению* MM':

$$\frac{du}{ds} = \lim_{M' \to M} \frac{\Delta u}{|\overline{MM'}|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s},$$

где $\Delta s = |\overline{MM'}|$. Предел не изменится, если вместо отрезка MM' взять любую кривую $\bar{r} = \bar{r}(t)\ \{x(t), y(t), z(t)\}$, касающуюся в точке M прямой MM'. Если длину дуги этой кривой обозначить s, длину дуги от точки M до соседней точки M_1 — через Δs, то производная сложной функции $u = u(x(t), y(t), z(t))$ по дуге s и есть производная по направлению касательной MM' (фиг. 10):

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Градиентом скалярной функции $u(x, y, z)$ называется вектор (направлен по нормали $\bar{n}$ к поверхности уровня)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \operatorname{grad} u;$$

$$\frac{du}{ds} = \operatorname{grad} u \frac{d\bar{r}}{ds} =$$

$$= \operatorname{grad}_\tau u = MM_2 \text{ (фиг. 10)},$$

где $\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$ — единичный вектор касательной к кривой MM_1.

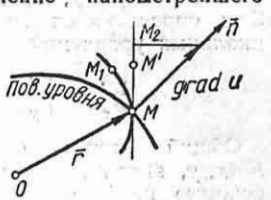
Полный дифференциал функции равен скалярному произведению градиента на радиус-вектор точки M: $du = \operatorname{grad} u\, d\bar{r}$.

Производная поля u в точке M по направлению $\bar{n}$ или $\operatorname{grad} u$ обозначается $\dfrac{du}{dn}$ и равна

$$\frac{du}{dn} = |\operatorname{grad} u| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Нормаль к поверхности уровня указывает направление наибыстрейшего изменения (роста — в сторону $\operatorname{grad} u$, падения — в противоположную сторону) скалярной функции u, а модуль градиента — абсолютную величину скорости этого изменения.



Фиг. 10. Градиент.

Пример. Потенциал электростатического поля с зарядом e в начале координат определяется функцией $u = \dfrac{e}{r}$, где $e = \text{const}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от точки M до начала координат. Поверхности уровня $\dfrac{e}{r} = c$ или $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{e}{c}\right)^2 = \text{const}$ — концентрические сферы.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{e}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{ex}{r^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{ey}{r^3}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{ez}{r^3}$$

$$\operatorname{grad} u = -\frac{e}{r^3}\left(\frac{x}{r}\bar{i} + \frac{y}{r}\bar{j} + \frac{z}{r}\bar{k}\right) = -\frac{e}{r^2}\bar{r}^0$$

т. е. $\operatorname{grad} u$ направлен к центру сферы по радиусу — это и есть направление наибольшей скорости изменения данной функции.

Оператор набла ∇ рассматривается как символический вектор:

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Градиент u можно рассматривать как произведение набла на скаляр:

$$\operatorname{grad} u = \bar{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u.$$

Векторное поле

Векторное поле есть часть пространства, в каждой точке которого определен некоторый вектор $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$, координаты его a_x, a_y, a_z — функции x, y, z; например, поле скоростей в данный момент в движущемся теле, поле градиентов данной скалярной функции. Модуль $\bar{a}$ определяет *интенсивность* поля.

Векторные поля, не зависящие от времени, называются *стационарными*, каковые далее и рассматриваются.

Векторными линиями (силовые линии) векторного поля называются кривые, касательные к которым в каждой

точке совпадают с направлением вектора $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z)$ в той же точке. Они определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Общий интеграл этой системы $F_1(x, y, z) = c_1$, $F_2(x, y, z) = c_2$ дает искомые векторные линии; постоянные интеграции c_1 и c_2 вычисляются заданием одной точки.

Если $\bar{a}$ есть вектор скорости движущейся частицы некоторой жидкости, то векторные линии будут линиями тока жидкости.

Элементарным потоком поля $\bar{a}$ через элемент площади $\Delta\sigma_k$ на поверхности σ называется

$$\bar{a}_k \bar{n}^0_k \Delta\sigma_k,$$

где $\bar{a}_k$ — вектор $\bar{a}$, взятый в точке $M(x_k, y_k, z_k)$ на $\Delta\sigma_k$; $\bar{n}^0_k$ — единичный вектор нормали к поверхности в той же точке.

Потоком поля $\bar{a}$ через поверхность σ называется

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta\sigma_k\to 0}} \sum_{k=1}^{m} \bar{a}_k \bar{n}^0_k \Delta\sigma_k = \Pi,$$

который равен поверхностному интегралу

$$\Pi = \iint_\sigma \bar{a}\, d\bar{\sigma} = \iint_\sigma a_n d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint_\sigma a_x dy\, dz + a_y\, dz\, dx + a_z\, dx\, dy,$$

где $d\bar{\sigma} = \bar{n}^0 d\sigma$ — вектор, направленный по нормали $\bar{n}$ к σ, $|d\bar{\sigma}| = d\sigma$, $\bar{n}^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Если $z = f(x, y)$ есть уравнение поверхности σ,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

то

$$\Pi = \iint_\sigma (-pa_x - qa_y + a_z)\, dx\, dy.$$

что является поверхностным интегралом второго типа (см. стр. 188).

Если поверхность σ определена векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, то

$$\Pi = \iint_\sigma \bar{a}\,(\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\, du\, dv.$$

В случае, если $\bar{a}$ — вектор скорости точки жидкости, то поток определяет количество жидкости, протекшей за единицу времени через поверхность σ.

Пример. Найти поток вектора $\bar{a} = zy\bar{i} + zx\bar{j} + z\bar{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящуюся в первом октанте.

Вычисляем

$$p = -\frac{x}{z};\ q = -\frac{y}{z};$$

$$\Pi = \iint_\sigma (2xy + z)\, dx\, dy.$$

Заменяем $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, проекция поверхности σ на xOy есть S — четверть круга: $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; направляем нормаль во вне сферы, тогда

$$\Pi = \iint_S (2xy + \sqrt{1 - x^2 - y^2})\, dx\, dy.$$

Первый интеграл

$$\iint_S 2xy\, dx\, dy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2y\, dy = \frac{1}{4}.$$

Второй интеграл вычисляем в полярных координатах:

$$\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, xy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{6};$$

$$\Pi = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{6}.$$

Расхождением (*дивергенцией*) вектора $\bar{a}$ в данной точке называется скалярная величина $\operatorname{div}\bar{a}$, равная отнесенному к единице объема потоку вектора $\bar{a}$ через поверхность бесконечномалого объема, окружающего данную точку:

$$\operatorname{div}\bar{a} = \lim_{v\to 0} \frac{1}{v} \iint_\sigma a_n\, d\sigma =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

или

$$\operatorname{div}\bar{a} = \nabla\bar{a}.$$

Теорема Остроградского. Поток вектора $\bar{a}$ через замкнутую поверхность σ равен интегралу от $\operatorname{div}\bar{a}$, взятому по объему V, ограниченному поверхностью σ:

$$\iint_{\sigma} a_n \, d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div}\bar{a} \, dv,$$

где нормаль $\bar{n}$ — внешняя.

Если рассматривать поле $\bar{a}$ как поле скоростей стационарного течения жидкости, то поток поля через замкнутую поверхность σ, ограничивающую некоторую область V, равен объемному расходу жидкости из области V или объемному расширению жидкости в области V за единицу времени. Дивергенция поля скоростей жидкости есть расход жидкости в данной точке, отнесенный к единице объема.

В случае любого поля $\bar{a}$ принимают, что $\operatorname{div}\bar{a}$ есть расход поля в данной точке, отнесенный к единице объема.

Линейным интегралом вектора $\bar{a}$ вдоль кривой L называется скаляр

$$\int_L \bar{a}\,d\bar{r} = \int_L a_\tau \, ds = \int_L |\bar{a}| \cos(\bar{\tau}, \bar{a}) \, ds = \int_L a_x \, dx + a_y \, dy + a_z \, dz,$$

являющийся криволинейным интегралом по L, причем $\bar{r}$ есть радиус-вектор точки кривой L, $\bar{\tau}$ — орт касательной к L.

Циркуляция Γ вектора $\bar{a}$ вдоль замкнутого контура L есть линейный интеграл по этому контуру при заданном направлении обхода

$$\Gamma = \oint_L \bar{a}\,d\bar{r}.$$

Линейный интеграл вектора $\bar{a}$ по L представляет собой работу вектора $\bar{a}$ при перемещении точки приложения $\bar{a}$ вдоль L.

Вихрем (*ротором*) вектора $\bar{a}$ называется вектор $\operatorname{rot}\bar{a}$ ($\operatorname{curl}\bar{a}$), координаты которого определены формулами

$$\operatorname{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}_y \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x};$$

$$\operatorname{rot}_z \bar{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

При помощи оператора набла ротор выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса. Циркуляция вектора $\bar{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку его вихря через любую поверхность σ, ограниченную данным контуром:

$$\oint_L \bar{a}\,d\bar{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot}_n \bar{a} \, d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(x, \bar{n}) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(y, \bar{n}) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(z, \bar{n}) \right] d\sigma,$$

где $\bar{n}$ — орт внешней нормали, a_x, a_y, a_z — непрерывные функции с непрерывными частными производными 1-го порядка.

Для плоского поля это равенство имеет вид

$$\oint_l a_x dx + a_y d_y = \iint_S \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

Пример. Если $\bar{a}$ есть скорость жидкости, то $\operatorname{rot}\bar{a}$ дает удвоенную угловую скорость вращения частиц жидкого тела.

Потенциальное векторное поле $\bar{a}$ есть поле градиентов некоторой скалярной функции, т. е. существует функция $u = u(x, y, z)$ такая, что $\bar{a} = \operatorname{grad} u$ или $a_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $a_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $a_z = \dfrac{\partial u}{\partial z}$. Функция $u(x, y, z)$ называется *потенциалом* поля. Чтобы поле $\bar{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно выполнение равенства $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$. Например, если жидкое тело свободно от вихрей, $\operatorname{rot}\bar{v} = 0$, то $\bar{v} = \operatorname{grad} u$. Циркуляция потенциаль-

ного вектора по замкнутому контуру равна нулю, если контур может стягиваться в точку поля, не пересекая границ поля. Линейный интеграл потенциального вектора не зависит от формы линии, а только от ее концов $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$

$$\int_{M_0}^{M} \bar{a}\, d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} \operatorname{grad} u\, d\bar{r} = \int_{M_0}^{M} du = u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Для потенциального поля дивергенция

$$\operatorname{div} \bar{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

где

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta = \nabla^2$$

называют *оператором Лапласа.*

Соленоидальное векторное поле $\bar{a}$ есть такое поле, для которого $\operatorname{div} \bar{a} = 0$. Оно обладает характерным свойством: поток поля равен нулю через всякую замкнутую поверхность, которую можно стянуть в точку, не пересекая границу поля. В таком поле векторные линии или замкнутые, или уходят в бесконечность, или начинаются и кончаются на границе поля.

Поле вихрей любого векторного поля $\bar{a}$ есть поле соленоидальное, т. е.

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{a}) = 0.$$

Если данное векторное поле $\bar{b} = \operatorname{rot} \bar{a}$, то $\bar{a}$ называется *векторным потенциалом* данного поля $\bar{b}$.

Точечным источником соленоидального поля называется граничная точка поля, изолированная от других граничных точек.

Поток поля через любую поверхность, ограничивающую источник, есть величина постоянная, называемая *мощностью* или *обильностью* источника.

Источник соленоидального поля с отрицательной мощностью называют также *стоком* поля.

Если потенциальное поле $\bar{a} (= \operatorname{grad} u)$ есть и соленоидальное, то $\operatorname{div} \bar{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$ или $\Delta u = 0$ (уравнение Лапласа).

Функция u, удовлетворяющая этому уравнению, называется *гармонической.*

Некоторые выражения при помощи набла

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \bar{a}) = \nabla (\nabla \times \bar{a}) = 0;$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \nabla (\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u;$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} u) = \nabla \times (\nabla u) = 0;$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{a}) = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = (\nabla \bar{a}) \nabla - (\nabla \nabla) \bar{a} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \bar{a}) - \nabla^2 \bar{a},$$

где $\nabla^2 \bar{a}$ — вектор, проекции которого — Δa_x, Δa_y, Δa_z.

ТЕНЗОРЫ *

Если x_1, x_2, x_3—прямоугольные координаты точки M относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$, а $x_{1'}$, $x_{2'}$, $x_{3'}$ — прямоугольные координаты той же точки M в новой системе координат $Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$, то преобразование координат определяется формулами (стр 250)

$$x_{i'} = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\alpha_{ik} = \cos(x_{i'}, x_k)$. Штрих при индексе указывает, что соответствующая величина рассматривается относительно новой системы координат. Обратные формулы:

$$x_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii} x_{i'} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В дальнейшем рассматриваются так называемые *аффинные ортогональные тензоры*, называемые просто *тензорами*

Тензором 1-го порядка (валентности, ранга) называется всякая совокупность трех величин a_1, a_2, a_3, преобразующихся в величины $a_{1'}$, $a_{2'}$, $a_{3'}$ при переходе от одной системы координат x_k к другой системе $x_{k'}$, по формулам

$$a_{i'} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} a_k \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (2)$$

Всякий вектор в пространстве есть тензор 1-го порядка, причем можно рассматривать как один вектор, так и поле векторов (компоненты суть функции координат точки).

---

* См. литературу на стр. 350: [91], [95], [92], [90].

Тензором 2-го порядка называется совокупность $3^2 = 9$ величин a_{kl} (его компоненты) в данной координатной системе, которые при переходе к новой системе координат преобразуются в величины $a_{i'j'}$ по формулам преобразования

$$a_{i'j'} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kl}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\ (i, j = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Аналогично определяются *тензоры* 3-го, 4-го и т. д. порядков и в пространстве любого числа измерений.

Тензор 1-го порядка, или вектор $\bar{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, иногда обозначают общим компонентом a_i.

Тензор 2-го порядка T, определяемый компонентами a_{kl}, записывают в виде матрицы

$$T = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$

или обозначают общим компонентом a_{kl}. Аналогично обозначаются тензоры высших порядков.

Примеры:

1) Тензор упругих напряжений. Рассмотрим внутри упругого тела некоторый объем V, ограниченный поверхностью S. На каждый элемент dS этой поверхности действует сила $\bar{p}_n dS$ со стороны частиц тела, лежащих вне V. Сила $\bar{p}_n$, отнесенная к единице площади, зависит от нормали $\bar{n}$ к рассматриваемому элементу и называется напряжением на площадку dS с нормалью $\bar{n}$. Напряжение $\bar{p}_n$ вообще не совпадает с направлением $\bar{n}$. Для каждой из осей координат (x_1, x_2, x_3) мы можем определить соответствующее напряжение как вектор: $\bar{p}_1\{p_{11}, p_{12}, p_{13}\}$, $\bar{p}_2\{p_{21}, p_{22}, p_{23}\}$, $\bar{p}_3\{p_{31}, p_{32}, p_{33}\}$.

Совокупность этих трех векторов (или матрица из элементов p_{ik}) определяет тензор П, называемый *тензором упругих напряжений* в данной точке.

Применение начала Даламбера дает равенство $\bar{p}_n = \bar{p}_1\cos(\bar{n}, x_1) + \bar{p}_2\cos(\bar{n}, x_2) + \bar{p}_3\cos(\bar{n}, x_3)$, справедливое для всякого направления $\bar{n}$. Отсюда для трех взаимно перпендикулярных новых направлений $x_{1'}$, $x_{2'}$, $x_{3'}$ получаем

$$\bar{p}_{i'} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\bar{p}_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Если $\{p_{i'1'}, p_{i'2'}, p_{i'3'}\}$ — координаты вектора $\bar{p}_{i'}$ по новым осям, то $p_{i'j'} = \mathrm{пр}_{x_{j'}}\bar{p}_{i'} = -\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\,\mathrm{пр}_{x_{j'}}\bar{p}_k$. Но $\mathrm{пр}_{x_{j'}}\bar{p}_k = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{jl}p_{kl}$, поэтому

$$p_{i'j'} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jl}p_{kl}\ (i, j = 1, 2, 3).$$

На последние равенства можно смотреть как на формулы преобразования p_{kl} при переходе от одной координатной системы к другой. Так как эти формулы совпадают с формулами (3), то величины p_{kl} образуют тензор.

2) Единичный тензор

$$J = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

так как приняв в одной системе координат $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, в любой другой системе будем иметь на основании формул (3):

$$a_{i'i'} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}^2 = 1;\ a_{i'j'} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0\ (i \neq j).$$

3) Диада. Если даны два вектора $\bar{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, то можно составить матрицу

$$\begin{Bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{Bmatrix},$$

которая определяет тензор, называемый *диадой* и обозначаемый $\bar{a}\,\bar{b}$. Действительно, величины $a_{kl} = a_k b_l$ преобразуются по формулам (3), так как в силу формул (2)

$$a_{i'} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}a_k \qquad b_{j'} = \sum_{l=1}^{3}\alpha_{jl}b_l$$

мы будем иметь

$$a_{i'}b_{j'} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{ik}\alpha_{jl}a_k b_l. \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

т. е. если обозначить $a_{i'j'} = a_{i'}b_{j'}$, то элементы матрицы преобразуются по формулам (3).

Диада

$$\bar{b}\,\bar{a} = \begin{Bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{Bmatrix}$$

отлична от диады $\bar{a}\,\bar{b}$.

Сумма (разность) двух тензоров одного порядка a_{ij}, b_{ij} есть новый тензор, определяемый равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Тензор a_{ij} называется *симметрическим*, если $a_{ij} = a_{ji}$, и *кососимметрическим*, если $a_{ij} = -a_{ji}$.

Тензор 2-го порядка можно разложить на сумму двух тензоров — симметрического и кососимметрического:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji});$$

здесь первая скобка есть симметрический тензор, а вторая скобка — кососимметрический тензор.

Симметрированием тензора по группе нижних индексов называется сложение этого тензора с теми, которые из него получаются всевозможными перестановками индексов данной группы; сумму обозначают

$$a_{(i\,|\,j\,|\,k)} = a_{ijk} + a_{kji},$$

где знаком $|\,j\,|$ отделяют не участвующий в симметрировании индекс.

Альтернирование тензора отличается от предыдущей операции тем, что в составленной сумме исходный тензор и тензоры, полученные из него четными перестановками индексов, берутся со знаком плюс, а остальные — с минусами, и сумму обозначают

$$a_{[ijk]} = a_{ijk} - a_{ikj} + a_{jki} - a_{jik} + a_{kij} - a_{kji}.$$

Симметричность тензора a_{ijk} по i, j можно записать в виде $a_{[ij]\,k} = 0$, а кососимметричность a_{ijk} по i, j — в виде $a_{(ij)\,k} = 0$.

Умножение тензоров производится по следующему правилу: каждый компонент первого тензора умножается на каждый компонент второго тензора; порядок получаемого тензора равен сумме порядков перемножаемых тензоров.

Примеры:

1) Диада есть произведение двух тензоров, из которых каждый 1-го порядка.

2) Произведение тензора 2-го порядка a_{ij} на тензор 1-го порядка b_k есть новый тензор 3-го порядка $c_{ijk} = a_{ij}b_k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$), и т. д.

Свертыванием ортогональных аффинных тензоров по двум каким-нибудь индексам (индексы свертывания) называется следующая операция: из компонентов тензора некоторого порядка, например a_{ijk}, составляются суммы

$$a_{11k} + a_{22k} + a_{33k} = c_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

и получается тензор c_k порядка на 2 единицы меньше. Здесь индексами свертывания являются i и j.

В случае тензора 2-го порядка a_{ij} свертывание дает

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

скалярную величину, называемую инвариантом тензора.

Умножение и свертывание приводят к новым тензорам, иногда называемым *внутренними произведениями*. Например, из тензора $a_{ij}b_k$ можно получить два внутренних произведения: $c_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_k$ (свертывание по j и k) и $c'_j = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}b_k$ (свертывание по i и k), из которых каждый есть тензор 1-го порядка, т. е. вектор. Вектор $\overline{c}\{c_1, c_2, c_3\}$ (а также $\overline{c'}$) называется *линейной вектор-функцией* вектора $\overline{b}$ (b_1, b_2, b_3); компоненты $\overline{c}$ выражаются линейным однородным образом через компоненты $\overline{b}$, причем коэффициентами являются компоненты тензора a_{ik}. Если этот тензор обозначить через T, то рассматриваемое произведение можно условно записать в виде

$$\overline{c} = T\overline{b}.$$

На тензор T, называемый *аффинором*, можно смотреть как на оператор, преобразующий вектор $\overline{b}$ в вектор $\overline{c}$.

Тензорный признак системы величин a_{ij}. Если для любого вектора b_i величины $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}b_i$ суть компоненты некоторого вектора, то a_{ij} образуют тензор.

В общем случае вместо b_i берется тензор любого порядка и производится свертывание.

Примеры:

1) Пусть упругое тело подвергается действию сил, вызывающих его смещение и деформацию. Пусть M — какая-либо точка, M_1 — близкая точка, и действующие силы за малый промежуток времени приведут точки M и M_1 в точки M' и M'_1. Основное положение теории упругости заключается в том, что вектор $\overline{M'M'_1}$ получается из вектора $\overline{MM_1}$ воздействием тензора T

$$\overline{M'M'_1} = T(\overline{MM_1}),$$

так как аналитически компоненты $\overline{M'M'_1}\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ выражаются через компоненты $\overline{MM_1}\{X_1, X_2, X_3\}$ по формулам

$$Y_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}X_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

В силу предыдущего признака система величин a_{ik} образует тензор, обозначенный через T.

2) Пусть твердое тело вращается около неподвижной точки O; $\bar{\omega}\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — вектор угловой скорости, $\overline{OM} = \bar{r}\{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор точки M тела. Скорость этой точки M

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Главный момент количества движения $\bar{L}$ тела относительно точки O равен

$$\bar{L} = \int \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm;$$

dm — элемент массы в точке M. Так как

$$\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega}\, \bar{r}^2 - \bar{r}\,(\bar{r}\,\bar{\omega}) =$$

$$= \bar{\omega}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - \bar{r}\,[x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3],$$

то координаты вектора $\bar{L}\{L_1, L_2, L_3\}$ определяются формулами:

$$L_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3,$$
$$L_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3,$$
$$L_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3,$$

где $I_{11} = \int \left(x_2^2 + x_3^2\right) dm$, $I_{12} = -\int x_1 x_2 dm$ и т. д.

В силу признака коэффициенты I_{ij} образуют тензор (обозначим его I), называемый *тензором моментов инерции*; I — симметрический тензор Можно кратко записать:

$$\bar{L} = I\bar{\omega},$$

т. е. вектор момента количества движения является линейной вектор-функцией вектора угловой скорости. $I\bar{\omega}$ — внутреннее произведение тензора на вектор.

Координатный метод в геометрии, наряду с величинами существенно геометрическими, дает и величины случайные, связанные с выбором системы координат. Тензорное исчисление развивает такие вычислительные приемы, которые позволяют отличать геометрически существенное от привнесенного выбором координат. Такими приемами являются операции сложения, умножения тензоров, операция свертывания тензора; эти операции инвариантны по отношению к преобразованию координат.

Если ввести более общие формулы преобразования координат, то получим более общие тензоры как системы величин, преобразующихся по некоторым новым формулам.

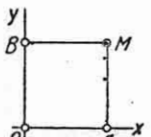
ГЛАВА XI

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ*

Аналитическая геометрия изучает свойства различных геометрических образов (линий, поверхностей и др.) при помощи метода координат. Методом координат называется способ определения положения одного геометрического образа относительно другого при помощи чисел. Исходя из условий задачи и используя введенные координаты, составляют уравнения. Решение геометрической задачи сводится к исследованию и решению уравнений.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольные (декартовы) координаты. На плоскости проводятся две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (фиг. 1), на каждой из которых выбрано положительное направление; они называются *осями прямоугольной системы координат*, а точка O их пересечения называется *началом координат*. Положение любой точки M плоскости относительно осей координат определяется двумя отрезками: $OA = BM$ и AM ($AM \parallel Oy$). Если выбрать некоторый отрезок m за масштаб, то два отвлеченных числа x и y



Фиг. 1. Прямоугольные координаты.

$$x = \frac{OA}{m},$$

$$y = \frac{AM}{m}$$

называются *координатами* точки M. Число x называется *абсциссой* точки M и берется со знаком плюс, если направление отрезка OA совпадает с положительным направлением оси Ox, в противном случае — со знаком минус. Число y называется *ординатой* точки M и берется со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадает ли направление AM с положительным направлением Oy или нет.

В записи $M(x, y)$ на первом месте всегда стоит абсцисса точки.

Каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел (координат) и обратно.

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Расстояние r от точки $M(x, y)$ до начала координат O (0, 0)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении. Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — начальная и конечная точки отрезка M_1M_2, то координаты x и y точки M, делящей отрезок в данном отношении $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если M является серединой отрезка, то $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Отрицательным значениям λ соответствует деление отрезка внешним образом.

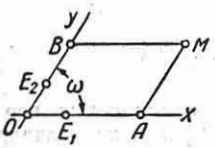
Косоугольные координаты. В косоугольной системе координат оси Ox

* См. литературу на стр. 349: [18], [8], [16] [20].

и Oy образуют угол $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. На каждой оси можно взять свой масштаб: $m_1 = OE_1$ на оси Ox, $m_2 = OE_2$ на Oy (фиг. 2). Положение всякой точки M плоскости определяется координатами

$$x = \frac{OA}{m_1}, \quad y = \frac{AM}{m_2}; \quad AM \parallel Oy.$$

Такие координаты еще называются *аффинными*. В случае $\omega = \frac{\pi}{2}$, но $m_1 \neq m_2$ координаты x и y также называются аффинными. Прямоугольные координаты представляют частный случай аффинных при $m_1 = m_2 = m$, $\omega = \frac{\pi}{2}$.



Фиг. 2. Косоугольные координаты.

В дальнейшем рассматривается прямоугольная система координат.

Преобразование координат. Если даны на плоскости две системы координат xOy и $x'O'y'$, то формулы преобразования координат позволяют по координатам x', y' точки M вычислить координаты x, y той же точки и обратно.

а) Формулы переноса начала. Если оси $x'O'y'$ соответственно параллельны осям xOy, (a, b) — координаты O' относительно xOy, то

$$x = x' + a; \quad y = y' + b.$$

б) Формулы поворота осей координат. Если обе системы имеют общее начало O, угол $(Ox, Ox') = \alpha$, то

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha;$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

где $\alpha > 0$, если поворот совершается против часовой стрелки.

в) Общее преобразование системы координат состоит из поворота xOy на угол $\alpha = \angle(Ox, O'x')$ и переноса начала в точку $O'(a, b)$:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a;$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b.$$

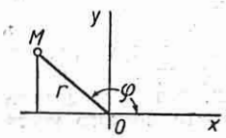
Полярные координаты. Полупрямая, выходящая из некоторой точки, называется *лучом*. Положение всякой точки M можно определить относительно луча x, выходящего из точки O (фиг. 3), двумя числами: $r = \frac{OM}{m}$, где m — масштаб, $OM = |\overline{OM}|$ — длина вектора $\overline{OM}$, и величиной угла φ, отсчитываемого от луча x до направления вектора $\overline{OM}$. Называют φ *полярным углом*, r — *радиусом-вектором* точки M, луч x — *полярной осью*, точку O — *полюсом*, систему координат — *полярной*. Полярный угол φ считается положительным в направлении против часовой стрелки и отрицательным в обратном направлении.

При указанном на фиг. 3 расположении прямоугольной системы координат и полярной оси переход от (r, φ) к (x, y) одной и той же точки M совершается по формулам:

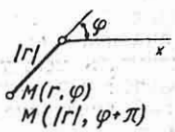
$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

Полюс имеет координаты $r = 0$, φ — произвольно. Чтобы получить все точки



Фиг. 3. Полярные координаты.



Фиг. 4. Полярные координаты.

плоскости, достаточно брать $r \geqslant 0$ и угол φ изменять от 0 до 2π.

Для построения точки $M(r, \varphi)$, где $r < 0$, следует провести луч OM под углом $\varphi + \pi$ к полярной оси и на нем отложить $|r|$ (фиг. 4).

Расстояние d между точками $M_1(r_1, \varphi_1)$ и $M_2(r_2, \varphi_2)$

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Геометрическое значение уравнения. Всякое уравнение $F(x, y) = 0$, если в нем рассматривать x, y как координаты в прямоугольной системе координат, определит на плоскости совокупность точек M, координаты которых x, y удовлетворяют данному уравнению. Такую совокупность точек называют *линией*, а $F(x, y) = 0$ — *уравнением* этой *линии* (см. стр. 258).

Если $F(x, y)$ — многочлен n-й степени относительно x, y, то линия называется *алгебраической* n-го порядка.

При повороте осей и переносе начала координат степень уравнения алгебраической кривой сохраняется.

В полярной системе координат линия будет определяться уравнением $f(r, \varphi) = 0$.

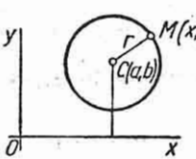
Переменные x, y (или r, φ), связанные одним уравнением, называются текущими координатами точек данной линии. Если точка (x_0, y_0) лежит на линии, то $F(x_0, y_0) \equiv 0$, и обратно: если некоторая пара чисел (x_0, y_0) является решением уравнения $F(x, y) = 0$, то точка (x_0, y_0) лежит на линии, изображаемой этим уравнением.

Пример. Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = a^2$, представляет окружность с центром в начале координат и радиусом a, так как левая часть уравнения есть квадрат расстояния точки $M(x, y)$ от начала координат, а правая часть — величина постоянная.

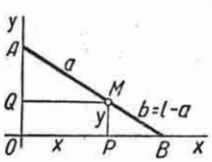
Уравнение геометрических мест. Если данную линию можно рассматривать как геометрическое место точек, обладающих одним каким-либо общим для всех этих точек геометрическим свойством (геометрический закон образования линии), то, выбрав систему координат, можно это свойство записать в аналитической форме; получается зависимость между координатами произвольной точки линии; эта зависимость и есть уравнение геометрического места точек.

Примеры:

1) Составить *уравнение окружности* как геометрического места точек, удаленных от центра $C(a, b)$ на постоянное расстояние r. Пусть x, y — текущие координаты точки окружности относительно прямоугольной системы координат (фиг. 5).



Фиг. 5. Окружность.



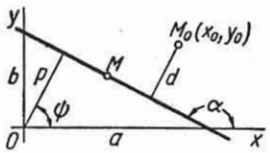
Фиг. 6.

Тогда $CM = r$ или $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — уравнение окружности.

2) Стержень AB длиной l скользит своими концами по сторонам прямого угла. Составить уравнение траектории, описанной той точкой M стержня, которая отстоит от одного конца A на расстоянии a. Если выбрать за оси координат стороны данного прямого угла (фиг. 6), то ввиду параллельности OA и PM получаем $\frac{x}{a} = \frac{PB}{l-a}$, $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; геометрическое место точек M есть эллипс. На этом основано устройство эллипсографа — прибора для вычерчивания эллипса.

Прямая линия

Нормальное уравнение прямой. Если положение прямой относительно xOy определить двумя параметрами: углом ψ, отсчитываемым от положительного направления оси x до направления перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и p — длиной этого перпендикуляра (фиг. 7), то уравнение



Фиг. 7. Параметры нормального уравнения прямой.

$$x \cos \psi + y \sin \psi - p = 0, \quad (p > 0),$$

где x, y — текущие координаты точки на прямой, называется *нормальным уравнением* прямой.

Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0$$

есть уравнение прямой; оно называется *общим уравнением* прямой и приводится к нормальному уравнению умножением на нормирующий множитель $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, в котором берется знак, противоположный знаку C.

Пример. Уравнение $5x + 4y + 20 = 0$ приводится к нормальному виду умножением на

$$\frac{1}{-\sqrt{5^2 + 4^2}} = -\frac{1}{\sqrt{41}};$$

$$-\frac{5}{\sqrt{41}} x - \frac{4}{\sqrt{41}} y - \frac{20}{\sqrt{41}} = 0.$$

Параметры, определяющие положение прямой:

$$p = \frac{20}{\sqrt{41}}, \quad \cos \psi = -\frac{5}{\sqrt{41}}, \quad \sin \psi = -\frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Следует вычислить по $\operatorname{tg} \psi = \frac{4}{5}$ угол первой четверти $\psi_0 = \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$, тогда $\psi = \pi + \psi_0$ (фиг. 8).

Частные случаи: $Ax + C = 0$ — уравнение прямой, параллельной Oy; $By +$

$+ C = 0$ — прямая $\| Ox$; $x = 0$ — уравнение оси Oy; $y = 0$ — уравнение оси Ox; $Ax + By = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат.

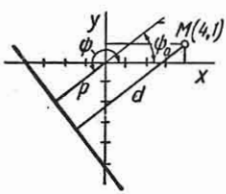
Расстояние от точки до прямой. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ (фиг. 7) до прямой равно левой части нормального уравнения этой прямой $x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0$, в которую вместо текущих координат подставлены координаты данной точки

$$d = x_0\cos\psi + y_0\sin\psi - p$$

или

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если в результате вычисления $d > 0$, то начало координат O и точка M_0 лежат по разные стороны от прямой, а если $d < 0$, то точки O и M_0 лежат по одну сторону от прямой.



Фиг. 8. К примеру приведения уравнения прямой к нормальному виду.

Пример. Расстояние от точки $M_0(4,1)$ до прямой $5x + 4y + 20 = 0$ (фиг. 8):

$$d = \frac{5\cdot 4 + 4\cdot 1 + 20}{-\sqrt{41}} = -\frac{44}{\sqrt{41}}.$$

Точка M_0 отстоит от прямой на расстоянии $|d| = \frac{44}{\sqrt{41}}$ и лежит вместе с началом координат по одну сторону от прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой (не параллельной Oy) можно представить в виде

$$y = kx + b,$$

где x, y — текущие координаты; параметры, определяющие положение прямой: b—отрезок ($\gtrless 0$), отсекаемый прямой на оси y (*начальная ордината*); $k = \operatorname{tg}\alpha$ — *угловой коэффициент*, причем угол α отсчитывается от положительного направления оси x до прямой в направлении против часовой стрелки (см. фиг. 7).

Уравнение прямой, параллельной Oy и отсекающей на Ox отрезок a,

$$x = a.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_1, y_1),

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

называется *уравнением пучка прямых* (k — переменный параметр, см. стр. 242).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_1, y_1):

$$x = x_1 + lt,$$
$$y = y_1 + mt;$$

постоянные l и m пропорциональны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, где угол α образован прямой с осью Ox: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{l}$. Параметр t, изменяемый от $-\infty$ до $+\infty$, определяет положение точки на прямой: при $t = 0$ получается данная точка (x_1, y_1), при $t > 0$ получаются точки на прямой по одну сторону от M_1, а при $t < 0$ получаются точки по другую сторону от M_1.

Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой, не проходящей через начало координат, можно представить в виде

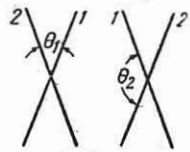
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где параметры a и b — отрезки (с учетом знака), отсекаемые прямой соответственно на осях Ox и Oy (см. фиг. 7).

Угол θ между двумя прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Угол θ отсчитывается от первой прямой ко второй против часовой стрелки; $\operatorname{tg}\theta > 0$, тогда $\theta = \theta_1$ — острый угол между прямыми; $\operatorname{tg}\theta < 0$, тогда $\theta = \theta_2$—тупой угол между прямыми (фиг. 9), $\theta_2 = \pi - \theta_1$.



Фиг. 9. Угол между прямыми.

Если прямые даны уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}; \qquad k_2 = -\frac{A_2}{B_2};$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или } k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ или } k_1k_2 = -1.$$

Примеры:

1) В треугольнике $M_1M_2M_3$, заданном своими вершинами $M_1(1, -1)$, $M_2(2, -3)$, $M_3(4, 2)$, провести через вершину M_1 прямую, параллельную стороне M_2M_3, и составить уравнение высоты, опущенной из точки M_1 на M_2M_3.

Уравнение M_2M_3:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y+3}{2+3}$$

или $y + 3 = {}^5/_2\,(x-2)$; ее угловой коэффициент $k = {}^5/_2$; уравнение искомой параллельной прямой $y + 1 = {}^5/_2\,(x-1)$ или $5x - 2y - 7 = 0$; уравнение искомой высоты

$y + 1 = (-{}^2/_5)\,(x-1)$ или $2x + 5y + 3 = 0$.

2) Найти уравнения прямых, пересекающих данную прямую $y = 2x + 1$ в точке $M(1, 3)$ под углом $\theta = 45°$. Так как $\operatorname{tg} 45° = 1$ и если обозначить угловой коэффициент данной прямой k_1, причем $k_1 = 2$, то угловой коэффициент k_2 искомых прямых найдется из равенств

$$1 = \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{2 - k_2}{1 + 2k_2},$$

откуда получаются два значения k_2: 1) $k_2 = -3$, соответствующая прямая $y - 3 = -3\,(x-1)$ или $y = -3x + 6$; 2) $k_2 = {}^1/_3$, прямая $y - 3 = {}^1/_3\,(x-1)$ или $y = {}^1/_3x + {}^8/_3$.

Координаты точки пересечения прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$x = \frac{C_2B_1 - B_2C_1}{A_1B_2 - B_1A_2}; \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - B_1A_2};$$

$$(A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0).$$

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны; если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

Условие пересечения трех прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ в одной точке:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Условие принадлежности трех точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) **одной прямой:**

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1},$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение пучка прямых. *Пучком прямых* называется совокупность прямых, проходящих через данную точку (см. стр. 241). Если последняя дана пересечением прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то уравнение всякой прямой, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где λ — переменный параметр.

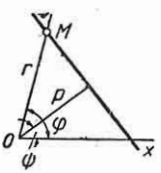
Уравнение биссектрис углов, образованных двумя прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ **и** $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

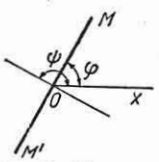
Уравнение прямой в полярных координатах

$$p = r\cos(\varphi - \psi),$$

где (r, φ) — текущие полярные координаты точки M на прямой; положение



Фиг. 10. Полярное уравнение прямой.



Фиг. 11. Полярное уравнение луча.

прямой относительно полярной оси Ox определяется перпендикуляром p и углом ψ (фиг. 10).

Если прямая проходит через полюс, то уравнение луча OM имеет вид $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ (фиг. 11), а для луча OM' (продолжение OM) $\varphi - \psi = \frac{\pi}{2}$.

Кривые 2-го порядка

Окружность. Уравнение вида

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

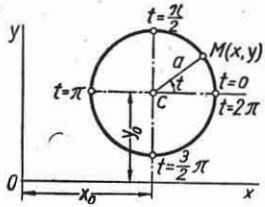
определяет *окружность* с центром в точке $\left(x_0 = -\frac{A}{2},\ y_0 = -\frac{B}{2}\right)$ и радиусом $a = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$, если $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} > C$; уравнение может быть приведено к виду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

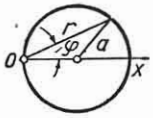
Параметрические уравнения окружности:

$$x = x_0 + a\cos t, \quad y = y_0 + a\sin t,$$

где переменный параметр t изменяется от 0 до 2π и геометрически означает угол, отсчитываемый от положительного направления Ox к подвижному радиусу против часовой стрелки (фиг. 12).



Фиг. 12. К уравнению окружности в прямоугольных координатах.



Фиг. 13. К уравнению окружности в полярных координатах.

Параметрические уравнения окружности с центром в точке (0, 0)

$$x = a\cos t;\ y = a\sin t.$$

В полярных координатах (r, φ) уравнение окружности с центром в точке (r_0, φ_0) и радиусом a имеет вид

$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = a^2;$$

если центр лежит на полярной оси и окружность проходит через полюс, то уравнение имеет вид (фиг. 13)

$$r = 2a\cos\varphi;$$

уравнение окружности с центром в полюсе

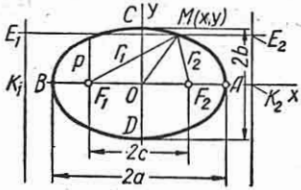
$$r = a.$$

Эллипс. Эллипсом называется геометрическое место точек M, для каждой из которых сумма расстояний r_1 и r_2 до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная: $r_1 + r_2 = 2a$.

При расположении осей Ox и Oy на фиг. 14 каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где x, y—текущие координаты (точки M); $2a = AB$, $2b = CD$—большая и малая оси эллипса; $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \frac{1}{2}F_1F_2$, эксцентриситет эллипса $e = \frac{c}{a} < 1$. Фокальный параметр (половина длины



Фиг. 14. Эллипс и его элементы.

хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси) $p = \frac{b^2}{a}$.

Точки A, B, C, D — вершины эллипса, точка O — центр эллипса.

Директрисы — прямые K_1E_1 и K_2E_2, параллельные малой оси и находящиеся на расстоянии $OK_1 = OK_2 = \frac{a}{e}$ от нее. Для каждой точки $M(x, y)$ эллипса $\frac{r_1}{ME_1} = \frac{r_2}{ME_2} = e$. Рациональные выражения для радиусов-векторов r_1 и r_2 точки M:

$$r_1 = a + ex;\quad r_2 = a - ex.$$

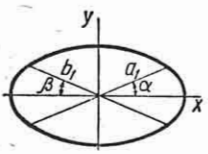
Диаметром эллипса называется геометрическое место середин параллельных хорд. Если k_1 — угловой коэффициент этих хорд, k_2 — угловой коэффициент диаметра, то $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$; направления, определяемые k_1 и k_2, называются *сопряженными*. Если α и β — острые углы сопряженных диаметров с большой осью ($k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = -\operatorname{tg}\beta$) и длины их $2a_1$ и $2b_1$, то $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ и $a_1b_1\sin(\alpha + \beta) = ab$ (теоремы *Аполлония*) (фиг. 15). Взаимно сопряженные и перпендикулярные диаметры — *главные диаметры* эллипса, они же — оси симметрии.

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x, y)$

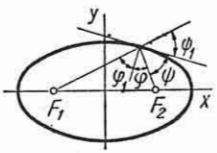
$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

где X, Y — текущие координаты точки касательной. Нормаль и касательная

(фиг. 16) в точке касания являются биссектрисами соответственно внутреннего ($\varphi = \varphi_1$) и внешнего ($\psi = \psi_1$) углов между r_1 и r_2.



Фиг. 15. Сопряженные диаметры эллипса.



Фиг. 16. Касательная и нормаль эллипса.

Радиус кривизны в точке $M(x, y)$

$$R = a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3\psi}.$$

В вершинах A и B (см. фиг. 14)

$$R = b^2 : a = p;$$

в вершинах C и D

$$R = a^2 : b.$$

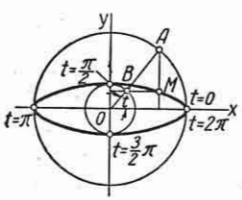
Параметрические уравнения эллипса:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t,$$

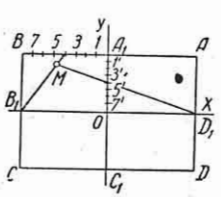
где параметр t — угол xOA (фиг. 17), соответствующий точке M на эллипсе.

Построение точек эллипса.

1. Через общий центр O двух окружностей радиусов a и b проводим прямую под углом t к Ox, пересекающую окружности в точках A и B (фиг. 17).



Фиг. 17. Эллипс как проекция окружности.



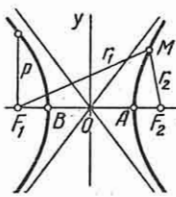
Фиг. 18. Построение точек эллипса.

Точка пересечения прямых $AM \parallel Oy$ и $BM \parallel Ox$ лежит на эллипсе.

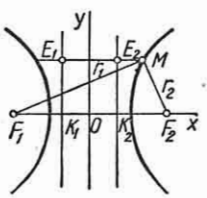
2. В прямоугольнике $ABCD$ размерами $AB = 2a$, $BC = 2b$ через середины A_1, B_1, C_1, D_1 сторон проводим оси координат (фиг. 18), отрезки A_1B и A_1O каждый в отдельности делим на одинаковое число равных частей, нумеруя точки, начиная от A_1. Лучи, идущие из D_1 и B_1 через точки деления отрезков A_1O и A_1B с одинаковыми номерами, пересекаются в точке M на эллипсе.

Эллипс с полуосями a и b есть проекция окружности, построенной на большой оси эллипса как на диаметре, если плоскость окружности наклонена к плоскости эллипса под углом $\theta = \arccos\frac{b}{a}$.

Гипербола. *Гиперболой* называется геометрическое место точек M, для



Фиг. 19. Гипербола.



Фиг. 20. Директрисы гиперболы.

каждой из которых разность расстояний r_1, r_2 до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная; $r_1 - r_2 = 2a$ (правая ветвь); $r_2 - r_1 = 2a$ (левая ветвь).

Относительно системы координат xOy (фиг. 19) каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где x, y — координаты точки M; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $c = \frac{1}{2}F_1F_2$; $2a = AB$ — отрезок оси x между вершинами гиперболы; ось симметрии Ox, которую гипербола пересекает, называется действительной осью гиперболы; вторая ось симметрии Oy не пересекает гиперболу и называется ее мнимой осью; a — действительная полуось; b — мнимая полуось.

Точка O — центр гиперболы; фокальный параметр (половина хорды, проходящей через фокус параллельно Oy) $p = \frac{b^2}{a}$; эксцентриситет $e = \frac{c}{a} > 1$.

Директрисы — прямые K_2E_2 и K_1E_1, параллельные мнимой оси и находя-

щиеся на расстояниях от нее $OK_1 = OK_2 = \frac{a}{e}$ (фиг. 20). Для всякой точки $M(x, y)$ гиперболы

$$\frac{r_1}{ME_1} = \frac{r_2}{ME_2} = e.$$

Рациональные формулы для радиусов-векторов точек правой ветви $r_1 = a + ex$, $r_2 = -a + ex$ и левой ветви $r_1 = -a - ex$, $r_2 = a - ex$.

Диаметром гиперболы называется геометрическое место середин параллельных хорд. Если k_1 — угловой коэффициент этих хорд, k_2 — угловой коэффициент диаметра, то $k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}$; направления, определяемые k_1 и k_2, называются *сопряженными*. Взаимно сопряженные и перпендикулярные диаметры — *главные диаметры*, они же — оси симметрии.

Асимптоты гиперболы — прямые, определяемые уравнениями

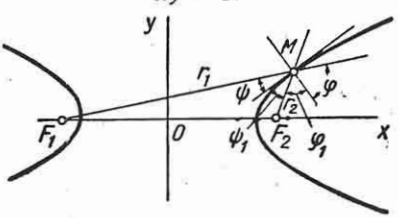
$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Асимптоты гиперболы — самосопряженные диаметры.

Расстояние от точки гиперболы до асимптоты неограниченно убывает при удалении точки по кривой в бесконечность.

Если за оси координат принять асимптоты, то уравнение гиперболы (в аффинных координатах) имеет вид

$$xy = C.$$



Фиг. 21. Касательная и нормаль гиперболы.

Касательная к гиперболе в точке $M(x, y)$ имеет уравнение

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1;$$

X, Y — текущие координаты.

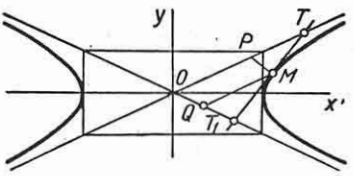
Касательная и нормаль — биссектрисы соответственно внутреннего ($\psi = \psi_1$) и внешнего ($\varphi = \varphi_2$) углов между r_1 и r_2 точки касания (фиг. 21).

Радиус кривизны

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 \psi}.$$

В вершинах $R = b^2 : a = p$.

Отрезок касательной TT_1 между асимптотами делится в точке касания пополам: $MT = MT_1$ (фиг. 22). Площадь $\triangle TOT_1$ между касательной и

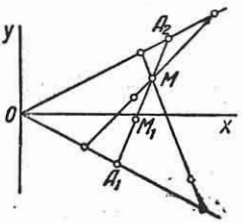


Фиг. 22. Отрезки касательной между асимптотами гиперболы.

асимптотами равна ab (для всякой точки M). Если MP и MQ параллельны асимптотам, то произведение отрезков

$$MP \cdot MQ = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{1}{4} c^2.$$

Построение точек гиперболы, имеющей данные асимптоты и проходящей через данную точку M: через эту точку M проводят всевозможные прямые, на которых от точек пересечения с асимптотой (любой) откладывают отрезки A_1M_1, равные MA_2; геометрическое место точек M_1 есть гипербола (фиг. 23).



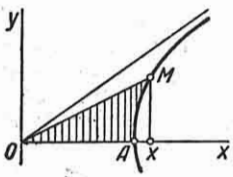
Фиг. 23. Построение точек гиперболы.

Сопряженные гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них является мнимой осью другой. Если обозначить через $2a_1$ и $2b_1$ длины двух сопряженных диаметров этих гипербол, то $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, $ab = a_1 b_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ (теоремы *Аполлония*), где α_1 и α_2 — углы диаметров с осью Ox.

Площадь сектора (фиг. 24)

$$OAM = \frac{1}{2}\,ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{1}{2}\,ab\ \mathrm{Arch}\,\frac{x}{a}.$$

Равнобочная гипербола (у которой $a = b$) имеет уравнение $x^2 - y^2 = a^2$; ее асимптоты $y = \pm x$ взаимно перпендикулярны.

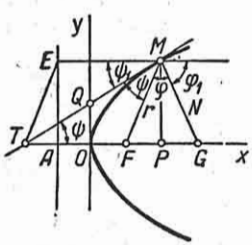


Фиг. 24. Гиперболический сектор.

Уравнение равнобочной гиперболы относительно ее асимптот, принятых за оси координат: $xy = \frac{a^2}{2}$.

Параметрические уравнения: 1) $x = a \operatorname{ch} t$; $y = b \operatorname{sh} t$ (правая ветвь); t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; 2) $x = a \sec t$; $y = b \operatorname{tg} t$; при $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ получается правая ветвь, при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi$ — левая ветвь.

Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние r до данной точки F (фокуса) равно расстоянию d до данной прямой (директрисы AE): $r = d = ME$ (фиг. 25).



Фиг. 25. Парабола и ее элементы.

Относительно xOy на фиг. 25 каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где x, y — координаты точки M; p — фокальный параметр — расстояние от фокуса до директрисы и в то же время половина хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси симметрии.

Вершина параболы удалена на расстояние $\frac{p}{2}$ от фокуса и от директрисы.

Расстояние от всякой точки параболы $M(x, y)$ до фокуса

$$r = \frac{p}{2} + x.$$

Эксцентриситет параболы принимается равным единице, так как

$$\frac{r}{ME} = 1.$$

Диаметр параболы (геомстрическое место середин параллельных хорд с угловым коэффициентом k) параллелен оси симметрии Ox; уравнение диаметра $y = \frac{p}{k}$. Ось симметрии параболы — *главный диаметр* (перпендикулярный хордам, через середины которых он проходит).

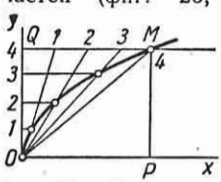
Касательная к параболе в точке $M(x, y)$ имеет уравнение

$$Yy = p(X + x),$$

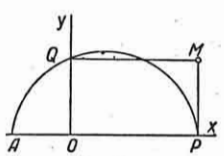
где X, Y — текущие координаты.

Касательная и нормаль являются биссектрисами углов между r и диаметром, проходящим через точку касания ($\varphi = \varphi_1$; $\psi = \psi_1$). Если касательная в точке M пересекает Ox в точке T, Oy — в точке Q и $OP = x$, то $OT = OP$; $TF = FM$; $TQ = QM$; $TFME$ — ромб (фиг. 25).

Построение параболы. 1) Дана вершина, ось симметрии и одна точка M (фиг. 26). Разделив в прямоугольнике $OQMP$ стороны OQ и QM каждую в отдельности на n равных частей (фиг. 26, $n = 4$), нумеруют



Фиг. 26. Построение параболы.



Фиг. 27. Построение параболы.

точки деления от O к Q и от Q к M. Точка пересечения любой прямой, проходящей через O с соответствующей прямой, параллельной оси симметрии, лежит на параболе.

2) Дан параметр p, вершина O и ось симметрии Ox (фиг. 27). От вершины O в отрицательном направлении оси x откладывают отрезок $2p = OA$ и строят окружность, проходящую через точку A, с центром в любой точке оси Ox. Точка M пересечения $QM \parallel Ox$ и $PM \parallel Oy$ лежит на параболе $y^2 = 2px$.

Радиус кривизны

$$R = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 \psi} = \frac{N^3}{p^2},$$

где N — длина нормали MG (фиг. 25). В вершине O радиус кривизны $R = p$.

Параметрические уравнения параболы: $x = 2pt^2$, $y = 2pt$, где t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение кривых 2-го порядка в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Для эллипса $e < 1$, полюс в левом фокусе; для гиперболы $e > 1$, полюс в правом фокусе; для параболы $e = 1$, полюс в фокусе.

Общая теория кривых 2-го порядка. Общее уравнение второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

определяет линию, называемую *линией (кривой) 2-го порядка.*

Если это уравнение не имеет вещественных решений, то говорят, что оно определяет *мнимую линию.*

Линия 2-го порядка определяется вообще пятью точками, задание которых позволяет определить отношение всех коэффициентов a_{ik} к одному из них.

При преобразовании прямоугольной системы координат xOy в прямоугольную $x'O'y'$ уравнение той же линии 2-го порядка примет вид

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0.$$

Функции коэффициентов уравнения, не меняющие своих значений при указанном преобразовании x, y, называются *инвариантами.* Инварианты уравнения кривой второго порядка относительно преобразования координат (поворот осей и перенос начала координат):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22};$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

где в целях симметрии пишут $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{33} = a_{23}$.

Центром линии 2-го порядка называется точка, в которой делятся пополам проходящие через нее хорды этой линии. Координаты центра находятся из системы

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0;$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

При $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ центр существует, при $I_2 = 0$, т. е. при $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$, центра нет, при $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ центров бесконечное множество (линия центров): линия 2-го порядка состоит из двух параллельных прямых.

Вид линии определяется знаками инвариантов.

Центральные кривые получаются при $I_2 \neq 0$:

$I_2 > 0$	$I_3 \neq 0$	Эллипс а) $I_1 I_3 < 0$ — действительный б) $I_1 I_3 > 0$ — мнимый
	$I_3 = 0$	Точка
$I_2 < 0$	$I_3 \neq 0$	Гипербола
	$I_3 = 0$	Пара пересекающихся прямых

Нецентральные кривые получаются при $I_2 = 0$: парабола, если $I_3 \neq 0$, и пара прямых, если $I_3 = 0$ (параллельных при $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} > 0$, совпавших при $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0$ и мнимых при $a_{13}^2 - a_{11}a_{33} < 0$).

Примеры:

1) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0.$

$$I_3 = 4 \cdot 1 - (-2)^2 = 0;$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = -2, \quad \frac{a_{13}}{a_{23}} = -2,$$

следовательно, линия распадается на пару параллельных прямых. Уравнение можно переписать в виде

$$(2x - y)^2 - 2(2x - y) - 3 = 0.$$

Оно квадратное относительно $2x - y = z$, и его левая часть раскладывается на два множителя

$$z^2 - 2z - 3 = (z - 3)(z + 1) = 0.$$

Уравнение определяет пару прямых

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - y + 1 = 0.$$

Уравнения, определяющие центр,

$$4x - 2y - 2 = 0,$$
$$-2x + y + 1 = 0$$

сводятся к одному уравнению $2x - y - 1 = 0$ — линии центров.

2) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 2y = 0$.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

линия центральная, гиперболического типа. Вычисляем

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, линия представляет собой пару пересекающихся прямых.

Координаты центра определяются из уравнений

$$x - \frac{3}{2}y + 1 = 0; \quad -\frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0,$$

откуда

$$x = 2, \quad y = 2.$$

Из систем

$$x = 0; \quad 2y^2 - 2y = 0;$$
$$y = 0; \quad x^2 + 2x = 0$$

находим координаты точек пересечения линии с осями координат: (0,0), (0,1), (−2,0). Так как прямые проходят через центр, то уравнения, на которые распадается данное уравнение, имеют вид

$$y - x = 0; \quad x - 2y + 2 = 0.$$

Преобразование уравнения центральных линий к каноническому виду и расположение кривых относительно осей координат. Если дана линия 2-го порядка общим уравнением, то, вычислив I_1, I_2, I_3, составляют каноническое уравнение линии

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$$

в некоторой системе $x'O'y'$, причем λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0;$$

оси $O'x'$ и $O'y'$ — главные диаметры. Находят центр кривой O' и определяют направление $O'x'$ как одного из главных диаметров по угловому коэффициенту k из формулы

$$k = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{22}} = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}},$$

где λ_1 — тот корень характеристического уравнения, который в каноническом уравнении есть коэффициент при x'^2.

Пример. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

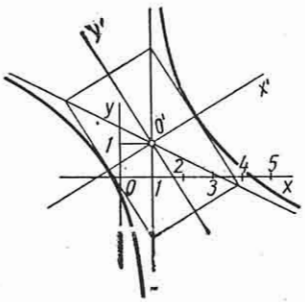
$$I_1 = 5, \; I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{vmatrix} = 36^2.$$

Кривая — гипербола. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$$

дает корни $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$.



Фиг. 28. Построение гиперболы.

Каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Система уравнений

$$5x + 6y - 11 = 0, \quad 6x - 6y = 0$$

определяет центр $O'(1,1)$. При $\lambda_1 = 9$ угловой коэффициент

$$k = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{22}} = \frac{6}{9 - 0} = \frac{2}{3}$$

определяет направление $O'x'$. Расположение гиперболы см. на фиг. 28.

Если взять $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 9$, то уравнение $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{9} = 1$ дает ту же гиперболу, но относительно другой системы координат, отличающейся от первой заменой $O'x'$ на $O'y'$ и обратно.

Преобразование уравнения параболы. В случае параболы $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$. Каноническое уравнение имеет вид

$$y'^2 - 2x'\sqrt{-I_3 : I_1^3} = 0$$

в системе $x'O'y'$.

Уравнение главного диаметра (ось $O'x'$) имеет вид

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \frac{a_{12}}{a_{11}}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением параболы, определяют вершину

последней O'. Чтобы определить расположение ветвей (симметричных относительно главного диаметра), следует найти еще одну точку параболы, например пересечение параболы с осью Ox или Oy.

Пример. $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$.

$$I_1 = 5;\quad I_2 = 0;\quad I_3 = -\frac{1}{4}.$$

Линия — парабола, ее каноническое уравнение

$$y'^2 = \frac{x'}{5\sqrt{5}}.$$

Главный диаметр имеет уравнение

$$4x - 2y - \frac{1}{2} - \frac{2}{4}(-2x + y) = 0$$

или

$$5(2x - y) = 1.$$

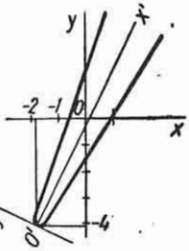
Решая это уравнение совместно с уравнением параболы (в котором всегда старшие члены дадут полный квадрат суммы или разности двух членов)

$$(2x - y)^2 = x + 2,$$

получаем координаты вершины:

$$x = -1\frac{24}{25}.$$

$$y = -4\frac{3}{25}.$$



Фиг. 29. Построение параболы.

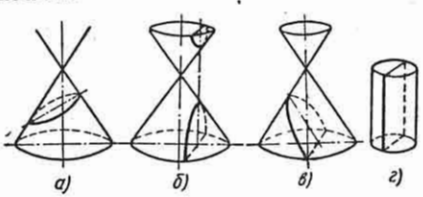
Построив главный диаметр, проходящий через вершину, можно далее строить точки параболы по ее каноническому уравнению. Легко найти пересечение параболы с осью Oy:

$$x = 0,\quad y^2 - 2 = 0,$$

откуда

$$y_1 = \sqrt{2},\quad y_2 = -\sqrt{2}\ \text{(см. фиг. 29)}.$$

Конические сечения. Кривые 2-го порядка могут быть получены пересечением прямого кругового конуса плоскостью.



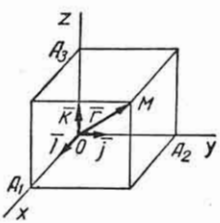
Фиг. 30. Конические сечения.

Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет *гиперболой*, *параболой* или *эллипсом* в зависимости от того, будет ли секущая плоскость параллельна двум, одной или ни одной образующей конуса. Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то получается *окружность*. Если плоскость проходит через вершину конуса, то в сечении получается пара *пересекающихся прямых*. *Параллельные прямые* в сечении получаются, если конус вырождается в цилиндр (фиг. 30, *а*—*г*).

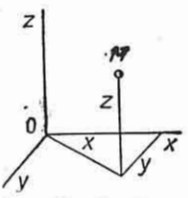
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Метод координат. Положение точки M в пространстве относительно той или иной системы координат определяется тремя числами — координатами.

Прямоугольная декартова система координат состоит из трех пересекающихся в точке O взаимно перпендикулярных осей координат Ox, Oy, Oz, на которых их орты $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ указывают



Фиг. 31. Правая система координат.



Фиг. 32. Левая система координат.

положительные направления осей. Длина этих единичных векторов m взята за масштабную единицу. В зависимости от взаимного расположения осей может быть *правая система координат* (фиг. 31) и *левая система координат* (фиг. 32). Система называется правой, если вращение вокруг оси z положительного направления оси x к положительному направлению оси y представляется наблюдателю, совмещенному с положительным направлением оси z, происходящим в направлении против часовой стрелки. В дальнейшем принята правая система.

Оси координат попарно определяют координатные плоскости. Если точку M ортогонально спроектировать на оси координат в точки A_1, A_2, A_3, то числа (положительные или отрицательные) $x = \frac{OA_1}{m}$ (абсцисса), $y = \frac{OA_2}{m}$ (ордината), $z = \frac{OA_3}{m}$ (аппликата) называют

прямоугольными (*декартовыми*) *координатами точки* M и записывают: $M(x, y, z)$.

Радиус-вектор точки M

$$\overline{OM} = \overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Направляющими косинусами луча L (направленной прямой, оси) называются косинусы углов $\alpha = \angle(x, L)$, $\beta = \angle(y, L)$, $\gamma = \angle(z, L)$ между положительными направлениями осей координат и направлением луча L. Единичный вектор $\overline{e}$ (орт) луча L имеет своими координатами направляющие косинусы

$$\overline{e} = \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\cos\beta + \overline{k}\cos\gamma;$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Вместо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ можно взять пропорциональные им величины l, m, n, определяемые условиями

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\beta} = \frac{n}{\cos\gamma};$$

иногда l, m, n называют угловыми коэффициентами прямой (луча) в пространстве. За величины l, m, n можно принять разности одноименных координат любых двух точек прямой.

О координатах вектора см. на стр. 228.

Деление отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в данном отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$: координаты точки деления $M(x, y, z)$ определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$
$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Середина отрезка определяется координатами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 равно

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Преобразование прямоугольных координат. Перенос начала координат с сохранением направления осей определяется формулами

$$x = x' + a;\quad y = y' + b;\quad z = z' + c,$$

где x, y, z — координаты точки M в старой системе $Oxyz$; x', y', z' — координаты той же точки M в новой системе $O'x'y'z'$; a, b, c — координаты O' относительно старой системы.

Поворот осей (с сохранением начала координат). Новые оси $Ox'y'z'$ образуют со старыми осями $Oxyz$ углы, косинусы которых даны таблицей

	x'	y'	z'
x	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

где первый индекс относится к старым осям, второй индекс — к новым осям, например $\alpha_{23} = \cos(y, z')$ и т. д. Формулы преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z';\\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z';\\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z';\\ x' &= \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z;\\ y' &= \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z;\\ z' &= \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z. \end{aligned}$$

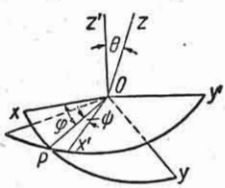
Девять косинусов α_{ik} ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$) связаны соотношениями

$$\alpha_{1l}\alpha_{1k} + \alpha_{2l}\alpha_{2k} + \alpha_{3l}\alpha_{3k} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k \\ 1, \text{ если } i = k \end{cases}$$

или

$$\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2} + \alpha_{i3}\alpha_{k3} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq k \\ 1, \text{ если } i = k \end{cases}$$

Независимых углов — три. Примем в качестве таковых углы Эйлера: φ, ψ, θ (фиг. 33), где φ — угол между Ox и OP — прямой пересечения плоскостей xy и $x'y'$; ψ — угол между OP и Ox'; θ — угол между Oz и Oz', он же — двугранный угол между плоскостями xy и $x'y'$; тогда формулы преобразования координат примут вид



Фиг. 33. Углы Эйлера.

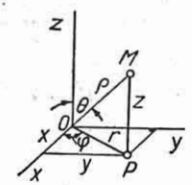
$$\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) +\\ &+ y'(-\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) +\\ &+ z'\sin\varphi\sin\theta;\\ y &= x'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) +\\ &+ y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) -\\ &- z'\cos\varphi\sin\theta;\\ z &= x'\sin\psi\sin\theta + y'\cos\psi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}$$

Цилиндрическая система координат

Если проекция точки M на xOy есть точка P (x, y) с полярными координатами (r, φ), то положение точки M вполне определяется тремя числами r, φ, z, называемыми *цилиндрическими координатами* (фиг. 34). Имеем

$$x = r\cos\varphi;$$
$$y = r\sin\varphi; \quad z = z;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \arcsin\frac{y}{r}.$$

Чтобы получить все точки пространства, достаточно изменять r от 0 до $+\infty$, φ от 0 до 2π, z от $-\infty$ до $+\infty$.



Фиг. 34. Цилиндрические и сферические координаты.

Сферическая система координат

Если проекция точки M на xOy есть P (r, φ), расстояние $OM = \rho$, угол между Oz и лучом OM есть θ, то ρ, φ, θ — *сферические* (полярные в пространстве) координаты точки M (фиг. 34). Имеем

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$z = \rho\cos\theta; \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Если изменять ρ от 0 до ∞, φ от 0 до 2π (или от $-\pi$ до $+\pi$), θ от 0 до π, то получим все точки пространства.

Координатной поверхностью называется такая поверхность, в каждой точке которой одна координата — постоянная; *координатная линия* — такая линия, в каждой точке которой две координаты постоянные.

В декартовой системе координат через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ проходят три плоскости: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ (координатные поверхности), параллельные плоскостям координат и пересекающиеся по трем прямым, параллельным осям координат.

В цилиндрической системе через точку M (r_0, φ_0, z_0) проходят координатные поверхности: $r = r_0$ (цилиндр), $\varphi = \varphi_0$ (плоскость, проходящая через Oz), $z = z_0$ (плоскость, перпендикулярная к Oz).

В сферической системе координат через точку M $(\rho_0, \varphi_0, \theta_0)$ проходят координатные поверхности: $\rho = \rho_0$ (сфера), $\varphi = \varphi_0$ (плоскость), $\theta = \theta_0$ (конус с осью Oz).

Плоскость

Уравнением плоскости называется соотношение между координатами (текущими) всякой точки плоскости.

В дальнейшем $\bar{r}\{x, y, z\}$ обозначает текущий радиус-вектор точки плоскости или прямой; $\bar{r}_0\{x_0, y_0, z_0\}$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ и т. д.— радиусы-векторы заданных точек.

Общее уравнение плоскости. Всякое уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость. Здесь A, B, C — координаты вектора $\bar{N}$, перпендикулярного к плоскости.

Векторное уравнение плоскости:

$$\bar{r}\,\bar{N} + D = 0.$$

Уравнение всякой плоскости есть уравнение первой степени относительно x, y, z.

Если $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$), то плоскость параллельна оси Ox (соответственно Oy, или Oz); если $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$), то плоскость параллельна плоскости xOy (соответственно xOz, или yOz). Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат. Если $A = D = 0$ ($B = D = 0$, или $C = D = 0$), то плоскость проходит через Ox (соответственно через Oy, или через Oz). Если $A = B = D = 0$ (или $A = C = D = 0$, или $B = C = D = 0$), то уравнение принимает вид $z = 0$ ($y = 0$, или $x = 0$), изображающее плоскость xOy (соответственно xOz, или yOz).

Нормальное уравнение плоскости. Положение всякой плоскости относительно $Oxyz$ можно задать параметрами: единичным вектором $\bar{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, направленным от начала координат перпендикулярно плоскости, и длиной перпендикуляра p, опущенного из начала координат на плоскость.

Векторная форма нормального уравнения:

$$\bar{r}\,\bar{n} - p = 0,$$

скалярная форма:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Общее уравнение приводится к нормальному умножением на нормирующий множитель $\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположный знаку D.

Расстояние d от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Если $d > 0$, то точка M_0 и начало координат лежат по разные стороны от плоскости; если $d < 0$ — по одну сторону от плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно данному вектору $\overline{N}\{A, B, C\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Векторная форма этого уравнения

$$(\overline{r} - \overline{r_0})\,\overline{N} = 0.$$

Это же уравнение при любых A, B, C есть уравнение *связки плоскостей* — совокупности плоскостей, проходящих через данную точку M_0.

Если точка $\overline{r_0}\{x_0, y_0, z_0\}$ дана пересечением трех плоскостей $\overline{r}\,\overline{N}_1 + D_1 = 0$, $\overline{r}\,\overline{N}_2 + D_2 = 0$, $\overline{r}\,\overline{N}_3 + D_3 = 0$, то связка плоскостей может быть записана уравнением

$$\overline{r}\,\overline{N}_1 + D_1 + \lambda(\overline{r}\,\overline{N}_2 + D_2) + \mu(\overline{r}\,\overline{N}_3 + \overline{D}_3) = 0,$$

где λ, μ — переменные параметры.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(\overline{r_1})$, $M_2(\overline{r_2})$, $M_3(\overline{r_3})$:

$$(\overline{r} - \overline{r_1})(\overline{r_2} - \overline{r_1})(\overline{r_3} - \overline{r_1}) = 0,$$

где левая часть есть смешанное (векторно-скалярное) произведение, или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если четыре точки лежат в одной плоскости, то выполняется условие

$$(\overline{r_2} - \overline{r_1})(\overline{r_3} - \overline{r_1})(\overline{r_4} - \overline{r_1}) = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Уравнение плоскости, проходящей:

а) *через две точки $M_0(\overline{r_0})$, $M_1(\overline{r_1})$ параллельно прямой с направляющим вектором $\overline{S}\{l, m, n\}$*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\overline{r} - \overline{r_0})(\overline{r_1} - \overline{r_0})\,\overline{S} = 0;$$

б) *через одну точку $M_0(\overline{r_0})$ и параллельно двум прямым с направляющими векторами $\overline{S}_1\{l_1, m_1, n_1\}$, $\overline{S}_2\{l_2, m_2, n_2\}$*.

$$(\overline{r} - \overline{r_0})\,\overline{S}_1\,\overline{S}_2 = 0;$$

в) *через линию пересечения двух плоскостей*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0:$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение *пучка плоскостей*. Меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим все плоскости пучка.

Точка пересечения трех плоскостей находится совместным решением трех уравнений плоскостей относительно x, y, z.

Пример. Найти проекцию прямой, заданной пересечением двух плоскостей $2x - y + z = 0$ и $4x - 7y + 11z - 8 = 0$ на плоскость $x + 2y + z + 1 = 0$. Чтобы в пучке плоскостей $2x - y + z + \lambda(4x - 7y + 11z - 8) = 0$ или $(2 + 4\lambda)x + (-1 - 7\lambda)y + (1 + 11\lambda)z - 8\lambda = 0$ найти проектирующую плоскость, следует записать условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$1\cdot(2 + 4\lambda) + 2\cdot(-1 - 7\lambda) + 1\cdot(1 + 11\lambda) = 0,$$

откуда $\lambda = -1$, искомая плоскость

$$x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Проекция заданной прямой на данную плоскость определится как пересечение двух плоскостей:

$$x - 3y + 5z - 4 = 0; \quad x + 2y + z + 1 = 0.$$

Прямая и ее уравнения

Параметрические уравнения прямой. Если прямая проходит через точку $M_0(\overline{r_0})$ и параллельна вектору $\overline{S}\{l, m, n\}$, который называется *направляющим вектором*, то векторное уравнение прямой имеет вид

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \times \overline{S} = 0;$$

параметрическое уравнение в векторной форме

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{S}$$

содержит переменный параметр t, определяющий положение точки на прямой. В скалярной форме параметрические уравнения имеют вид

$$x = x_0 + lt; \quad y = y_0 + mt;$$
$$z = z_0 + nt.$$

Каждая пара уравнений есть параметрические уравнения проекции прямой на соответствующую координатную плоскость. В дальнейшем $\overline{S}\{l, m, n\}$, $\overline{S_1}\{l_1, m_1, n_1\}$ и т. д. суть направляющие векторы соответствующих прямых.

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

каждое уравнение

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \text{ или } \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$
$$\text{или } \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}$$

есть уравнение плоскости, проектирующей прямую на соответствующую координатную плоскость.

Уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(\overline{r_0})$ перпендикулярно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_0(\overline{r_0})$ и $M_1(\overline{r_1})$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется совместным рассмотрением уравнений этих плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Чтобы привести эту форму к каноническим уравнениям, следует найти одну точку (x_0, y_0, z_0) на прямой, для чего, задав одну координату произвольно, решают систему относительно оставшихся неизвестных.

Канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пересечение прямой с плоскостью. Чтобы найти точку пересечения прямой $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, надо в уравнения прямой подставить

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Равенства

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$
$$Al + Bm + Cn = 0$$

являются *условиями* того, *что прямая лежит в плоскости.*

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ и $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 n_1 \\ m_2 n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 l_1 \\ n_2 l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix}^2}} = \frac{(\overline{r_2} - \overline{r_1})\,\overline{S_1}\,\overline{S_2}}{|\overline{S_1} \times \overline{S_2}|}.$$

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости:

$$(\overline{r_2} - \overline{r_1})\,\overline{S_1}\,\overline{S_2} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это же равенство есть и условие пересечения двух прямых, если только прямые не параллельны, т. е. $\overline{S_1} \times \overline{S_2} \neq 0$. Если две прямые даны пересечением двух пар плоскостей, то условие пересечения этих прямых имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_1(\bar{r}_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$:

$$d=\frac{|\overline{M_0M_1}\times\bar{S}|}{|\bar{S}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ m & n\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_1-z_0 & x_1-x_0\\ n & l\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ l & m\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Уравнения общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых получим, если составим сначала уравнение плоскости P, проходящей через одну прямую параллельно другой прямой, а затем составим уравнения двух плоскостей, перпендикулярных к P и проходящих через каждую из заданных прямых. Уравнения этих двух плоскостей и дадут искомый перпендикуляр.

Пример. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (1, 1, 1), пересекающей прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$ и перпендикулярной к прямой $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$. Уравнения искомой прямой

$$\frac{x-1}{l}=\frac{y-1}{m}=\frac{z-1}{n},$$

где отношения $l:m:n$ находятся из условий

$$l+2m+4n=0;$$
$$5l+2m-4n=0;$$

первое из них есть условие перпендикулярности искомой прямой со второй из данных прямых, а второе — условие пересечения искомой прямой с первой из данных прямых. Из двух однородных уравнений с неизвестными l, m, n находим

$$l=-16k,\quad m=24k,\quad n=-8k.$$

Уравнения искомой прямой

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}.$$

Условия параллельности:

двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\text{ или }\bar{N}_1\times\bar{N}_2=0;$$

двух прямых

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\text{ или }\bar{S}_1\times\bar{S}_2=0;$$

прямой и плоскости

$$Al+Bm+Cn=0\text{ или }\bar{N}\,\bar{S}=0.$$

Условия перпендикулярности:

двух плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\text{ или }\bar{N}_1\bar{N}_2=0;$$

Угол между плоскостями и прямыми

Угол между	Уравнения	Формула
двумя плоскостями	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. В векторной форме: $\bar{r}\bar{N}_1+D_1=0$; $\bar{r}\bar{N}_2+D_2=0$.	$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$; $\cos\varphi=\frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{N_1N_2}$
двумя прямыми	$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ В векторной форме: $(\bar{r}-\bar{r}_1)\times\bar{S}_1=0$; $(\bar{r}-\bar{r}_2)\times\bar{S}_2=0$	$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}}$; $\cos\varphi=\frac{\bar{S}_1\bar{S}_2}{S_1S_2}$
прямой и плоскостью	$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ $Ax+By+Cz+D=0$ В векторной форме: $(\bar{r}-\bar{r}_1)\times\bar{S}=0$; $\bar{r}\bar{N}+D=0$.	$\sin\varphi=\frac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(l^2+m^2+n^2)}}$; $\sin\varphi=\frac{\lvert\bar{N}\bar{S}\rvert}{NS}$

двух прямых

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \text{ или } \overline{S_1}\,\overline{S_2} = 0;$$

прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \text{ или } \overline{N} \times \overline{S} = 0.$$

Общая теория поверхностей 2-го порядка

Общее уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Пример. Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

изображает сферу, так как после преобразования к виду

$$(x + a_{14})^2 + (y + a_{24})^2 + (z + a_{34})^2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44}$$

и обозначения $-a_{14} = a$, $-a_{24} = b$, $-a_{34} = c$, $a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} = r^2$ получим уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

которое имеет тот смысл, что расстояние от любой точки $M(x, y, z)$ до точки $C(a, b, c)$ есть величина постоянная r. Геометрическое место точек M есть действительная сфера при условии

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{44} > 0.$$

Инварианты поверхности 2-го порядка (некоторые функции коэффициентов a_{ik} предыдущего уравнения, которые не меняют своего значения при переносе начала и повороте осей координат):

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

где

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Вид поверхности зависит от знаков инвариантов.

Центром поверхности 2-го порядка называется точка, в которой делятся пополам все проходящие через нее хорды. Координаты центра находятся из системы уравнений

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0;$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0;$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0.$$

Определитель этой системы равен I_3.

Определение вида поверхности 2-го порядка

1) $I_3 \neq 0$ (центральные поверхности)

	$I_1I_3 > 0$, $I_2 > 0$	$I_1I_3 \leqslant 0$ или $I_2 \leqslant 0$
$I_4 < 0$	Эллипсоид	Двухполостный гиперболоид
$I_4 > 0$	Мнимый эллипсоид	Однополостный гиперболоид
$I_4 = 0$	Мнимый конус	Конус

2) $I_3 = 0$ (нецентральные поверхности)

$I_4 < 0$	$I_2 > 0$ — эллиптический параболоид
$I_4 > 0$	$I_2 < 0$ — гиперболический параболоид
$I_4 = 0$	Цилиндры и пары плоскостей

В последнем случае система, определяющая центр, сводится: а) или к двум независимым уравнениям (имеется линия центров), поверхность будет или цилиндрической с направляющей линией 2-го порядка, или парой пересекающихся плоскостей; б) или только к одному уравнению (имеется плоскость центров), поверхность состоит из двух параллельных плоскостей.

Пример. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 4x - 2y = 0.$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

В сечении поверхности с плоскостью $z = 0$ получается $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y = 0$. Этому уравнению соответствует действительный эллипс; следовательно, поверхность является эллиптическим цилиндром.

Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка

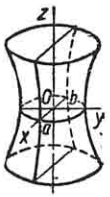
а) $I_3 \neq 0$, $I_4 \neq 0$

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид (фиг. 35);

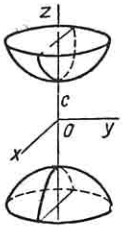
Фиг. 35. Эллипсоид.

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — мнимый эллипсоид;

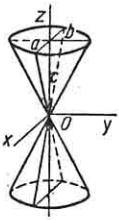
3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный гиперболоид (фиг. 36);



Фиг. 36. Однополостный гиперболоид.



Фиг. 37. Двухполостный гиперболоид.



Фиг. 38. Конус.

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двухполостный гиперболоид (фиг. 37);

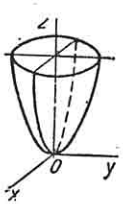
б) $I_3\neq 0$, $I_4=0$ — конусы

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — мнимый конус;

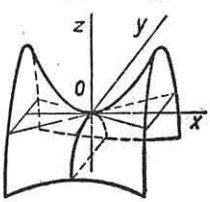
6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — действительный конус (фиг. 38);

в) $I_3=0$, $I_4\neq 0$ — параболоиды

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ — эллиптический параболоид (фиг. 39);



Фиг. 39. Эллиптический параболоид.



Фиг. 40. Гиперболический параболоид.

8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ — гиперболический параболоид (фиг. 40);

г) $I_3=0$, $I_4=0$

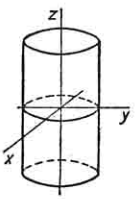
9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптический цилиндр;

10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (фиг. 41);

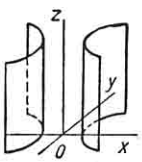
11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — гиперболический цилиндр (фиг. 42);

12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — две мнимые плоскости;

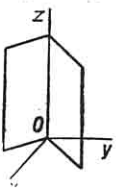
13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — две действительные пересекающиеся плоскости (фиг. 43);



Фиг. 41. Эллиптический цилиндр.



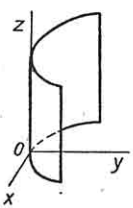
Фиг. 42. Гиперболический цилиндр.



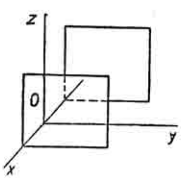
Фиг. 43. Две пересекающиеся плоскости.

14) $x^2=2py$ — параболический цилиндр (фиг. 44);

15) $x^2+a^2=0$ — две мнимые параллельные плоскости;



Фиг. 44. Параболический цилиндр.



Фиг. 45. Пара параллельных плоскостей.

16) $x^2-a^2=0$ — две действительные параллельные плоскости (фиг. 45);

17) $x^2=0$ — две совпавшие плоскости.

Преобразование уравнения центральной поверхности к каноническому виду. При переносе начала координат в центр и при надлежащем повороте осей координат общее уравнение примет канонический вид

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+\frac{I_4}{I_3}=0,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0.$$

Достаточно знать знаки инвариантов, чтобы определить одну из шести центральных поверхностей.

Число положительных корней среди $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ равно числу перемен знаков в ряде четырех чисел: $1, -I_1, I_2, -I_3$.

Пример. $x^2+y^2+5z^2-6xy+2zx-2yz-4x+8y-12z+14=0$.

$$I_1=1+1+5=7;$$

$$I_2=\begin{vmatrix}1&-3\\-3&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&5\end{vmatrix}=0;$$

$$I_3=\begin{vmatrix}1&-3&1\\-3&1&-1\\1&-1&5\end{vmatrix}=-36;$$

$$I_4=\begin{vmatrix}1&-3&1&-2\\-3&1&-1&4\\1&-1&5&-6\\-2&4&-6&14\end{vmatrix}=-216;\quad \frac{I_4}{I_3}=6.$$

В ряду чисел 1, −7, 0, 36 имеются две перемены знаков, характеристическое уравнение $\lambda^3-7\lambda^2+36=0$ имеет два положительных корня: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$, поверхность — двухполостный гиперболоид; каноническое уравнение поверхности

$$3x'^2+6y'^2-2z'^2+6=0.$$

Преобразование уравнения параболоида к каноническому виду. В случае $I_3=0$, $I_4\neq 0$ общее уравнение приводится к каноническому виду

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2\pm 2\sqrt{-I_4:I_2}\,z'=0,$$

где знак перед радикалом выбирается любой; λ_1, λ_2, $\lambda_3=0$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda=0.$$

Примеры:

1) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2zx+2yz-4x+6y-2z+3=0$;

$$I_1=7,\ I_2=10,\ I_3=0,\ I_4=-125.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3-7\lambda^2+10\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=5$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=0$; каноническое уравнение поверхности имеет вид $5x'^2+2y'^2\pm 2z'\sqrt{\frac{125}{10}}=0$ или $5x'^2+2y'^2=5\sqrt{2}\,z'$ — эллиптический параболоид.

2) $z=mxy$;

$$I_1=0;\quad I_2=-\frac{m^2}{4};\quad I_3=0;\quad I_4=\frac{m^2}{16}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm\frac{m}{2}$, $\lambda_3=0$; каноническое уравнение поверхности $z'=\frac{m}{2}(x'^2-y'^2)$ — гиперболический параболоид.

То же получим, если вокруг оси z сделать поворот осей xOy на угол $\alpha=45°$ и перейти к новым осям $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $z=z'$.

Прямолинейной образующей поверхности называется прямая, всеми своими точками лежащая на этой поверхности.

Действительные прямолинейные образующие имеют однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид, конические и цилиндрические поверхности.

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$1)\ p\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=q\left(1-\frac{y}{b}\right);\quad q\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=p\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

$$2)\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right);\quad u\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Гиперболический параболоид $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$1)\ p\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=q;\ q\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=zp;$$

$$2)\ u\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=v;\ v\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=zu.$$

Изменяя отношения параметров $p:q$, $u:v$, получаем различные прямые в каждом семействе.

Задав точку (x_0, y_0, z_0) на поверхности, можно найти отношения $u:v$, $p:q$; из каждого семейства выделится по одной образующей, проходящей через данную точку.

ГЛАВА XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ *

ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ

Линия (кривая) может быть задана: 1) явным уравнением, 2) неявным уравнением, т. е. уравнением, определяющим одну декартову координату как неявную функцию другой, и 3) двумя уравнениями, определяющими обе декартовы координаты точки как функции некоторого вспомогательного параметра.

1) Простой дугой линии на плоскости называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют при надлежащем выборе осей координат уравнению

$$y = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную.

2) Кривой, заданной неявным уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2) и в окрестности каждой из этих точек из той области D плоскости xy, где $F(x, y)$ определена, геометрическое место точек образует простую дугу. Эти точки называются *обыкновенными*.

Такая кривая, называемая *регулярным куском кривой* в области D, существует, если функция $F(x, y)$, ее частные производные первого порядка F_x, F_y непрерывны и

$$F_x^2 + F_y^2 \neq 0, \tag{3}$$

т. е. частные производные одновременно в нуль не обращаются.

Точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), но не обыкновенная, называется *особой*.

3) Линией в параметрическом представлении называется геометрическое место точек, координаты которых определяются уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{4}$$

если функции $x(t)$, $y(t)$ в $[a, b]$ однозначны, непрерывны, имеют непрерывные производные первого порядка и удовлетворяют условию регулярности

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0. \tag{5}$$

Эти условия определяют *регулярный кусок* кривой.

Точки кривой, в окрестности которой линия представляет простую дугу, называется *обыкновенной*, в противном случае — особой. В окрестности всякой внутренней точки интервала регулярности линия представляет простую дугу.

Если функции $x(t)$, $y(t)$ — аналитические, могущие не удовлетворять условию регулярности (5), то линия (4) состоит из регулярных кусков кривой, разделенных точками, в которых $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$. В окрестности такой точки [нарушения условия (5)] линия может представлять простую дугу и может не являться простой дугой. В последнем случае точка является *особой точкой кривой* (4). О направлении на кривой см. стр. 282.

Линия может задаваться уравнениями в полярных координатах:

$$\begin{aligned} &1)\ r = f(\varphi); \\ &2)\ F(r, \varphi) = 0; \\ &3)\ r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \end{aligned} \tag{6}$$

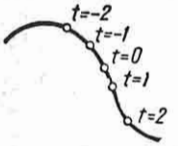
В каждом из трех способов задания возможен переход от одного способа к другому способу задания кривой.

Параметр t может иногда иметь геометрический или механический смысл. Составляя таблицу значений функций $x(t)$, $y(t)$ по формулам $x_n = x(t_n)$,

* См. литературу на стр. 349: [22], [9], [21], [23], [19].

$y_n = y(t_n)$, мы можем по точкам построить кривую (фиг. 1) и нанести пометки параметра t около этих точек (шкала значений t).

Переход к параметрическому представлению (параметризация) возможен многими способами: взять функцию $x = x(t)$ произвольно, y получить из уравнения $F[x(t), y] = 0$.



Фиг. 1.

Параметризация

$$r = f(\varphi);$$

$$x = f(\varphi)\cos\varphi;$$

$$y = f(\varphi)\sin\varphi,$$

где параметр φ имеет геометрический смысл—полярный угол точки на кривой.

Пример. Полярное уравнение спирали Архимеда $r = a\varphi$ заменяется в декартовых координатах параметрическими уравнениями

$$x = a\varphi\cos\varphi; \quad y = a\varphi\sin\varphi.$$

Длина дуги. Если линия задана параметрическими уравнениями (4), то длина дуги от точки M_0 ($t = t_0$) до точки M_1 ($t = t_1$) равна

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt;$$

дифференциал дуги ds находится из формулы

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Для кривой $y = f(x)$

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Для кривой $r = f(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi;$$

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2.$$

Примеры:

1) Вычислить длину дуги одного витка архимедовой спирали $r = a\varphi$ от полюса $\varphi = 0$ до точки $\varphi = 2\pi$:

$$\frac{dr}{d\varphi} = a; \quad s = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi =$$

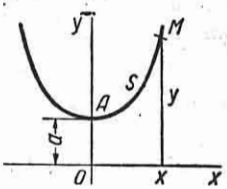
$$= a\left[\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\varphi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_0^{2\pi};$$

$$s = a\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right].$$

2) Для цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, или $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, длина дуги s от точки $A(0, a)$ до текущей точки $M(x, y)$ (фиг. 2) равна

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\, dx =$$

$$= \int_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$



Фиг. 2. Цепная линия.

Свойство цепной линии: $\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{s}{a}\right)^2 = 1$.

Касательная, нормаль и отрезки, связанные с ними. *Касательной* в точке $M(x, y)$ на кривой называется предельное положение секущей прямой MM_1 (M_1 — точка на кривой), когда $M_1 \to M$.

В каждой внутренней точке M простой дуги существует непрерывно вращающаяся касательная при перемещении точки касания M по дуге.

Нормалью называется прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной.

В обыкновенной точке (x, y) кривой угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ для уравнений (1) и (4) и $k = \frac{dy}{dx} = -F_x : F_y$ для уравнения (2).

Если X, Y — текущие координаты точек касательной или нормали, то уравнения последних имеют вид, представленный в таблице:

Форма уравнения кривой	Уравнение касательной	Уравнение нормали
(1)	$Y - y = f'(x)(X - x)$	$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x)$
(2)	$F_x(X - x) + F_y(Y - y) = 0$	$F_y(X - x) - F_x(Y - y) = 0$
(4)	$\frac{X - x}{x'(t)} = \frac{Y - y}{y'(t)}$	$(X - x)x'(t) + (Y - y)y'(t) = 0$

Здесь $F_x = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$; входящие производные вычисляются в данной точке.

Для формы (6) уравнения кривой угол μ между радиусом-вектором r точки M и касательной (фиг. 3) вычисляется по формулам

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} = \frac{r d\varphi}{dr};$$

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds}; \quad \sin\mu = \frac{r d\varphi}{ds}.$$

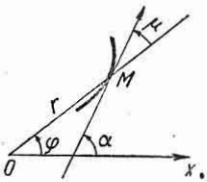
Угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \mu) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\mu}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\mu}.$$

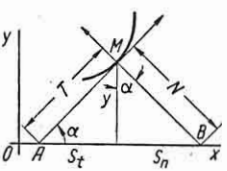
Пример. Из точки $\left(\frac{11}{4}, 0\right)$ вне кривой $2x^2 + 3y^2 = 11$ провести к этой кривой касательные. Из уравнения кривой находим производную:

$$4x + 6yy' = 0; \quad y' = -\frac{2x}{3y}.$$

В уравнение касательной $Y - y = -\frac{2x}{3y}(X - x)$, где (x, y) — неизвестная точка касания, подставляем $X = \frac{11}{4}$, $Y = 0$ и из полученного уравнения $3y^2 + 2x^2 - \frac{11x}{2} = 0$ совместно с данным уравнением находим $x = 2$, $y = \pm 1$. Касательные: $Y \pm 1 = \pm \frac{4}{3}(X - 2)$.



Фиг. 3. Угол между касательной и радиусом-вектором.



Фиг. 4. Отрезки касательной и нормали.

Отрезок касательной T от точки касания M до точки A пересечения ее с осью x называется *длиной касательной* (фиг. 4)

$$T = MA = \frac{y}{\sin\alpha}.$$

Отрезок нормали N от точки M до точки B пересечения нормали с осью x называется *длиной нормали*

$$N = MB = \frac{y}{\cos\alpha}.$$

Подкасательная

$$S_t = np_xT = y\operatorname{ctg}\alpha.$$

Поднормаль

$$S_n = np_xN = y\operatorname{tg}\alpha.$$

Для параметрически заданной линии

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{x'^2 + y'^2}; \quad N = \frac{y}{x'}\sqrt{x'^2 + y'^2};$$

$$S_t = \frac{yx'}{y'}; \quad S_n = \frac{yy'}{x'},$$

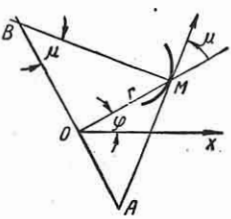
где x', y' — производные от $x(t)$, $y(t)$ по t и вычисляются для заданной точки M при $t = t_0$.

При задании линии уравнением (1)

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2};$$

$$N = y\sqrt{1 + y'^2};$$

$$S_t = \frac{y}{y'}; \quad S_n = yy'.$$



Фиг. 5. Полярные отрезки.

Все отрезки рассматриваются по абсолютной величине.

Если в точке $M(r, \varphi)$ на кривой $r = f(\varphi)$ провести касательную и нормаль до пересечения с прямой AB, проходящей через полюс перпендикулярно радиусу-вектору точки M, то (фиг. 5) получаются так называемые *полярные отрезки* касательной, нормали, подкасательной, поднормали, обозначаемые t, n, s_t, s_n:

$$t = MA = \frac{r}{\cos\mu} = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2};$$

$$n = MB = \frac{r}{\sin\mu} = \sqrt{r^2 + r'^2};$$

$$s_t = OA = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2}{r'};$$

$$s_n = OB = r\operatorname{ctg}\mu = r'.$$

Примеры:

1) Для параболы $y^2 = 2px$

$$T = \sqrt{2x(p + 2x)}; \quad N = \sqrt{y^2 + p^2} = \sqrt{p(2x + p)}; \quad S_t = 2x; \quad S_n = p.$$

Во всякой точке параболы $y^2 = 2px$ поднормаль — величина постоянная.

2) Для архимедовой спирали $r = a\varphi$

$$t = a\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}; \quad n = a\sqrt{1 + \varphi^2}; \quad s_t = a\varphi^2; \quad s_n = a.$$

Во всякой точке архимедовой спирали полярная поднормаль есть величина постоянная.

Углы касательной и нормали с осями координат. Если положительное направление касательной (в сторону возрастания дуги s) образует с положительным направлением оси x угол α, то

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds};\ \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \cos\beta,$$

где $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ есть угол касательной с осью y.

Положительное направление нормали получается из положительного направления касательной поворотом последней на угол $\frac{\pi}{2}$ против движения часовой стрелки. Угол α_1 положительного направления нормали с осью x равен

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\alpha_1 = -\frac{dy}{ds};\ \sin\alpha_1 = \frac{dx}{ds}.$$

Асимптоты. *Бесконечно удаленной точкой* на линии называется точка, у которой одна или обе координаты обращаются в бесконечность.

Асимптотой кривой в ее бесконечно удаленной точке называется прямая, расстояние до которой от точки на кривой стремится к нулю, когда точка по кривой удаляется в бесконечность.

Ветвь кривой, уходящая в бесконечность, но не имеющая асимптоты, называется *параболической ветвью*.

Если для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $t = t_0$, $x(t_0) = \infty$, $y(t_0) = b \neq \infty$, то $y = b$ — асимптота, параллельная Ox; если $x(t_0) = a \neq \infty$, $y(t_0) = \infty$, то $x = a$ — асимптота, параллельная Oy.

Если $x(t_0) = \infty$, $y(t_0) = \infty$, то асимптотой (наклонной) в точке $t = t_0$ на кривой будет прямая

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{t\to t_0}\frac{y(t)}{x(t)};\quad b = \lim_{t\to t_0}[y(t) - kx(t)],$$

если эти пределы существуют.

Для кривой $y = f(x)$ асимптоты находятся так же, если положить $x = t$.

Если существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0}\frac{y'(t)}{x'(t)} = k,$$

$$\lim_{t\to t_0}\left[y(t) - x(t)\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = b,$$

то $y = kx + b$, как предельное положение касательной в бесконечно удаленной точке, есть асимптота.

В случае алгебраической кривой $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — многочлен относительно x, y степени n, наклонная асимптота $y = kx + b$ находится по правилу: в уравнение кривой вместо y подставляют $kx + b$ и в полученном равенстве $F(x, kx + b) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$ полагают $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, откуда находят действительные значения для k и b.

Асимптота, параллельная оси Oy, $x = a$, найдется из уравнения $F(a, y) = 0$, в котором коэффициент при старшей степени y приравнивается нулю и определяется соответствующее значение a.

Для кривой $r = f(\varphi)$ $\varphi = \varphi_0$ определяет асимптотическое направление, если $r = f(\varphi_0) = \infty$. Положение самой асимптоты найдется, если еще знать расстояние p от полюса до этой асимптоты:

$$p = \lim_{\varphi\to\varphi_0} r\sin(\varphi - \varphi_0).$$

Примеры:

1) Найти асимптоты алгебраической кривой $F(x, y) \equiv x^2 - xy + y = 0$; $F(x, kx + b) \equiv (1 - k)x^2 + (k - b)x + b = 0$, $A_0 \equiv 1 - k = 0$; $A_1 \equiv k - b = 0$, откуда $k = 1$, $b = 1$; уравнение асимптоты $y = x + 1$.

Для нахождения асимптоты $x = a$ составляем

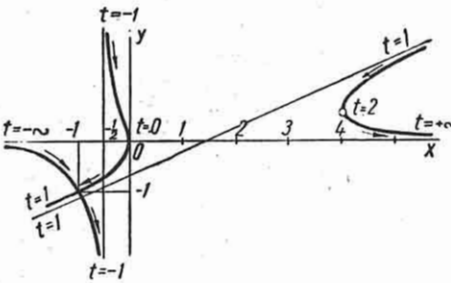
$$F(a, y) \equiv (1 - a)y + a^2 = 0.$$

В уравнении алгебраической кривой 2-го порядка отсутствует член y^2. Приравняв нулю коэффициент при y, находим $a = 1$; кривая имеет асимптоту $x = 1$. Нет асимптоты $y = b$, параллельной Ox, ибо при старшем члене x^2 коэффициент равен 1.

2) На линии $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$ бесконечно удаленные точки имеются при $t_1 = 1$; $t_2 = -1$; $t_3 = \pm\infty$. Исследование концов ветвей дает при $t = 1$ $x = \mp\infty$, $y = \mp\infty$, $k = \lim_{t\to1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2}$; $b = \lim_{t\to1}(y - kx) = \lim_{t\to1}\frac{2t - t^2 - t^3}{2(t^2-1)} = -\frac{3}{4}$; мы нашли наклонную асимптоту $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$; при $t = 1 + \varepsilon$ $x = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}$, $Y - y = \frac{5\varepsilon + 2\varepsilon^2}{4(2+\varepsilon)} > 0$ при $\varepsilon > 0$, где Y — ордината точки асимптоты, y — ордината точки линии (фиг. 6); при $t = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \pm\infty$, асимптота $x = -\frac{1}{2}$, причем при $t = -1 + \varepsilon$, $x > -\frac{1}{2}$, $y \to +\infty$ $(0 < \varepsilon \to 0)$; $t = -1 - \varepsilon$, $x < -\frac{1}{2}$, $y \to -\infty$ $(0 < \varepsilon \to 0)$; при $t \to -\infty$, $x \to -\infty$, $y \to 0$ оставаясь отрицательным; при $t \to +\infty$, $x \to +\infty$,

$y \to 0$, оставаясь положительным; получается одна и та же асимптота $y = 0$ при $t = \pm\infty$.

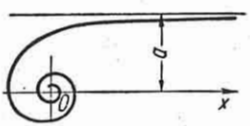
3) Гиперболическая спираль $r = \frac{a}{\varphi}$ имеет бесконечно удаленную точку $\varphi = 0$, $\lim\limits_{\varphi \to 0} r = \infty$;



Фиг. 6. Построение кривой.

асимптота параллельна полярной оси. Расстояние от полюса до асимптоты (фиг. 7)

$$p = \lim_{\varphi \to 0} r \sin\varphi = \lim_{\varphi \to 0} \frac{a \sin\varphi}{\varphi} = a.$$



Фиг. 7. Гиперболическая спираль.

Особые точки. В особой точке $M_0(t_0)$ кривой (4) (см. стр. 258) одновременно обе производные: $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0$. Из этих уравнений находится t_0. Может случиться, что при $t = t_0$ будет

$$x' = x'' = x''' = \ldots = x^{(m-1)} = 0;$$

$$x^{(m)}(t_0) \neq 0;$$

$$y' = y'' = y''' = \ldots = y^{(n-1)} = 0;$$

$$y^{(n)}(t_0) \neq 0.$$

Уравнение касательной в особой точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$: при $n = m$

$$\frac{x - x_0}{x^{(m)}(t_0)} = \frac{y - y_0}{y^{(m)}(t_0)};$$

при $n > m$ касательная параллельна Ox: $y - y_0 = 0$; при $n < m$ касательная параллельна Oy: $x - x_0 = 0$.

Обозначим наименьшее из чисел n, m через k и составим выражение

$$S_{k+1} = x^{(k)} y^{(k+1)} - y^{(k)} x^{(k+1)},$$

где производные вычислены при $t = t_0$. Пусть $S_{k+1} = S_{k+2} = \ldots = S_{k+p-1} = 0$, но $S_{k+p} \neq 0$; тогда, если k — нечетное, p — нечетное, то в точке M_0 кривая лежит по одну сторону касательной и по разные стороны нормали; если k — нечетное, p — четное, то M_0 — точка перегиба; если k — четное, p — нечетное, то M_0 — точка возврата 1-го рода (фиг. 8); если k — четное, p — четное, то M_0 — точка возврата 2-го рода (фиг. 9).

Фиг. 8. Точка возврата 1-го рода.

Фиг. 9. Точка возврата 2-го рода.

Только в двух последних случаях окрестность точки M_0 не является простой дугой; точки возврата 1-го и 2-го рода являются особыми точками кривой (4).

Пример. Параметрические уравнения обыкновенной циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; a — радиус образующего круга.

Из уравнений

$$x' = a(1 - \cos t) = 0, \quad y' = a \sin t = 0$$

находим общие корни

$$t = 2m\pi,$$

где m — любое целое число.

Вычисляем:

$$x'' = a \sin t; \quad x''_{t=2m\pi} = 0;$$

$$y'' = a \cos t; \quad y''_{t=2m\pi} = a \neq 0;$$

число $k = 2$.

Вычисляем:

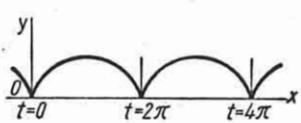
$$x''' = a \cos t; \text{ при } t = 2m\pi \; x''' = a;$$

$$y''' = -a \sin t; \text{ при } t = 2m\pi \; y''' = 0;$$

составляем

$$S_{2+1} = x''y''' - y''x''' = 0 \cdot 0 - a \cdot a = -a^2 \neq 0,$$

следовательно, $p = 1$. Точки при $t = 2m\pi$ суть точки возврата 1-го рода (фиг. 10).



Фиг. 10. Циклоида.

В *особой точке кривой* (2) одновременно удовлетворяются три уравнения: $F(x, y) = 0$; $F_x(x, y) = 0$; $F_y(x, y) = 0$.

Если одна действительная пара решений этой системы (x_0, y_0) не обращает в нуль хотя бы одну из частных производных 2-го порядка $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $F_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$, $F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *двойной* (или двукратной). Если для координат точки на кривой все частные производные до $(n-1)$-го порядка от функции $F(x, y)$ равны нулю, а производные n-го порядка не все равны нулю, то такая точка — *n-кратная*.

Уравнение совокупности касательных в двойной точке (x_0, y_0)

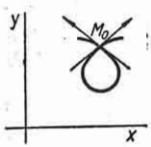
$$A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2 = 0,$$

где $A = F_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F_{yy}(x_0, y_0)$, представляет пару действительных разных, действительных совпадающих или мнимых прямых в зависимости от того, будет ли дискриминант $\Delta = B^2 - AC > 0$, $= 0$ или < 0. Угловой коэффициент этих касательных определяется по следующей формуле:

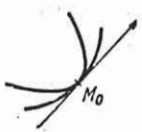
$$k = \frac{1}{C}[-B \pm \sqrt{\Delta}].$$

Если $\Delta > 0$, то точка (x_0, y_0) называется *узловой* с двумя касательными (фиг. 11).

При $\Delta < 0$ точка называется *изолированной*; вблизи этой точки нет других



Фиг. 11. Узловая точка.



Фиг. 12. Точка самоприкосновения.

Фиг. 13. Точка самоприкосновения.

точек кривой. При $\Delta = 0$ точка может быть *точкой возврата* (фиг. 8 и 9), точкой *самоприкосновения* (фиг. 12 и 13) или обыкновенной точкой.

В *трехкратной точке* (x_0, y_0) совокупность касательных к кривой определяется уравнением

$$(x-x_0)^3 F_{xxx} + 3(x-x_0)^2(y-y_0)F_{xxy} + 3(x-x_0)(y-y_0)^2 F_{xyy} + (y-y_0)^3 F_{yyy} = 0,$$

где частные производные от $F(x, y)$ вычислены при $x = x_0$, $y = y_0$.

Это уравнение дает или три действительные касательные (разные, совпадающие), или одну действительную и две мнимые касательные.

Если $x_0 = y_0 = 0$ является двойной точкой алгебраической кривой, то уравнение не содержит свободного члена и членов с первыми степенями x, y и имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx^3 + \ldots = 0$$

Начало координат — двукратная точка; касательные в этой точке определяются уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

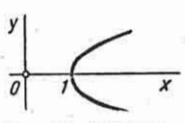
Примеры:

1) Для уравнения $y^2 + x^3 - x^3 = 0$

$$F_x = 2x - 3x^2;\ F_y = 2y;\ F_{xx} = 2 - 6x;$$

$$F_{xy} = 0;\ F_{yy} = 2.$$

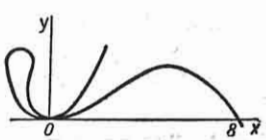
В особой точке $x = y = 0$ производные 2-го порядка равны: $A = 2$, $B = 0$, $C = 2$. Так как $\Delta = -4$, то начало координат является изолированной (особой) точкой. Форма кривой (фиг. 14) определится исследованием явного уравнения $y = \pm\sqrt{x^2(x-1)}$. При $0 < x < 1$ соответствующие y — мнимые.



Фиг. 14. Изолированная точка кривой $y^2 + x^2 - x^3 = 0$.

Фиг. 15. Узловая точка лемнискаты $2a^2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$.

2) Для лемнискаты Бернулли $2a^2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$ начало координат является узловой точкой, так как $\Delta > 0$. Совокупность касательных в этой точке определится из уравнения



Фиг. 16. Точка самоприкосновения кривой $y^2 - 6x^2y + 8x^4 - x^5 = 0$.

$x^2 - y^2 = 0$: в начале координат — две действительные касательные $y = x$, $y = -x$ (фиг. 15).

Кривая симметрична относительно осей координат. Полярное уравнение этой кривой $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ показывает, что $0 \leqslant r \leqslant a\sqrt{2}$; кривая замкнутая.

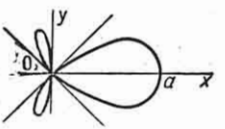
3) Для кривой $y^2 - 6x^2y + 8x^4 - x^5 = 0$ начало координат — особая точка; $\Delta = 0$. Совокупность

касательных в этой точке: $y^2 = 0$, т. е. две совпадающие с осью Ox прямые. Исследование явных уравнений

$$y = x^2(3 + \sqrt{1+x}); \quad y = x^2(3 - \sqrt{1+x})$$

показывает, что обе ветви лежат по одну сторону касательной (так как при $|x| < 1$, $y > 0$). Особая точка — точка самоприкосновения (фиг. 16).

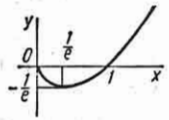
4) Для кривой $ax(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$ начало координат — трехкратная особая точка, так как в уравнении отсутствуют члены до 2-го порядка включительно. Совокупность касательных в начале координат определится уравнением $x(x^2 - y^2) = 0$. Уравнение распадается на три уравнения: $x = 0$, $y = x$, $y = -x$. Кривая симметрична относительно Ox. Уравнение кривой в полярных координатах $r = a\cos\varphi\cos 2\varphi$ показывает, что кривая замкнутая (фиг. 17).



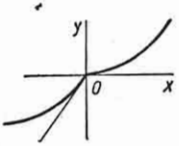
Фиг. 17. Трехкратная точка кривой $ax(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$.

Другие особые точки, кроме рассмотренных, могут быть, если нарушается непрерывность функций или производных функций, входящих в уравнение кривой.

Если при движении по кривой $y = f(x)$ функция после прохождения через точку (x_0, y_0) перестает существовать или становится мнимой, то эта точка называется *точкой прекращения* или *точкой остановки*; например, кривая $y = x\ln x$ имеет в начале координат точку прекращения (фиг. 18).



Фиг. 18. Точка прекращения кривой $y = x\ln x$.



Фиг. 19. Угловая точка кривой $y = x/(1 + e^{1/x})$.

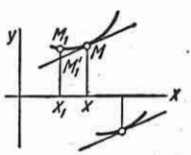
Точка на непрерывной кривой, в которой направление касательной претерпевает разрыв непрерывности, называется *угловой*.

Уравнение $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ содержит функцию $e^{\frac{1}{x}}$, которая имеет разрыв при $x = 0$. Сама кривая непрерывна, но $\dfrac{dy}{dx}$ имеет разрыв непрерывности при $x = 0$ (фиг. 19).

Алгебраические кривые не имеют ни угловых точек, ни точек прекращения.

Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Пусть касательная в точке $M(x, y)$ кривой $y = f(x)$ не параллельна Oy; вблизи точки M кривая имеет *вогнутость в сторону* $+y$, если точки $M_1(x_1, y_1)$, достаточно близкие к точке M с обеих ее сторон, находятся по одну сторону от касательной в точке M, причем для одной и той же абсциссы x ордината кривой больше ординаты касательной. Вогнутость в сторону $+y$ характеризуется условием $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ (фиг. 20).

Аналогично определяется *вогнутость в сторону* $-y$, характеризуемая условием $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$. Вогнутость в сторону $+y$ при $y > 0$ есть в то же время *выпуклость к оси* Ox (условие $yy'' > 0$), а вогнутость в сторону $+y$ при $y < 0$ есть *вогнутость к оси* Ox (условие $yy'' < 0$). Точка на кривой, в которой вогнутость в одну сторону меняется на вогнутость в другую сторону, называется *точкой перегиба*. В этой точке касательная пересекает кривую. Значение x точки перегиба кривой $y = f(x)$ находится из условия $y'' = 0$, если $y''' \neq 0$. В общем случае в точке перегиба



Фиг. 20. Вогнутость в сторону $+y$.

$$y'' = y''' = \ldots = y^{(2k)} = 0; \quad y^{(2k+1)} \neq 0.$$

Если касательная параллельна Oy, то точки перегиба находятся из уравнения $\dfrac{d^2x}{dy^2} = 0$.

Для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ значения t, соответствующие точкам перегиба, находятся из условий $x'y'' - y'x'' = 0$; $x'y''' - x'''y' \neq 0$.

Для кривой $F(x, y) = 0$ возможные точки перегиба определяются условиями

$$F(x, y) = 0; \qquad (*)$$

$$(F_y)^2 F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + (F_x)^2F_{yy} = 0.$$

Примеры:

1) Найти точки перегиба параболы 5-го порядка $y = x + x^5$:

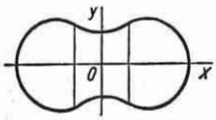
$$y' = 1 + 5x^4; \quad y'' = 20x^3; \quad y''' = 60x^2;$$

$$y^{IV} = 120x; \quad y^V = 120.$$

Из уравнения $y'' = 20x^3 = 0$ находим $x = 0$, и так как все производные до 4-го порядка включительно равны нулю при $x = 0$, но $y^V \neq 0$, то начало координат — точка перегиба.

В промежутке $0 < x < \infty$ кривая обращена вогнутостью в сторону $+y$, в промежутке $-\infty < x < 0$ — в сторону $-y$.

2) Для нахождения точек перегиба кривой $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = b^4 - a^4$ (овал Кассини) вычисляем:



Фиг. 21. Овал Кассини.

$$F_x = 4x(x^2+y^2-a^2);$$
$$F_y = 4y(x^2+y^2+a^2);$$
$$F_{xx} = 4(3x^2+y^2-a^2);$$
$$F_{xy} = 8xy;$$
$$F_{yy} = 4(x^2+3y^2+a^2).$$

Условия (*) принимают вид:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) - b^4 + a^4 = 0,$$

$$[(x^2+y^2)^2 - a^4]\,[(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2)] + 8a^4x^2y^2 = 0;$$

из этих уравнений находим

$$2x^2 = \sqrt{\frac{b^4-a^4}{3}} - \frac{b^4-a^4}{3a^2},$$

$$2y^2 = \sqrt{\frac{b^4-a^4}{3}} + \frac{b^4-a^4}{3a^2};$$

получаются четыре точки перегиба, действительные при условиях

$$b^4 - a^4 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{b^4-a^4}{3}} > \frac{b^4-a^4}{3a^2},$$

откуда

$$a\sqrt{2} > b \geqslant a \text{ (фиг. 21).}$$

Исследование и вычерчивание кривой по уравнениям $x = x(t)$, $y = y(t)$ производятся по следующей схеме.

1. Находят дифференциальные элементы: производные x', y', x'', y'', x''', y''';

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}.$$

2. Находят бесконечно удаленные точки кривой, т. е. значения t, при которых $\frac{1}{x(t)} = 0$ или $\frac{1}{y(t)} = 0$.

3. Находят асимптоты.

4. Определяют экстремумы x и y.

5. Находят пересечение кривой с осями координат.

6. Определяют t, при которых возможно изменение знаков параметрических производных, т. е. такие значения t, при которых $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$, $\frac{1}{x'} = 0$, $\frac{1}{y'} = 0$.

7. Строят шкалу переменной t и таблицу изменения x, y по определенной схеме (см. пример на стр. 265—266).

8. Находят особые точки.

9. Находят вершины кривой (см. стр. 268).

10. Находят точки перегиба.

11. Находят дополнительные точки, например узловые, т. е. находят такие t_0, t_1, при которых $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

12. Построение схематического чертежа надо начинать с вычерчивания бесконечно удаленных ветвей, а затем от точки при $t = -\infty$ пройти по всем интервалам изменения t в соответствии с таблицей и закончить точкой $t = +\infty$. На кривой стрелками указывают направление обхода.

Пример. Исследовать форму кривой $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.

Вычисляем

$$x' = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}; \quad y' = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2}.$$

Бесконечно удаленные точки $t = \pm 1$, $t = \pm\infty$ и асимптоты найдены выше (стр. 261). Для каждой из функций x, y, x', y' находим те значения t, при которых эти функции обращаются в 0 или в ∞:

$x = 0$ при $t = 0$;

$y = 0$ „ $t = 0$; $t = \pm\infty$,

$x' = 0$ „ $t = 0$, $t = 2$;

$y' = 0$ „ $t = \pm\infty$;

$x = \pm\infty$ при $t = 1$;

$y = \pm\infty$ „ $t = \pm 1$;

$x' = -\infty$ „ $t = 1$;

$y' = -\infty$ „ $t = \pm 1$.

Имеется экстремум x при $t = 0$ и при $t = 2$; в этих точках касательные параллельны оси y и кривая делает поворот. Составляется чертеж (см. фиг. 6); для этого соединяются плавными линиями бесконечно удаленные ветви и отдельные точки с указанием направления движения по кривой от $t = -\infty$.

Шкала переменной t (ось t):

Таблица изменения x и y

t	x'	y'	x	y	
$-\infty, -1$	+	−	Возр. от $-\infty$ до $-1/2$	Убыв. от 0 до $-\infty$	Асимптота $y=0$ при $t=\pm\infty$ Асимптота $x=-1/2$ при $t=-1$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}=\infty$
$-1, 0$	+	−	» » $-1/2$ до 0	» » $+\infty$ до 0	
$0, 1$	−	−	Убыв. от 0 до $-\infty$	» 0 до $-\infty$	Асимптота $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ при $t=1$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2}=\infty$
$1, 2$	−	−	» » $+\infty$ до 4	» » $+\infty$ до $\frac{2}{3}$	
$2, +\infty$	+	−	Возр. от 4 до $+\infty$	» » $\frac{2}{3}$ до 0	

Точка самопересечения ветвей кривой в промежутках $-\infty < t_0 < -1$ и $0 < t_1 < 1$ находится из уравнений (см. п. 11 схемы исследования)

$$\frac{t_1^2}{t_1-1}=\frac{t_0^2}{t_0-1},\quad \frac{t_1}{t_1^2-1}=\frac{t_0}{t_0^2-1}.$$

Если разделить второе равенство на первое, то получается $t_0^2-t_1^2=t_1-t_0$ или после сокращения ($t_1\neq t_0$)

$$t_0+t_1=-1.$$

Если первое уравнение преобразовать к виду

$$t_1t_0(t_1-t_0)=t_1^2-t_0^2,$$

то после сокращения получается

$$t_1t_0=t_1+t_0 \text{ или } t_1t_0=-1.$$

Следовательно, t_0 и t_1 удовлетворяют квадратному уравнению

$$t^2+t-1=0.$$

Корни

$$t_0=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ и } t_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

дают

$$x=-1,\quad y=-1.$$

Соприкосновение кривых. Две кривые $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ имеют в общей точке (x_0, y_0) соприкосновение n-го порядка, если

$$f(x_0)=\varphi(x_0);$$
$$f'(x_0)=\varphi'(x_0);$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0);$$
$$f^{(n+1)}(x_0)\neq\varphi^{(n+1)}(x_0).$$

Если одна кривая дана уравнением $F(x, y)=0$, а другая — уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то условия соприкосновения n-го порядка в точке ($t=t_0$) имеют вид

$$\Phi(t_0)=0;\ \Phi'(t_0)=0;\ \Phi''(t_0)=0,\ldots,$$
$$\Phi^{(n)}(t_0)=0,\ \Phi^{(n+1)}(t_0)\neq 0,$$

где

$$\Phi(t)=F[x(t),\ y(t)].$$

Пример. Найти окружность, которая в точке $x_0=-a\pi$, $y_0=0$ имела бы соприкосновение 2-го порядка с архимедовой спиралью $r=a\varphi$.

Общее уравнение окружности $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ содержит три параметра: A, B, C. Составляем $\Phi=x^2+y^2+2Ax+2By+C$, где надо заменить $x=a\varphi\cos\varphi$, $y=a\varphi\sin\varphi$ (уравнения спирали), причем $\varphi=\pi$. Вычисляем:

$$\Phi'=2[xx'+yy'+Ax'+By']=0;$$
$$\Phi''=2[x'^2+y'^2+xx''+yy''+Ax''+By'']=0;$$

кроме того,

$$\Phi=x^2+y^2+2Ax+2By+C=0.$$

Вычисляем x, y, x', y', x'', y'' при $\varphi=\pi$, и предыдущие уравнения принимают вид

$$a^2\pi^2-2a\pi A+C=0;$$
$$a^2\pi-aA-a\pi B=0;$$
$$a+A\pi-2B=0,$$

откуда

$$A=\frac{a\pi}{2+\pi^2};\quad B=\frac{a(1+\pi^2)}{2+\pi^2};\quad C=-\frac{a^2\pi^4}{2+\pi^2};$$

искомое уравнение окружности

$$(2+\pi^2)(x^2+y^2)+2a\pi x+2a(1+\pi^2)y-a^2\pi^4=0.$$

Соприкасающаяся окружность. Кривизна линии, радиус кривизны, центр кривизны. Окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, имеющая с кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ соприкосновение в точке $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$ 2-го порядка (или

выше при некоторых значениях t_0), называется *соприкасающейся окружностью* (круг кривизны). Ее центр (a, b), называемый еще *центром кривизны*, и R — *радиусом кривизны*, находят по формулам

$$a = x_0 - \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - x_0'' y_0'} y_0';$$

$$b = y_0 + \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - x_0'' y_0'} x_0';$$

$$R = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0' y_0'' - x_0'' y_0'}.$$

Для кривой $y = f(x)$:

$$a = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'; \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Для кривой $F(x, y) = 0$:

$$a = x - \frac{F_x^2 + F_y^2}{H} F_x;$$

$$b = y - \frac{F_x^2 + F_y^2}{H} F_y;$$

$$R = -\frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{H};$$

$$H = F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}.$$

Для кривой $r = f(\varphi)$:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Величина $K = \frac{1}{R}$ называется *кривизной кривой*. Если α — угол касательной с осью Ox, $\Delta\alpha$ — угол между касательной в данной точке и касательной в соседней точке, Δs — длина дуги кривой между этими точками, то

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}.$$

Для центра (a, b) кривизны

$$a = x - R \sin\alpha = x - \frac{dy}{d\alpha};$$

$$b = y + R \cos\alpha = y + \frac{dx}{d\alpha}.$$

Центр кривизны лежит на нормали кривой в сторону ее вогнутости. Если $K > 0$, то центр кривизны лежит на положительной части нормали.

Кривизна в каждой точке прямой линии постоянна и равна нулю.

Кривизна в каждой точке окружности с радиусом R постоянна и равна по абсолютной величине $\frac{1}{R}$.

Примеры:

1) Для обыкновенной циклоиды (фиг. 22)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

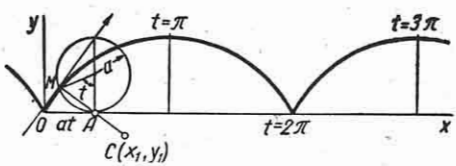
радиус кривизны

$$R = -4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Знак минус указывает, что центр кривизны всегда находится на отрицательной части нормали. Координаты (x_1, y_1) центра кривизны

$$x_1 = a(t + \sin t), \quad y_1 = -a(1 - \cos t),$$

и так как $y_1 = -y$, $at - x = x_1 - at$, то центр кривизны C и точка M кривой симметрично расположены относительно точки A на прямой MAC.



Фиг. 22. Длина нормали и радиус кривизны циклоиды.

Радиус кривизны равен удвоенной длине нормали: $R = MC = 2AM$.

2) Радиус кривизны логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$:

$$r' = ame^{m\varphi} = mr, \quad r'' = am^2 e^{m\varphi} = m^2 r;$$

радиус кривизны

$$R = r\sqrt{1 + m^2},$$

т. е. в каждой точке логарифмической спирали радиус кривизны пропорционален радиусу-вектору точки.

Для нахождения координат (x_1, y_1) центра кривизны составим параметрические уравнения логарифмической спирали:

$$x = ae^{m\varphi} \cos\varphi; \quad y = ae^{m\varphi} \sin\varphi;$$

$$x' = ae^{m\varphi}(m \cos\varphi - \sin\varphi);$$

$$y' = ae^{m\varphi}(m \sin\varphi + \cos\varphi);$$

$$x'' = ae^{m\varphi}(m^2\cos\varphi - 2m\sin\varphi - \cos\varphi);$$

$$y'' = ae^{m\varphi}(m^2\sin\varphi + 2m\cos\varphi - \sin\varphi);$$

$$x'^2 + y'^2 = (m^2+1)\,a^2e^{2m\varphi};$$

$$x'y'' - y'x'' = (m^2+1)\,a^2e^{2m\varphi};$$

$$x_1 = -ae^{m\varphi}\,m\sin\varphi;\quad y_1 = ae^{m\varphi}\,m\cos\varphi.$$

Для каждой точки (x, y) логарифмической спирали координаты (x_1, y_1) центра кривизны легко построить по формулам

$$x_1 = -my;\quad y_1 = mx.$$

Для построения нормали в точке (x, y) спирали надо соединить точки (x, y) и (x_1, y_1). Для построения касательной к спирали надо к построенной нормали провести перпендикуляр в точке (x, y).

Вершина кривой. Обыкновенная точка (не особая) кривой, для которой радиус кривизны достигает максимума или минимума, наибольшего или наименьшего значения, называется *вершиной кривой*. Соответствующие значения t находятся из условия $\frac{dR}{dt} = 0$ и исследования R на наибольшее или наименьшее значение.

В вершине порядок касания соприкасающейся окружности с кривой выше двух.

Точка пересечения кривой с осью симметрии (если точка обыкновенная) — вершина кривой.

Пример. Для циклоиды $R = -4a\sin\frac{t}{2}$, $\frac{dR}{dt} = -2a\cos\frac{t}{2}$; при $\cos\frac{t}{2} = 0$, т. е. при $t = (2k+1)\pi$ (k — любое целое число), циклоида имеет вершины (фиг. 22).

Натуральное уравнение кривой есть соотношение вида $F(R, s) = 0$ или $R = f(s)$; оно определяет все свойства кривой, кроме ее положения на плоскости.

Натуральные уравнения некоторых кривых:

а) окружности (стр. 242): $R = a = \text{const}$;

б) логарифмической спирали: $R = ms$;

в) эвольвенты окружности: $R^2 = 2as$, где a — радиус окружности;

г) циклоиды: $R^2 + s^2 = 16a^2$;

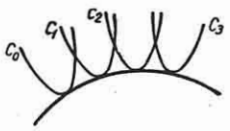
д) цепной линии: $R = a + \frac{s^2}{a}$.

Семейство линий. Дискриминантная кривая. Огибающая. Уравнение $F(x, y, c) = 0$ определяет однопараметрическое семейство линий; каждое значение c выделяет из семейства индивидуальную кривую (фиг. 23). Система уравнений

$$F(x, y, c) = 0,\quad \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

при некотором c определяет так называемую *характеристическую точку* на выделенной кривой (c) из данного семейства.

Характеристическая точка на кривой (c) вообще является предельной для точки пересечения кривых (c) и $(c + \Delta c)$ при $\Delta c \to 0$.



Фиг. 23. Огибающая.

Координаты характеристической точки зависят от c: $x = x(c)$, $y = y(c)$. При переменном c геометрическое место характеристических точек определяет *дискриминантную кривую*. Неявное уравнение дискриминантной кривой можно получить, если исключить c из $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$. Если точка $[x(c), y(c)]$ является обыкновенной точкой кривой семейства (F_y существует и $\neq 0$), то дискриминантная линия касается кривой семейства в этой точке (фиг. 23). Если точка $(x(c), y(c))$ является особой точкой, то касание не всегда бывает.

Дискриминантная кривая или ее часть, касающаяся каждой своей точкой соответствующей кривой семейства, называется *огибающей семейства*.

Примеры:

1) Семейство кривых $(y + c)^2 = (x + c)^2$ получилось параллельным переносом полукубической параболы $y^2 = x^3$, острие которой перемещается по прямой $y = x$. Система

$$F = 0;\ F_c = 2(y + c) - 3(x + c)^2 = 0$$

распадается на две системы:

$$F = 0;\ x + c = 0$$

и

$$F = 0;\quad x + c = \frac{4}{9}.$$

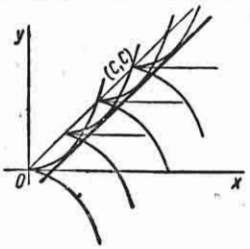
Дискриминантная линия состоит из двух ветвей:

а) $x = -c$; $y = -c$ или $y = x$;

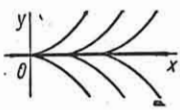
b) $x = \frac{4}{9} - c$; $y = \frac{8}{27} - c$ или $y = x - \frac{4}{27}$.

Каждая точка первой ветви является особой (точка возврата 1-го рода) точкой кривой семей-

ства. Угловой коэффициент в точке (c, c) касательной к первой ветви дискриминантной линии равен 1, а угловой коэффициент касательной в той же точке на соответствующей кривой семейства равен нулю. Прямая $y = x$ не является огибающей. Вторая ветвь является огибающей. Дискриминантная кривая состоит из огибающей и геометрического места особых точек (фиг. 24).



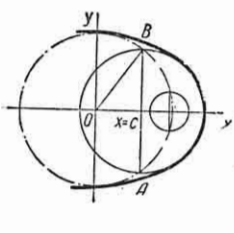
Фиг. 24. Дискриминантная линия семейства кривых $(y + c)^2 = (x + c)^3$.



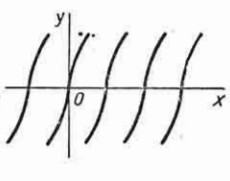
Фиг. 25. Огибающая семейства кривых $y^2 = (x + c)^3$.

2) Семейство $y^2 = (x + c)^3$ имеет огибающую $y = 0$ — ось Ox, состоящую из особых точек кривых семейства (фиг. 25).

3) Уравнение $(x - c)^2 + y^2 = 1 - c^2$ определяет семейство окружностей, диаметры которых $AB \perp Ox$ являются хордами окружности $x^2 + y^2 = 1$ (фиг. 26). Система $F = 0$, $F_c = -2(x - c) + 2c = 0$ определяет характеристические точки $x = 2c$, $y^2 = 1 - 2c^2$, откуда получаем огибающую $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, т. е. эллипс с полуосями $\sqrt{2}$ и 1; при c, близких к единице, эллипс не будет касаться соответствующих окружностей из данного семейства (фиг. 26).



Фиг. 26. Огибающая семейства окружностей $(x - c)^2 + y^2 = 1 - c^2$.



Фиг. 27. Дискриминантная линия семейства кривых $y^5 - (x + c)^3 = 0$.

4) Каждая кривая семейства $F = y^5 - (x + c)^3 = 0$ имеет точку перегиба, лежащую на Ox. Приравнивая F_c нулю, получим $-3(x + c)^2 = 0$ или $x + c = 0$.

Дискриминантная кривая $y = 0$ не является огибающей; она — геометрическое место точек перегиба, в которых $F_y = 0$ (фиг. 27).

Для случая задания семейства кривых параметрическими уравнениями $x = x(t, c)$, $y = y(t, c)$, где c выделяет из семейства определенную кривую, а t выделяет на кривой определенную точку, координаты (x, y) характеристической точки находятся из системы

$$x = x(t, c); \quad y = y(t, c); \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего равенства выражают один параметр через другой: $t = t(c)$. Дискриминантная кривая определится уравнениями

$$x = x(t(c), c); \quad y = y(t(c), c).$$

Пример. Найти огибающую семейства окружностей

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = a^2$$

постоянного радиуса a, центр которых (x, y) движется по заданной линии $x = x(c)$, $y = y(c)$. Огибающая называется *эквидистантной кривой* (или параллельной) заданной линии.

Уравнение семейства окружностей

$$[X - x(c)]^2 + [Y - y(c)]^2 = a^2$$

можно переписать в параметрической форме:

$$X = x(c) + a\cos t;$$
$$Y = y(c) + a\sin t,$$

где X, Y — текущие координаты точки на окружности. Уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial c} \\ \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

принимает вид

$$x' \cos t + y' \sin t = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} t = -\frac{x'}{y'}; \quad \cos t = \frac{y'}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$
$$\sin t = \frac{-x'}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

искомая огибающая состоит из двух ветвей:

$$X = x + \frac{ay'}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$
$$Y = y - \frac{ax'}{\pm\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Эволюта. *Эволютой* или *разверткой* данной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ называется геометрическое место центров ее кривизны (x_1, y_1). Параметрические уравнения эволюты (см. стр. 267).

$$x_1 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}y';$$
$$y_1 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}x'.$$

Нормаль в каждой точке M (фиг. 28) данной кривой есть касательная MN

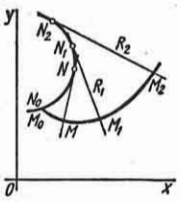
к эволюте в точке N (x_1, y_1) (центр кривизны):

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

Эволюта кривой есть огибающая ее нормалей. Приращение дуги σ эволюты равно приращению радиуса кривизны R кривой:

$$\smile N_1N_2 = |\sigma_2 - \sigma_1| = |R_2 - R_1|$$

или $|d\sigma| = |dR|$.



Фиг. 28. Эволюта и эвольвента.

Вершинам данной кривой соответствуют на эволюте точки возврата (фиг. 29).

Фиг. 29. Вершина кривой.

Радиус кривизны ρ эволюты:

$$\rho = R\frac{dR}{ds},$$

где s — дуга данной кривой.

Примеры:

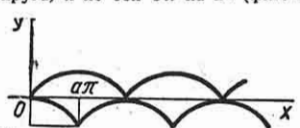
1) Эволютой циклоиды будет кривая

$$x_1 = a(t + \sin t);\ y_1 = -a(1 - \cos t).$$

Если ввести новый параметр $t_1 = t + \pi$, то получим

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1) - a\pi;\quad y_1 = a(1 - \cos t_1) - 2a.$$

Эволюта циклоиды есть такая же циклоида, но смещенная по оси Oy вниз на $2a$ (диаметр образующего круга) и по оси Ox на $a\pi$ (фиг. 30).



Фиг. 30. Эволюта циклоиды.

2) Эволюта логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ изобразится уравнениями

$$x_1 = -ame^{m\varphi}\sin\varphi;\ y_1 = ame^{m\varphi}\cos\varphi.$$

Если ввести $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$ и обозначить $a_1 = -ame^{-m\frac{\pi}{2}}$, то предыдущие уравнения примут вид:

$$x_1 = a_1e^{m\varphi_1}\cos\varphi_1;\ y_1 = a_1e^{m\varphi_1}\sin\varphi_1.$$

Эволюта логарифмической спирали — такая же спираль $r_1 = a_1e^{m\varphi_1}$, полученная из первой вращением вокруг полюса против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ и изменением радиуса-вектора в m раз.

Эвольвента. *Эвольвентой* или *развертывающей* данной линии N_0N_2 называется кривая M_0M_2, эволюта которой есть данная линия (см. фиг. 28). Если $x_1 = x_1(\sigma)$, $y_1 = y_1(\sigma)$ — уравнения данной линии N_0N_2, где σ — длина ее дуги, то уравнения эвольвенты будут иметь вид

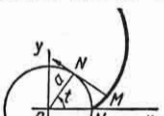
$$x = x_1(\sigma) - (\sigma - \sigma_0)\frac{dx_1}{d\sigma};$$

$$y = y_1(\sigma) - (\sigma - \sigma_0)\frac{dy_1}{d\sigma},$$

где σ_0 — постоянная величина, длина дуги эволюты, которая определяет положение точки N_0, являющейся общей для эволюты и эвольвенты. Меняя σ_0, получаем бесчисленное множество эвольвент с одной и той же эволютой.

Построение эвольвенты: на каждой касательной к данной линии (в текущей точке N) откладывается в отрицательном направлении отрезок $NM = \smile NN_0 = \sigma - \sigma_0$. Конец (точка M) опишет эвольвенту (или развертывающую) данной линии.

Эвольвенты ортогональны касательным эволюты. Расстояние между двумя эвольвентами по нормалям к ним постоянно, поэтому эвольвенты одной и той же эволюты образуют параллельные (эквидистантные) линии.



Фиг. 31. К примеру об эвольвенте окружности.

Пример. Эвольвента окружности $x_1^2 + y_1^2 = a^2$. По окружности от точки N_0 (фиг. 31) отложим дугу $N_0N = at$. На касательной в точке N отложим отрезок $NM = at$. При качении касательной по окружности точка M опишет эвольвенту окружности. Координаты точки N: $x_1 = a\cos t$; $y_1 = a\sin t$; $\sigma = at$; $dx_1 = -a\sin t\,dt$; $dy_1 = a\cos t\,dt$; $d\sigma = a\,dt$; при отсчете σ от точки N_0 $\sigma_0 = 0$. Уравнения эвольвенты

$$x = x_1 - \sigma\frac{dx_1}{d\sigma} = a[\cos t + t\sin t];$$

$$y = y_1 - \sigma\frac{dy_1}{d\sigma} = a[\sin t - t\cos t].$$

Эвольвенту окружности иногда называют разверткой круга.

Траектории. *Траекторией* кривых некоторого семейства называется линия, пересекающая все кривые семейства по некоторому закону.

Изогональной траекторией семейства кривых $F(x, y, c) = 0$ называется линия $y = f(x)$, пересекающая кривые семейства под постоянным углом γ. Углом между линиями называется угол между касательными к ним в их точке пересечения. Если X, Y текущие координаты изогональной траектории, то

$$\operatorname{tg}\gamma = \left(\frac{dY}{dX} - \frac{dy}{dx}\right) : \left(1 + \frac{dY}{dX}\frac{dy}{dx}\right).$$

Изогональные траектории определяются дифференциальным уравнением

$$\left(1 + m\frac{F_x}{F_y}\right)\frac{dY}{dX} + \frac{F_x}{F_y} - m = 0,$$

где постоянная $m = \operatorname{tg}\gamma$, в производных F_x, F_y заменены x, y на X, Y и, наконец, параметр c исключается при помощи данного уравнения $F(X, Y, c) = 0$.

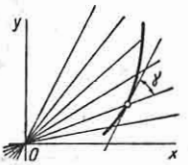
Ортогональная траектория пересекает кривые семейства под углом $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Дифференциальное уравнение ортогональных траекторий получится исключением параметра c из системы уравнений

$$F(X, Y, c) = 0;\quad \frac{dY}{dX}\frac{F_x}{F_y} - 1 = 0.$$

Эвольвента кривой есть ортогональная траектория касательных к этой кривой.

Пример. Линия, пересекающая все прямые пучка, исходящие из начала координат, $y - cx = 0$, под углом $\gamma = \text{const}$ есть логарифмическая спираль (фиг. 32).



Фиг. 32. Логарифмическая спираль.

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$(X - mY)\,dY - (mX + Y)\,dX = 0.$$

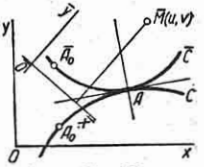
Это однородное уравнение 1-го порядка решается подстановкой $Y = uX$ и имеет общий интеграл

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = Ce^{\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}}.$$

В полярных координатах

$$r = Ce^{\varphi \operatorname{ctg}\gamma}.$$

Образование линий при движении плоскости по плоскости (рулетты). По неподвижной центроиде C (*центроидой* или *полодией* называется геометрическое место мгновенных центров вращения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости) $x = x(t)$, $y = y(t)$ в плоскости Π катится без скольжения подвижная центроида $\bar{C}$, данная уравнениями $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$, $\bar{y} = \bar{y}(\bar{t})$ относительно системы координат $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ в плоскости $\bar{\Pi}$, жестко связанной с $\bar{C}$ (фиг. 33), поэтому $\cup A_0A = \cup \bar{A}_0A$; если началу дуг A_0 на C соответствует $t = t_0$, а началу дуг $\bar{A}_0$ на $\bar{C}$ соответствует $\bar{t} = \bar{t}_0$, то



Фиг. 33. Качение плоскости по плоскости.

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}} \sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}\,d\bar{t}. \quad (7)$$

Если (u, v) — координаты точки $\bar{M}$ в плоскости $\bar{\Pi}$ относительно $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, то для координат X, Y этой точки в плоскости Π относительно xOy имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} X &= x(t) + \frac{\xi\,dx - \eta\,dy}{ds};\\ Y &= y(t) + \frac{\xi\,dy + \eta\,dx}{ds}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{(u - \bar{x}(\bar{t}))\,d\bar{x} + (v - \bar{y}(\bar{t}))\,d\bar{y}}{d\bar{s}};\\ \eta &= \frac{(v - \bar{y}(\bar{t}))\,d\bar{x} - (u - \bar{x}(\bar{t}))\,d\bar{y}}{d\bar{s}}; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

из двух параметров t и $\bar{t}$ остается один в силу зависимости $ds = d\bar{s}$ или (7).

Уравнения (8) определяют траекторию точки $\bar{M}$ по плоскости Π, называемую *рулеттой*.

Если в плоскости $\bar{\Pi}$ (вместо одной точки $\bar{M}$) дана кривая $\bar{L}$: $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, то при движении $\bar{\Pi}$ по Π получается в плоскости Π семейство кривых $\bar{L}$; параметрами являются t и τ, или $\bar{t}$ и τ.

Примеры:

1) Прямая $\bar{C}$, принятая за ось $\bar{O}\bar{x}$, катится по окружности C: $x^2 + y^2 = R^2$.

Параметрические уравнения центроид:

$$C: x = R\sin t;\ y = R\cos t;\ dx = R\cos t\,dt;$$

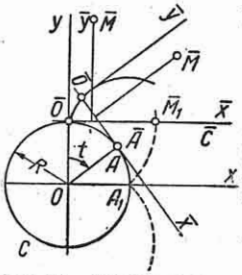
$$dy = -R\sin t\,dt;\ s = Rt;\ ds = R\,dt;$$

$$\bar{C}: \bar{x} = \bar{t};\ \bar{y} = 0;\ d\bar{x} = d\bar{t};\ d\bar{y} = 0;\ \bar{s} = \bar{t};$$

$$d\bar{s} = d\bar{t}.$$

Прямая $\bar{C}$, называемая производящей, обкатывает окружность C по часовой стрелке, параметр t, определяющий положение $\bar{C}$, отсчитывается от оси Oy по часовой стрелке (фиг. 34). По формуле $Rt = \bar{t}$ и по формулам (9) вычисляем

$$\xi = u - \bar{t} = u - Rt;$$
$$\eta = v.$$



Фиг. 34. Качение прямой по окружности.

Траектория точки $\bar{M}(u, v)$ в плоскости Π определяется относительно xOy уравнениями (8):

$$\left.\begin{aligned} X &= (R+v)\sin t + \\ &+ (u - Rt)\cos t; \\ Y &= (R+v)\cos t - \\ &- (u - Rt)\sin t; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

полученная рулетта называется *эвольвентой окружности* (обыкновенной, если $\bar{M}$ на прямой $\bar{C}$, укороченной при $v > 0$ и удлиненной при $v < 0$).

Уравнения обыкновенной эвольвенты при $u = 0$, $v = 0$ (траектория точки $\bar{O}$) имеют вид

$$X = R(\sin t - t\cos t);$$
$$Y = R(\cos t + t\sin t).$$

Чтобы получить уравнения эвольвенты при качении $\bar{C}$ по C против часовой стрелки и с исходной точкой A_1 на оси Ox, следует рассмотреть траекторию точки $\bar{M}_1$ $\left(u = \frac{\pi}{2}R,\ v = 0\right)$ и заменить $\frac{\pi}{2} - t = t'$; получим

$$X = R(\cos t' + t'\sin t');$$
$$Y = R(\sin t' - t'\cos t').$$

При $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ получаем кривую $\bar{L}$ в плоскости $\bar{\Pi}$; уравнения (10) определяют семейство этих кривых в плоскости Π при движении $\bar{\Pi}$ по Π, осуществляемом качением прямой $\bar{C}$ по окружности C.

2) Окружность радиуса r (центроида $\bar{C}$) катится без скольжения по прямой C, принятой за ось Ox в плоскости Π. При расположении осей и центроид на фиг. 35 получаем:

для C:

$$x = t;\ y = 0;\ dx = dt;\ dy = 0;\ s = t;\ ds = dt;$$

для $\bar{C}$:

$$\bar{x} = r\sin\bar{t};\quad \bar{y} = r(1 - \cos\bar{t});$$
$$d\bar{x} = r\cos\bar{t}\,d\bar{t};\quad d\bar{y} = r\sin\bar{t}\,d\bar{t};$$
$$\bar{s} = r\bar{t};\quad d\bar{s} = r\,d\bar{t};\quad r\bar{t} = t.$$

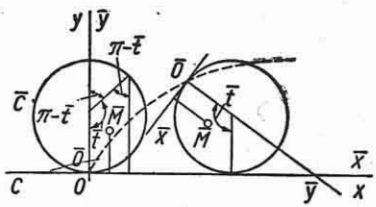
Находим

$$\xi = u\cos\bar{t} + (v - r)\sin\bar{t};$$
$$\eta = (v - r)\cos\bar{t} - u\sin\bar{t} + r.$$

Уравнения рулетты будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \xi = r(\bar{t} - \sin\bar{t}) + u\cos\bar{t} + v\sin\bar{t}; \\ Y &= \eta = r(1 - \cos\bar{t}) + v\cos\bar{t} - u\sin\bar{t}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Рулетта (11) есть *циклоидальная кривая*: обыкновенная циклоида для точки $\bar{M}$ на $\bar{C}$, укороченная циклоида для точки $\bar{M}$ внутри круга $\bar{C}$ и удлиненная циклоида для точки $\bar{M}$ вне $\bar{C}$.



Фиг. 35. Качение окружности по прямой.

Уравнения траектории точки $\bar{O}$ ($u = 0$, $v = 0$):

$$X = r(\bar{t} - \sin\bar{t}).\quad Y = r(1 - \cos\bar{t}).$$

В начальный момент системы xOy и $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ совпадают. Если $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ — уравнения кривой $\bar{L}$ в плоскости $\bar{\Pi}$, то уравнения (11) определяют семейство $\bar{L}$ при движении $\bar{\Pi}$ по Π, осуществляемом качением круга $\bar{C}$ по прямой C.

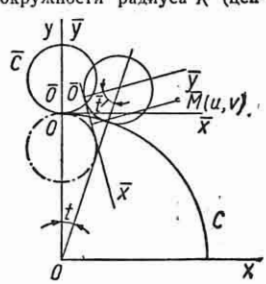
3) Окружность радиуса $\bar{r}$ (центроида $\bar{C}$) катится без скольжения по окружности радиуса R (центроида C) (фиг. 36).

Уравнения центроиды C

$$x = R\sin t;$$
$$y = R\cos t.$$

Уравнения центроиды $\bar{C}$

$$\bar{x} = r\sin\bar{t};$$
$$\bar{y} = r(1 - \cos\bar{t}).$$



Фиг. 36. Качение окружности по окружности.

Уравнения рулетты точки $\bar{M}(u,v)$ (эпициклоиды) имеют вид

$$X = (R + r)\sin t + (v - r)\sin(t + \bar{t}) + u\cos(t + \bar{t});$$

$$Y = (R + r)\cos t + (v - r)\cos(t + \bar{t}) - u\sin(t + \bar{t}),$$

где $Rt = r\bar{t}$. При качении окружности $\bar{C}$ по внутренней стороне C (штрихпунктирная окружность

на фиг. 36) уравнения рулетты (гипоциклоиды) имеют вид

$$X = (R - r)\sin t + u\cos(t - \bar{t}) + \\ + (v + r)\sin(t - \bar{t});$$

$$Y = (R - r)\cos t - u\sin(t - \bar{t}) + \\ + (v + r)\cos(t - \bar{t}),$$

где $Rt = r\bar{t}$.

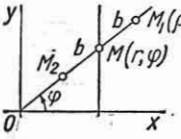
Если $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ — уравнения кривой $\overline{L}$ в плоскости $\overline{\Pi}$, то уравнения рулетт дадут уравнения семейства кривых $\overline{L}$ при указанном движении $\overline{\Pi}$ по Π.

В вопросах плоского зацепления и в теории инструмента кривая $\overline{L}$ и огибающая семейства $\overline{L}$ называются *взаимно сопряженными* кривыми. Для получения огибающей надо к предыдущим уравнениям семейства присоединить уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} & \frac{\partial Y}{\partial \tau} \end{vmatrix} = 0,$$

чем устанавливается связь τ и t (или τ и $\bar{t}$) и на каждой кривой $\overline{L}$ выделяется соответствующая характеристическая точка.

Кривые, употребительные в технике. 1. Конхоиды. *Конхоидой* для основной (направляющей) кривой относительно некоторой точки O называется геометрическое место концов отрезка постоянной длины b, откладываемого от точек M основной кривой по лучам из точки O (фиг. 37).



Фиг. 37. К образованию конхоиды прямой.

Пусть точка O — полюс, уравнение направляющей кривой $r = f(\varphi)$, тогда уравнения конхоид будут иметь вид

$$\rho = f(\varphi) \pm b,$$

где r, φ — полярные координаты точки M; ρ, φ — полярные координаты точек M_1 или M_2.

Свойства:

1) направляющая и ее конхоида имеют одну и ту же поднормаль

$$s_n = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi};$$

2) угол μ_1 между касательной и радиусом-вектором точки конхоиды находится по формуле

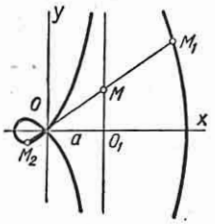
$$\operatorname{tg}\mu_1 = (r + b) : \frac{dr}{d\varphi};$$

$$\frac{\operatorname{tg}\mu}{\operatorname{tg}\mu_1} = \frac{r}{r + b};$$

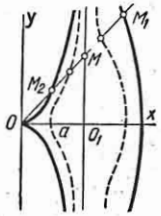
3) в приложениях к инструментальному производству угол α между перпендикуляром к радиусу-вектору и касательной к кривой называется углом задней заточки: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \mu$. Для конхоиды соответственно $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \mu_1$; свойство второе можно переписать в виде $\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{r}{\rho}$.

Наиболее употребительные конхоиды:

а) *Конхоида прямой* (или Никомеда). Уравнение направляющей (прямой O_1M)



Фиг. 38. Конхоида прямой с узловой точкой.



Фиг. 39. Конхоида прямой с точкой возврата.

$r = \frac{a}{\cos\varphi}$ (фиг. 38), ее конхоида $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b$ $(b > 0)$. В декартовых координатах получается кривая 4-го порядка:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0.$$

Конхоида состоит из двух ветвей, которые асимптотически приближаются к направляющей, и имеет в полюсе особую точку: при $b > a$ — узел (фиг. 38); при $b = a$ — точку возврата 1-го рода (фиг. 39); при $b < a$ (штриховая линия на фиг. 39) — изолированную точку.

Если начало координат перенести в точку O_1, то уравнение конхоиды прямой примет вид

$$x^2y^2 = (x + a)^2(b^2 - x^2)$$

или

$$y = \pm\frac{x + a}{x}\sqrt{b^2 - x^2}.$$

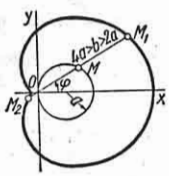
б) *Конхоида окружности* с полюсом в одной из ее точек (улитка Паскаля). Из уравнения окружности с радиусом a (фиг. 40) $r = 2a\cos\varphi$ получаем уравнение конхоиды окружности относительно точки O:

$$\rho = 2a\cos\varphi \pm b\ (b > 0).$$

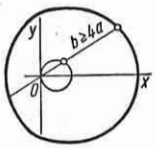
В декартовых координатах получается замкнутая кривая 4-го порядка

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

с особой точкой в начале координат.



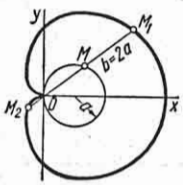
Фиг. 40. Конхоида окружности ($4a > b > 2a$).



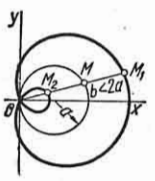
Фиг. 41. Конхоида окружности ($b \geqslant 4a$).

При $2a < b < 4a$ полюс — изолированная точка. Кривая имеет две точки с касательными $\parallel Ox$, четыре точки с касательными $\parallel Oy$, две точки перегиба.

При $b \geqslant 4a$ конхоида не имеет точек перегиба (фиг. 41).



Фиг. 42. Конхоида окружности (кардиоида, $b = 2a$).



Фиг. 43. Конхоида окружности ($b < 2a$).

При $b = 2a$ получается кардиоида: $\rho = 2a(\cos\varphi + 1)$. Полюс — точка возврата 1-го рода (фиг. 42).

При $b < 2a$ полюс — узел; кривая имеет четыре касательные $\parallel Ox$ и четыре касательные $\parallel Oy$ (фиг. 43).

в) *Конхоида логарифмической спирали* (см. стр. 276).

г) *Конхоида спирали Архимеда* (см. стр. 275).

2. Спирали. 1) *Спиралью Архимеда* называется траектория точки, равномерно движущейся по лучу OA, который в то же время равномерно вращается вокруг неподвижной точки O (фиг. 44).

Параметрические уравнения архимедовой спирали для полярных координат

$$r = vt; \quad \varphi = \omega t,$$

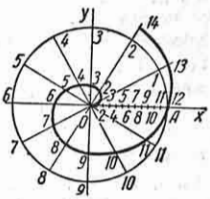
где v — скорость равномерного движения точки по лучу; ω — скорость равномерного вращения луча; t — время.

Уравнение в полярных координатах

$$r = a\varphi,$$

где

$$a = \frac{v}{\omega} = \text{const}.$$



Фиг. 44. Построение архимедовой спирали.

Параметрические уравнения в декартовых координатах

$$x = a\varphi\cos\varphi; \quad y = a\varphi\sin\varphi.$$

Неявное уравнение в декартовых координатах

$$\sqrt{x^2 + y^2} - a \cdot \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

Построение спирали по точкам: окружность радиуса $2a\pi$ делят на n частей (фиг. 44, $n = 12$), радиус (отрезок $2a\pi$) также делят на n частей и на лучах из полюса O откладывают соответствующие отрезки (на луче номера k — отрезок, равный $\frac{k2a\pi}{n}$). Конец отрезка лежит на спирали.

Постоянный параметр a есть радиус-вектор r той точки, для которой полярный угол $\varphi = 1$ радиану (57° 17′44″,8); $a = \frac{OA}{2\pi}$.

Свойства:

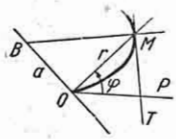
а) Спираль Архимеда — симметричная кривая относительно перпендикулярной к полярной оси прямой, проходящей через полюс (на фиг. 45 симметричная часть вычерчена штриховой линией, соответствующей $\varphi < 0$). В полюсе спираль касается полярной оси.

Фиг. 45. Архимедова спираль.

б) При изменении φ в арифметической прогрессии с разностью $\Delta\varphi$ радиус-

вектор r изменяется в арифметической прогрессии с разностью $\Delta r = a\Delta\varphi$.

Кривая совершает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса.



Фиг. 46. Поднормаль спирали Архимеда.

Шаг спирали — расстояние по лучу между соседними витками — равен $2a\pi = \text{const}$.

в) Полярная поднормаль есть величина постоянная: $s_n = a$. Построение нормали и касательной в заданной точке (r, φ) показано на фиг. 46.

г) Дифференциал дуги

$$ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$$

Длина дуги, считая от полюса,

$$s = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \operatorname{Arsh}\varphi\right].$$

д) Радиус кривизны

$$R = a\frac{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}.$$

е) Конхоидой спирали Архимеда $r = a\varphi$ является также спираль Архимеда $\rho = a\varphi + b$ с тем же параметром a, но повернутая на угол $\frac{b}{a}$ радиана:

$$\rho = a\varphi + b = a\left(\varphi + \frac{b}{a}\right) = a\theta;$$

$$\theta - \varphi = \frac{b}{a}.$$

ж) Архимедовой спиралью $r = a\varphi$ пользуются для деления любого угла φ_0 на n частей, для чего отрезок $r = a\varphi_0$ делят на n равных частей и из полюса, как из центра, засекают дуги окружностей радиусами $r_1 = \frac{a\varphi_0}{n}$, $r_2 = \frac{2a\varphi_0}{n}$ и т. д.; на спирали получаются точки с полярными углами: $\frac{\varphi_0}{n}, \frac{2\varphi_0}{n}$ и т. д.*

Применение архимедовой спирали имеет место, например, в производстве фасонных фрез с профилем по этой спирали. Определение углов α_1 задней заточки для конхоид архимедовой спирали производится по формуле $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{r}{\rho}\operatorname{tg}\alpha$.

2) *Логарифмической спиралью* называется кривая, определяемая в полярных координатах уравнением

$$r = ae^{m\varphi}.$$

Уравнение $r = ab^{m\varphi}$ также изображает логарифмическую спираль, так как, положив $m \ln b = m_1$, получаем

$$r = ae^{m_1\varphi}.$$

Параметрические уравнения:

$$x = ae^{m\varphi}\cos\varphi; \quad y = ae^{m\varphi}\sin\varphi.$$

Постоянный параметр $a = r_0$ при $\varphi = 0$. Другой параметр m определяется заданием r_1 при $\varphi = 1$ (радиан):

$$m = \ln\frac{r_1}{a}.$$

Построение спирали по точкам производится при помощи таблиц натуральных логарифмов по формуле

$$\ln r = \ln a + m\varphi.$$

Свойства:

а) При изменении φ в арифметической прогрессии с разностью $\Delta\varphi$ радиус-вектор r изменяется в геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{m\Delta\varphi}$; при $\varphi \to \infty$, $r \to \infty$; при $\varphi = 0$, $r = a$; при $\varphi \to -\infty$, $r \to 0$. Полюс есть асимптотическая точка спирали: кривая совершает бесчисленное множество оборотов, неограниченно приближаясь к полюсу.

б) Во всякой точке спирали $\operatorname{ctg}\mu = m = \text{const}$.

Нормаль образует с радиусом-вектором OM угол $\alpha = \operatorname{arctg} m = \text{const}$. Это свойство позволяет построить нормаль (по тангенсу $\operatorname{tg}\alpha = m$) и касательную в точке M.

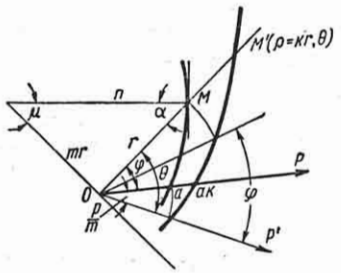
В той же точке M (r, φ) поднормаль $s_n = mr$, что позволяет так же легко построить нормаль и касательную к логарифмической спирали в точке M (фиг. 47).

в) Уравнение $r = ae^{m\varphi+p}$ изображает ту же логарифмическую спираль, но повернутую на угол $\frac{p}{m}$ радиана (фиг. 47). Такую спираль называют *подобной* данной $r = ae^{m\varphi}$, так как при умножении радиуса-вектора всякой точки на

* Тем же свойством обладает квадратриса Диностратa: $r = a\frac{\varphi}{\sin\varphi}$.

$k = \text{const}$ получаем $\rho = ae^{m\varphi} \cdot k = ae^{m\varphi + \ln k} = ae^{m\theta}$, где $\theta - \varphi = \dfrac{\ln k}{m}$.

Изменение параметра a приводит к вращению одной и той же логарифмической спирали около ее асимптотической точки.



Фиг. 47. Логарифмическая спираль.

г) Полярный отрезок нормали спирали $n = r\sqrt{1 + m^2} = \dfrac{r}{\cos\alpha}$.

д) Радиус кривизны $R = \dfrac{r}{\cos\alpha} = n$.

е) Центр кривизны — см. на стр. 267.

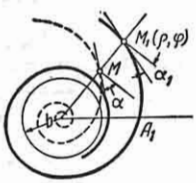
ж) Эволютой спирали является та же спираль, но повернутая относительно основной на угол $\left(\dfrac{\ln m}{m} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

з) Конхоидой спирали будет новая кривая $\rho = r + b$, в точках которой угол $\mu_1 \neq \text{const}$:

$$\operatorname{tg}\mu_1 = (r + b) : mr.$$

Угол α_1 нормали с радиусом-вектором точки конхоиды находится по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{r}{\rho}\operatorname{tg}\alpha.$$



Фиг. 48. Конхоида логарифмической спирали.

При $\varphi \to \infty$ точка M_1 конхоиды описывает бесчисленное множество оборотов, $\rho \to \infty$. При $\varphi = 0$ $\rho = a + b$. При $\varphi \to -\infty$ $\rho \to b$, т. е. окружность с радиусом b является асимптотической для конхоиды логарифмической спирали (фиг. 48).

Логарифмическая спираль применяется при затылковании зуба фасонной фрезы.

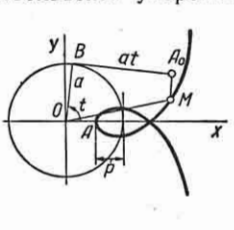
3) *Гиперболической спиралью* называется кривая, определяемая в полярных координатах уравнением $r = \dfrac{a}{\varphi}$ (см. стр. 262). При $\varphi \to \infty$ кривая неограниченно приближается к полюсу. При $\varphi \to 0$ $r \to \infty$; имеется асимптота (см. фиг. 7).

Если образовать семейство концентрических окружностей с центром в полюсе и на каждой из них, начиная от полярной оси, отложить дугу длины a, то полученные на окружностях точки лежат на гиперболической спирали. Длина полярной подкасательной спирали постоянная и равна a.

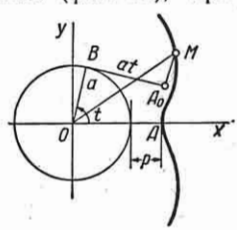
3. Эвольвента окружности. Уравнения (10) примера 1 (стр. 272) при $u = 0$, $v = p$, $R = a$ — радиус основной окружности и при замене осей x и y между собой принимают вид

$$x = (a + p)\cos t + at\sin t;$$
$$y = (a + p)\sin t - at\cos t,$$

где t — угол xOB. При $p < 0$ — эвольвента удлиненная (фиг. 49), при $p > 0$ — эвольвента укороченная (фиг. 50), при



Фиг. 49. Удлиненная эвольвента.



Фиг. 50. Укороченная эвольвента.

$p = 0$ — эвольвента обыкновенная (фиг. 51).

Параметрические уравнения в полярных координатах:

1-й вид:

$$r = (a + p)\sec\alpha,\quad \varphi = \frac{a + p}{a}\operatorname{tg}\alpha - \alpha,$$

где параметр α есть угол BOM и связан с углом t формулами

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{at}{a + p};\quad \varphi = t - \alpha;$$

2-й вид:

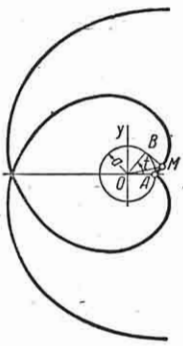
$$r = \sqrt{a^2t^2 + (a + p)^2};$$
$$\varphi = t - \operatorname{arctg}\frac{at}{a + p}.$$

Явное уравнение

$$\varphi = \pm\left(\frac{1}{a}\sqrt{r^2 - (a + p)^2} - \arccos\frac{a + p}{r}\right)$$

определяет ветвь, соответствующую $t > 0$, если перед скобкой взять плюс, и ветвь, симметричную относительно Ox, если взять минус перед скобкой.

Частный случай удлиненной эвольвенты: при $p = -a$ удлиненная эвольвента обращается в спираль Архимеда $r = a\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, ось симметрии Ox.



Фиг. 51. Обыкновенная эвольвента.

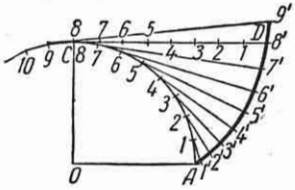
Общее свойство удлиненной, обыкновенной и укороченной эвольвенты: если построить окружность радиуса $a + p$ $\left(p \gtrless 0\right)$ с центром в полюсе, из какой-нибудь точки M эвольвенты провести касательную к этой окружности, через полученную точку касания A и через полюс O провести вспомогательную прямую AO, провести в точке M нормаль к эвольвенте до точки N пересечения нормали с OA, то $np_{OA}MN = p = \text{const}$.

Для построения удлиненной и укороченной эвольвент следует построить обыкновенную эвольвенту и от точек последней по касательной к ней откладывать отрезок p.

Уравнения и свойства обыкновенной эвольвенты окружности: а) кроме уравнений, полученных из предыдущих при $p = 0$, удобен вид

$$x = a \sec \alpha \cos \varphi; \quad y = a \sec \alpha \sin \varphi,$$

где $\varphi = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$ и называется *эвольвентной функцией*. При помощи таблицы

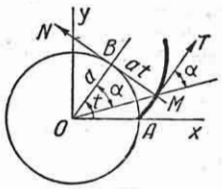


Фиг. 52. Построение эвольвенты окружности.

этой функции (стр. 57) можно вычислять декартовы координаты точек эвольвенты.

Геометрический способ построения эвольвенты окружности основан на свойстве эвольвенты как развертывающей кривой.

На фиг. 52 дуга AC окружности разделена на n ($n = 8$) частей, на ее касательной в точке C строится отрезок CD, равный дуге AC, и делится на n частей. В точках деления окружности проводят касательные, на которых откладываются отрезки $11' = D1$, $22' = D2$, $33' = D3$ и т. д. Точки $1', 2', 3' \ldots$ — точки эвольвенты.



Фиг. 53.

б) Эволютой эвольвенты является окружность. Точка B на окружности является центром кривизны в соответствующей точке M эвольвенты (фиг. 53).

Отрезок MB производящей прямой есть радиус кривизны эвольвенты в точке M:

$$MB = \cup AB = at = \sqrt{r^2 - a^2} = R.$$

в) Изменение радиуса кривизны пропорционально изменению центрального угла t:

$$\Delta R = a \Delta t.$$

г) Производящая прямая — нормаль к эвольвенте в точке M. Касательная к эвольвенте в точке M параллельна радиусу OB окружности. Угол между r и касательной $\mu = \alpha$. Угол α называется в теории эвольвентных зацеплений *углом давления*:

$$\operatorname{tg} \alpha = r \frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 1}.$$

д) Эвольвентная функция обозначается $\varphi = \operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$. При помощи эвольвентной функции получается следующий параметрический вид уравнений эвольвенты в полярных координатах:

$$r = a \sec \alpha; \quad \varphi = \operatorname{inv} \alpha,$$

который применяется для построения эвольвенты по точкам в полярных координатах.

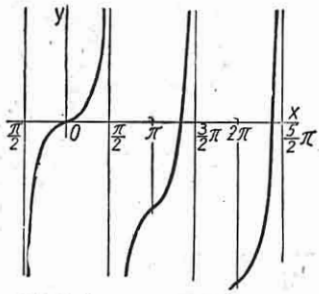
Свойства эвольвентной функции:

$$\operatorname{inv} 0 = 0; \quad \operatorname{inv} \frac{\pi}{2} = \infty;$$

$$\operatorname{inv}(-\alpha) = -\operatorname{inv} \alpha.$$

Функция имеет разрывы при $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ...

Производная $\frac{d\,\mathrm{inv}\,\alpha}{d\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha > 0$, функция все время возрастает. График функции в декартовых координатах $y = \mathrm{inv}\,x$ дан на фиг. 54. Эвольвентной



Фиг. 54. График эвольвентной функции.

функцией пользуются для вычисления толщины зуба зубчатых колес:

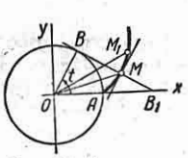
$$T_2 = 2r_2\left[\frac{T_1}{2r_1} + \mathrm{inv}\,\alpha_1 - \mathrm{inv}\,\alpha_2\right],$$

где α_1 и α_2 — углы давления в точках эвольвенты A_1 и A_2; T_1 — толщина зуба на дуге окружности с радиусом r_1; T_2 — толщина зуба на окружности с радиусом r_2.

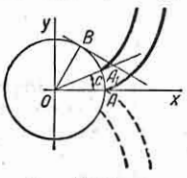
е) Эвольвента симметрична относительно Ox. В пересечении с осью Ox находятся точка возврата 1-го рода при $\varphi = 0$ и узловые точки при $\varphi = \pm\pi$, $\pm 2\pi$, ...; параметр α для этих точек определяется по таблице эвольвентной функции из равенства

$$\mathrm{inv}\,\alpha = k\pi,$$

после чего вычисляется $r = a\sec\alpha$.



Фиг. 55. Длина нормали эвольвенты окружности.



Фиг. 56. Эквидистантные эвольвенты окружности.

ж) Длина нормали $MB_1 = N = a\,|\mathrm{tg}\,t - t|$ (фиг. 55).

з) Длина дуги от точки $A(t = 0)$ до текущей точки $M(t)$ $s = \frac{at^2}{2}$ или $s = \frac{a}{2}\mathrm{tg}^2\alpha$.

Площадь сектора OMM_1 (фиг. 55) между $OM = r$, $OM_1 = r_1$ и дугой эвольвенты MM_1 равна

$$\frac{a^2}{6}(\mathrm{tg}^3\alpha_1 - \mathrm{tg}^3\alpha).$$

и) Из каждой точки A_1 основной окружности, как из начальной точки, выходит эвольвента этой окружности, эквидистантная эвольвенте из точки A. Если угол $AOA_1 = c$, то уравнения

$$x = a\,[\cos t + (t - c)\sin t],$$
$$y = a\,[\sin t - (t - c)\cos t]$$

определят новую эвольвенту, полученную из прежней поворотом вокруг точки O на угол c (фиг. 56).

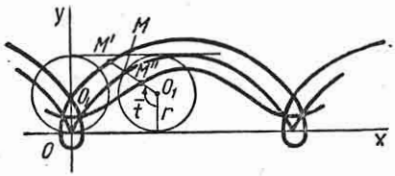
4. Циклоидальные кривые.

1) *Циклоиды* — рулетты, полученные при качении окружности по прямой (см. стр. 272).

Если положить $u = 0$ и обозначить $p = r - v$ — расстояние от некоторой точки плоскости круга до его центра, $t = \varphi$ — угол поворота круга относительно прямой, соединяющей центр круга с точкой касания Ox, то из уравнений (11) на стр. 272 получаются уравнения циклоиды

$$x = r\varphi - p\sin\varphi;$$
$$y = r - p\cos\varphi,$$

которые определяют при $p = O_1M'' < r$ укороченную циклоиду (фиг. 57), при



Фиг. 57. Циклоиды: обыкновенная, удлиненная и укороченная.

$p = O_1M = r$ — обыкновенную циклоиду, при $p = O_1M' > r$ — удлиненную циклоиду. Укороченная или удлиненная эпициклоида или гипоциклоида называется также *трохоидой*.

Явное уравнение в декартовых координатах первой половины первой арки циклоиды имеет вид

$$x = r \arccos \frac{r-y}{p} - \sqrt{p^2-(r-y)^2};$$

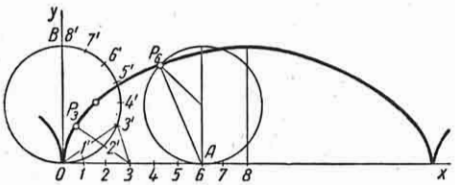
для второй половины той же арки

$$x = r\left(2\pi - \arccos\frac{r-y}{p}\right) + \sqrt{p^2-(r-y)^2}.$$

Свойства обыкновенной циклоиды.

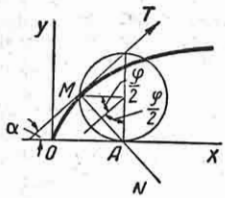
а) Кривая имеет точки возврата 1-го рода при $\varphi = 2k\pi$; k — целое число.

б) Построение: отрезок оси x, равный $r\pi$, делят на n равных частей (на фиг. 58



Фиг. 58. Обыкновенная циклоида.

$n = 8$) и полуокружность также делят на n частей. Точка циклоиды, например P_3, получается от пересечения двух дуг окружностей: одна окружность радиусом $03'$ имеет центр в точке 3, другая — с радиусом $33'$ — имеет центр в точке O.



Фиг. 59. Касательная и нормаль к циклоиде.

в) Касательная и нормаль к циклоиде в точке M (фиг. 59) пересекают окружность в концах диаметра, проходящего через точку A касания окружности с осью Ox. Угол касательной с Ox $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

г) Касательная к циклоиде параллельна биссектрисе угла φ (фиг. 59).

д) Дифференциал дуги $ds = 2r \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi$.

е) Длина дуги от точки $\varphi = 0$ до текущей точки 1-й арки $s = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)$. Длина дуги одной арки $s = 8r$.

ж) О длине нормали, радиусе кривизны, эволюте см. выше (стр. 267, 270).

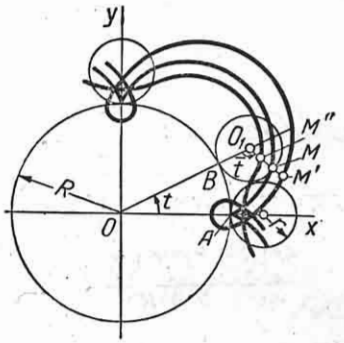
Во всякой точке удлиненной и укороченной циклоид нормаль проходит через точку касания катящейся окружности с прямой Ox.

Для построения этих циклоид надо построить обыкновенную циклоиду и по каждому радиусу окружности, направленному в точки обыкновенной циклоиды, отложить от центра отрезок p.

2) *Эпициклоиды* — рулетты, полученные при качении окружности по окружности (касание внешнее). Если в формулах примера 3 (стр. 272) положить $u = 0$, $v = r - p$, где p — расстояние от центра O_1 подвижного круга до его некоторой точки M, то при замене осей x на y и y на x получим уравнения

$$x = (R + r)\cos t - p\cos(t + \bar{t}),$$
$$y = (R + r)\sin t - p\sin(t + \bar{t}),$$

определяющие при $p = O_1M'' < r$ укороченную эпициклоиду, при $p = O_1M = r$ — обыкновенную эпициклоиду,



Фиг. 60. Эпициклоиды: обыкновенная, удлиненная, укороченная.

при $p = O_1M' > r$ — удлиненную эпициклоиду (фиг. 60). В этих формулах следует оставить $t = \angle AOB$ или $\bar{t} = \angle BO_1M$ на основании зависимости $Rt = r\bar{t}$.

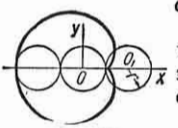
Если обозначить $\frac{R}{r} + 1 = m$, $\bar{t} = (m-1)t$, то

$$x = rm\cos t - p\cos mt,$$
$$y = rm\sin t - p\sin mt.$$

Свойства:

а) Если m — рациональное число, то эпициклоида будет алгебраической кривой; в этом случае кривые получаются замкнутыми.

б) В случае $R = r = p$ ($m = 2$) обыкновенная эпициклоида называется *кардиоидой* (фиг. 61).



Фиг. 61. Кардиоида.

При $r = \infty$ эпициклоиды превращаются в эвольвенты неподвижной окружности.

в) В каждой из эпициклоид нормаль проходит через точку касания кругов.

г) Обыкновенная эпициклоида ($r = p$) имеет точки возврата 1-го рода при $t = \frac{2k\pi}{m-1}$, k — целое число. Если провести диаметр катящегося круга через точку касания кругов, то касательная и нормаль в данной точке эпициклоиды проходят через концы этого диаметра.

д) Угловой коэффициент касательной к обыкновенной эпициклоиде $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(t\frac{m+1}{2}\right)$. Касательная параллельна биссектрисе угла t. Дифференциал дуги

$$ds = 2(R + r)\sin\frac{Rt}{2r}\,dt.$$

Радиус кривизны равен

$$\frac{4r(R + r)\sin\left(\frac{t}{2}\frac{R}{r}\right)}{2r + R}.$$

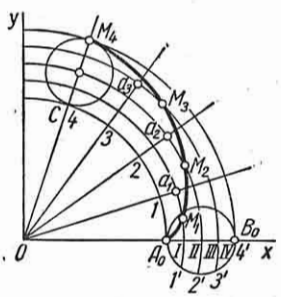
е) Эволютой обыкновенной эпициклоиды является обыкновенная эпициклоида, сжатая в постоянном отношении $1:\left(1 + 2\frac{r}{R}\right)$ по лучам, выходящим из точки O, и повернутая на угол $\frac{r\pi}{R}$. У этой эволюты радиус катящегося круга $r_1 = \frac{rR}{R + 2r}$, радиус неподвижного круга $R_1 = \frac{R^2}{R + 2r}$; эволюта подобна основной эпициклоиде.

ж) Для построения обыкновенной эпициклоиды следует по неподвижной окружности отложить дугу $A_0C = \cup A_0B_0$ — половину длины подвижной окружности (фиг. 62), каждую дугу разделить на n равных частей (на фиг. 62 $n = 4$). Через точки *1*, *2*, *3*, *4* провести из центра O лучи, а через точки *1′*, *2′*, *3′*, *4′* провести концентрические окружности с центром O; эти окружности пересекут диаметр A_0B_0 в точках *I*, *II*, *III*, *IV*, а лучи из центра O — соответственно в точках a_1, a_2, a_3, M_4. От последних точек по этим дугам концентрических окружностей надо отложить

$$I\,1' = a_1M_1;\quad II\,2' = a_2M_2;\quad III\,3' = a_3M_3.$$

Точки A_0, M_1, M_2, M_3, M_4 — точки эпициклоиды.

Построение удлиненной и укороченной эпициклоид производится при помощи предварительно построенной



Фиг. 62. Обыкновенная эпициклоида.

обыкновенной эпициклоиды; на прямой, соединяющей центр O_1 (фиг. 60) с точкой обыкновенной эпициклоиды, откладывают от центра O_1 отрезок p; конец отрезка опишет удлиненную или укороченную эпициклоиду.

3) *Гипоциклоиды* — рулетты, полученные при качении окружности по окружности (внутреннее касание, $r < R$). Уравнения

$$x = (R - r)\cos t + p\cos\left(\frac{R - r}{r}t\right),$$

$$y = (R - r)\sin t - p\sin\left(\frac{R - r}{r}t\right)$$

определяют укороченную ($p < r$), удлиненную ($p = p_1 > r$) и обыкновенную ($p = r$) гипоциклоиды (фиг. 63).

Если отношение $\frac{R}{r}$ рационально, то гипоциклоиды — алгебраические кривые, замкнутые; если $\frac{R}{r} - 1 = m$, то

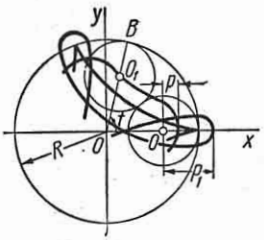
$$x = rm\cos t + p\cos mt;$$

$$y = rm\sin t - p\sin mt.$$

При $p = r = \frac{R}{4}$ $(m = 3)$ гипоциклоида называется *астроидой* (фиг. 64), и уравнения принимают вид

$$x = R\cos^3 t;\ y = R\sin^3 t \text{ или } x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Касательная и нормаль обыкновенной гипоциклоиды имеют свойства, одинаковые со свойствами эпициклоиды.



Фиг. 63. Гипоциклоиды: обыкновенная, удлиненная, укороченная.

Во всякой точке каждого типа гипоциклоиды нормаль проходит через точку касания кругов.

Построение гипоциклоид аналогично построению эпициклоид.

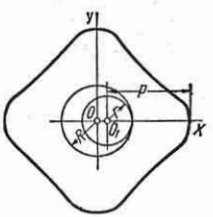
При $r = \frac{1}{2}R$ $(m = 1)$ получается эллипс:

$$x = (r + p)\cos t;\quad y = (r - p)\sin t;$$

при $r = p = \frac{1}{2}R$ гипоциклоида обращается в прямую — ось Ox.

При r, близком к R, удлиненные гипоциклоиды могут иметь вид, показанный на фиг. 65.

Фиг. 64. Астроида.

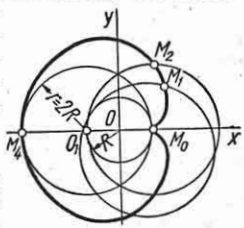


Фиг. 65. Удлиненная гипоциклоида.

Эволютой обыкновенной гипоциклоиды является также обыкновенная гипоциклоида, только повернутая на угол $\frac{r\pi}{R}$ и растянутая в постоянном отношении 1: $\left(1 - 2\frac{r}{R}\right)$ по всем лучам, выходящим из начала координат. Радиус катящегося круга $r_1 = \frac{Rr}{R - 2r}$, радиус неподвижного круга $R_1 = \frac{R^2}{R - 2r}$. Радиус кривизны обыкновенной гипоциклоиды равен

$$\frac{4r(R - r)\sin\left(\frac{t}{2}\frac{R}{r}\right)}{2r - R}.$$

4) *Перициклоида* описывается точкой плоскости круга, катящегося без скольжения по неподвижной окружности, причем последняя содержится внутри катящегося круга.



Фиг. 66. Обыкновенная перициклоида

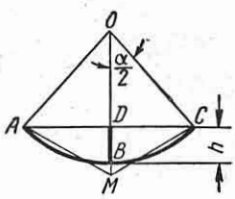
Обыкновенная перициклоида описывается точкой катящейся окружности (на фиг. 66 при $r = 2R$).

Удлиненная и укороченная перициклоиды описываются точками, лежащими соответственно вне и внутри катящегося круга.

Перициклоида есть всегда некоторая эпициклоида, причем неподвижный круг имеет радиус $R_1 = R$, а радиус подвижного круга $r_1 = r - R$.

Спрямление дуги окружности. Для откладывания дуги окружности по дуге другой окружности или по прямой имеется несколько способов.

1. Способ Чебышева. Дуга окружности $s = \overset{\frown}{ABC}$ с центральным углом α приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника AMC, построенного на хорде AC этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ее стрелки, т. е. $DM = h\sqrt{\frac{4}{3}}$ (фиг. 67):



Фиг. 67. Спрямление окружности.

$$s \approx 2AM.$$

Точная величина ошибки

$$\Delta s = \alpha r - 2AM =$$

$$= r\left[\alpha - 2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{4}{3}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right].$$

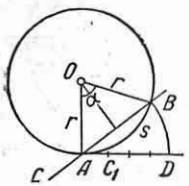
Разложение в ряд дает

$$\Delta s = \alpha r \left[\frac{1}{180}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 + \ldots\right].$$

Величина относительной погрешности

$$\frac{\Delta s}{s} \approx \frac{1}{180}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4.$$

2. Способ Ренкина. Для спрямления дуги AB окружности (фиг. 68) с центральным углом α половину хорды AB откладывают на ее продолжении $AC = \frac{1}{2}AB$.



Фиг. 68. Спрямление окружности.

Радиусом CB из точки C, как из центра, засекают точку D на касательной AD к окружности: отрезок $AD \approx \cup AB = s$. Точная величина ошибки

$$\cup AB - AD = \Delta s = \alpha r - AD =$$

$$= \alpha r - r \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{9 + 8\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right).$$

$$\Delta s = \frac{r\alpha^5}{1080} + \ldots.$$

При $\alpha \leqslant 1$ $(57°17'44'',8)$

$$0 < \Delta s < \frac{r\alpha^5}{900}; \quad \frac{\Delta s}{s} < \frac{\alpha^4}{900}.$$

При углах, не больших 30°, относительная ошибка составляет около 0,006% измеряемой величины.

В обратной задаче — на окружность наложить данный отрезок AD — надо последний разделить на четыре равные части (фиг. 68) и радиусом $C_1D = \frac{3}{4}AD$ из точки C_1, как из центра, засечь окружность в точке B. Длина дуги $AB \approx AD$. Точная величина ошибки равна $\alpha r - AD$ (см. выше).

Для откладывания длины дуги одной окружности по другой надо сначала дугу спрямить, а затем полученный отрезок построить на другой окружности.

3. Способ хорд состоит в том, что дугу s заменяют ее хордой l. Точная величина ошибки при такой замене равна (фиг. 68).

$$\Delta s = s - l = 2r\left(\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Если $s = \frac{r}{10}$, то $\Delta s \approx 0{,}00002r$, $\frac{\Delta s}{s} \approx$ $\approx 0{,}0002 = 0{,}02\%$. Чтобы спрямить дугу AB, надо ее разделить на n равных частей, причем длина дуги $\frac{AB}{n} < \frac{r}{10}$. Хорду дуги $\frac{AB}{n}$ откладывают по прямой n раз, и полученный отрезок $AD \approx$ $\approx \cup AB$ с ошибкой в n раз большей, чем при замене дуги $\frac{AB}{n}$ соответствующей хордой.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

Уравнения. Линия может быть задана:
1) уравнениями

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x), \tag{12}$$

определяющими на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ *простую дугу кривой*, если в $[a, b]$ функции $f(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные 1-го порядка;

2) параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{13}$$

или векторным уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{i}\,x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t), \tag{14}$$

определяющими на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *простую дугу кривой* M_0M_1, если — $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны с непрерывными производными 1-го порядка, которые не обращаются в нуль одновременно, т. е. модуль $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| \neq 0$, и если взаимно однозначно соответствуют точки дуги M_0M_1 значениям отрезка $[t_0, t_1]$. (Определение регулярного куска см. стр. 258.) При изменении t от t_0 до t_1, соответствующая точка M пробегает простую дугу только один раз в одном направлении, которое называется *положительным направлением кривой*. Оно зависит от выбора параметра t.

В *особой точке* кривой $\frac{d\bar{r}}{dt} = 0$.

Из трех уравнений (13) каждая пара определяет проекцию пространственной кривой на соответствующую координатную плоскость;

3) уравнениями в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0, \quad (15)$$

определяющими геометрическое место точек и такое, что в окрестности каждой из этих точек имеется простая дуга кривой.

Последняя существует, если в окрестности какой-нибудь точки (x_0, y_0, z_0) F и Φ непрерывны, обладают непрерывными частными производными 1-го порядка, и в этой точке ранг функциональной матрицы $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}$ равен 2.

Уравнения (15) можно параметризовать, если задать одну координату как произвольную функцию t.

Длина дуги. Простая дуга спрямляема, и ее длина s от некоторой точки $M_0(t_0)$ до текущей точки $M(t)$ находится по формуле (см. стр. 190)

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \Psi(t),$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Выразив t через s из уравнения $s = \psi(t)$, можно получить новые параметрические уравнения той же кривой

$$x = f_1(s), \quad y = f_2(s), \quad z = f_3(s).$$

При таком задании положительному направлению на кривой соответствует то, в котором отсчитывается длина s.

В дальнейшем производные по s и по t обозначены соответственно штрихом и точкой:

$$\frac{df}{ds} = f', \quad \frac{d^2f}{ds^2} = f'', \ldots, \quad \frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}, \ldots$$

Касательная. *Касательной* к пространственной кривой в точке M на кривой называется *предельное положение секущей* через данную точку M и точку кривой M_1 при $M_1 \to M$.

Касательная в точке $M(t)$ на кривой определяется направляющим вектором

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \dot{\bar{r}} = \bar{i}\dot{x}(t) + \bar{j}\dot{y}(t) + \bar{k}\dot{z}(t);$$

$$d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz,$$

который называется *касательным вектором*, направленным в положительную сторону кривой.

Модуль касательного вектора

$$|\dot{\bar{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad |d\bar{r}| = ds.$$

Единичный вектор касательной (орт)

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}' = \bar{i}x' + \bar{j}y' + \bar{k}z'.$$

Направляющие косинусы касательной

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{|\dot{\bar{r}}|} = x'; \quad \cos\beta = \frac{\dot{y}}{|\dot{\bar{r}}|} = y';$$

$$\cos\gamma = \frac{\dot{z}}{|\dot{\bar{r}}|} = z',$$

где α, β, γ — углы $\dot{\bar{r}}$ с осями координат.

При неявном задании кривой (15) координаты касательного вектора

$$dx = \lambda D_1; \quad dy = \lambda D_2; \quad dz = \lambda D_3,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ \Phi_z & \Phi_x \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{vmatrix},$$

где λ — произвольная функция x, y, z, F_x, Φ_x и т. д. — частные производные функции (15).

Нормальная плоскость к кривой в точке M есть плоскость, перпендикулярная к касательной в этой точке. Все прямые, перпендикулярные к касательной и проходящие через точку M, называются *нормалями кривой* и лежат в нормальной плоскости.

Главная нормаль и кривизна кривой. Производная от орта касательной по дуге

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{r}'' = \bar{i}\,x + \bar{j}y'' + \bar{k}z''$$

называется *вектором главной нормали* (или вектором кривизны) и определяет прямую *главную нормаль* кривой, проходящую через данную точку M. Главная нормаль лежит в нормальной плоскости ($\bar{\tau}' \perp \bar{\tau}$).

Орт главной нормали обозначается $\bar{\nu}$:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = K\bar{\nu},$$

где скаляр $K = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|$ называется *кривизной кривой* в точке M.

Кривизна в точке M

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

где φ — угол смежности двух касательных к кривой в точках M и M_1 (угол между касательными); Δs — длина дуги кривой MM_1.

Кривизна характеризует отклонение кривой от прямой.

Радиус кривизны:

$$\rho = \frac{1}{K}.$$

Орт главной нормали:

$$\bar{\nu} = \rho\bar{\tau}' = \rho\,(\bar{i}x'' + \bar{j}y'' + \bar{k}z'').$$

Спрямляющая плоскость кривой в точке M—плоскость, перпендикулярная к главной нормали.

Соприкасающаяся плоскость. *Соприкасающейся плоскостью* в точке M на кривой называется предельное положение плоскости, проходящей через три точки на кривой M, M_1, M_2, когда $M_1 \to M$, $M_2 \to M$.

Соприкасающаяся плоскость — предельная для плоскости, проходящей через касательную в точке M и соседнюю точку M_1 при $M_1 \to M$. Соприкасающаяся плоскость проходит через касательную и главную нормаль.

Бинормалью кривой в точке M называется прямая, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости в этой точке.

Орт бинормали:

$$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}. \qquad (16)$$

Сопровождающий трехгранник. Три взаимно перпендикулярные прямые — касательная, главная нормаль и бинормаль в точке M на кривой — называются *главными направлениями* в этой точке.

Три орта этих направлений $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ образуют правую тройку векторов (как три координатных орта $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) и связаны равенством (16).

Направляющие косинусы главных направлений суть координаты ортов $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$.

Три плоскости, соответственно перпендикулярные к $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ — нормальная, спрямляющая и соприкасающаяся,— образуют в каждой точке кривой (не особой) трехгранник (триэдр), называемый *сопровождающим*, *основным*, *подвижным*, *естественным* трехгранником *Френе*. О его движении см. стр. 292.

Кручение пространственной кривой. *Вектором кручения*, имеющим направление главной нормали (в ту или другую из ее сторон), называется *вектор*

$$\bar{T} = \frac{d\bar{\beta}}{ds} = -T\bar{\nu}.$$

Скаляр T, являющийся относительным числом, называется *кручением кривой* в точке M и по абсолютной величине есть

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{\Delta s} = \left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right| = |T|,$$

где ψ — угол смежности двух бинормалей (или двух соприкасающихся плоскостей) в точках M и M_1 кривой; $\Delta s = \smile MM_1$.

Для плоской кривой $T = 0$; $\bar{\beta}$ сохраняет постоянное направление; соприкасающаяся плоскость — плоскость самой кривой.

Если $T \neq 0$, то чем больше абсолютная величина кручения, тем быстрее отклоняется кривая от соприкасающейся плоскости.

Радиусом кручения называется величина $\frac{1}{T}$.

Таблица А

Основные формулы и уравнения, выраженные через производные по дуге s

Векторные формулы	Координатные формулы
$ds = \lvert d\bar{r} \rvert$	$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$
$\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{r}}{ds}$	$\bar{\tau} = \bar{i}x' + \bar{j}y' + \bar{k}z'$
$K = \left\lvert \dfrac{d\bar{\tau}}{ds} \right\rvert$	$K = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$
$\bar{\nu} = \dfrac{1}{K} \cdot \dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$	$\bar{\nu} = \dfrac{1}{K}(\bar{i}x'' + \bar{j}y'' + \bar{k}z'')$
$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$	$\bar{\beta} = \dfrac{1}{K}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$
$T = \bar{\nu}\dfrac{d\bar{\beta}}{ds} = \dfrac{1}{K^2}\left(\bar{\tau}\dfrac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \dfrac{d^2\tau}{ds^2}\right)$	$T = \dfrac{1}{K^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$

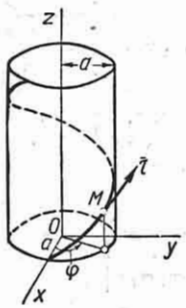
Продолжение табл. А

Элементы трехгранника	Векторные уравнения	Координатные уравнения
Касательная	$\bar{R} = \bar{r} + u\bar{r}'$	$\dfrac{X-x}{x'} = \dfrac{Y-y}{y'} = \dfrac{Z-z}{z'}$
Нормальная плоскость	$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{r}' = 0$	$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$
Главная нормаль	$\bar{R} = \bar{r} + u\bar{r}''$	$\dfrac{X-x}{x''} = \dfrac{Y-y}{y''} = \dfrac{Z-z}{z''}$
Спрямляющая плоскость	$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{r}'' = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$
Соприкасающаяся плоскость	$(\bar{R} - \bar{r})\,\bar{r}'\bar{r}'' = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$
Бинормаль	$\bar{R} = \bar{r} + u(\bar{r}' \times \bar{r}'')$	$\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$

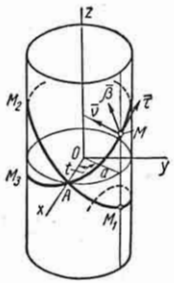
Здесь $\bar{r}$, x, y, z — радиус-вектор и координаты точки M на кривой; $\bar{R}$, X, Y, Z — текущий радиус-вектор и текущие координаты прямой или плоскости; u — скалярный параметр текущей точки.

Винтовая линия. *Обыкновенной или цилиндрической винтовой линией* называется траектория точки M, участвующей одновременно в двух движениях: во вращательном вокруг оси z и в поступательном параллельно этой оси с постоянными скоростями.

Обозначим расстояние от точки M до Oz через a, угловую скорость — через ω, скорость в поступательном движении через v; для угла поворота φ во вращательном движении точки M за время t имеем $\varphi = \omega t$; поступательное



Фиг. 69. Винтовая линия.



Фиг. 70. Правая и левая винтовые линии.

перемещение за то же время $z = vt$ или $z = h\varphi$, где $h = \frac{v}{\omega}$. Если к уравнениям $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ траектории точки M во вращательном движении присоединить уравнение $z = h\varphi$, то получим параметрические уравнения искомой траектории (фиг. 69).

Геометрический смысл h (*приведенный шаг, параметр винта*) есть перемещение точки M параллельно Oz при повороте на 1 радиан.

Полный шаг $H = 2\pi h$ есть перемещение $\| Oz$ при одном обороте вокруг Oz.

Винтом называется совокупность двух коллинеарных векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{v}$. Вектор угловой скорости лежит на оси винта Oz.

Проекция винтовой линии на xOy есть окружность $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, называемая далее основной окружностью; проекция на yOz: $y = a\sin\varphi$, $z = h\varphi$ есть синусоида, так как исключением φ получается $y = a\sin\frac{z}{h}$. Проекция на xOz есть косинусоида.

Если исключить $\varphi = \frac{z}{h}$ из системы

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

то получаем винтовую линию как пересечение двух поверхностей: $x^2 + y^2 = a^2$; $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{h}$ — круглого цилиндра и прямого геликоида (коноида). В дальнейшем положено $\omega = 1$.

Параметрические уравнения

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ht$$

определяют правую винтовую линию при $h > 0$ и левую винтовую линию при $h < 0$. На фиг. 70 для правой винтовой линии при $t > 0$ ветвь AM лежит над xy, при $t < 0$ ветвь M_3A — под xy; для левой винтовой линии при $t > 0$ ветвь AM_1 лежит под xy, при $t < 0$ ветвь M_2A — над xy.

В дальнейшем вычисления сделаны для правой винтовой линии, записанной векторным уравнением

$$\bar{r} = \bar{i}\,a\cos t + \bar{j}\,a\sin t + \bar{k}ht.$$

$$d\bar{r} = [\bar{i}(-a\sin t) + \bar{j}\,a\cos t + \bar{k}h]\,dt;$$

$$ds = |d\bar{r}| = \sqrt{a^2 + h^2}\,dt;$$

$$\bar{\tau} = d\bar{r} : ds =$$

$$= \frac{\bar{i}(-a\sin t) + \bar{j}a\cos t + \bar{k}h}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \bar{r}';$$

$$d\bar{\tau} = \frac{\bar{i}(-a\cos t) + \bar{j}(-a\sin t)}{\sqrt{a^2 + h^2}}\,dt;$$

$$d\bar{\tau} : ds = \frac{-\bar{i}\,a\cos t - \bar{j}\,a\sin t}{a^2 + h^2} = \bar{r}'';$$

$$d(\bar{r}'') = \frac{\bar{i}a\sin t - \bar{j}a\cos t}{a^2 + h^2}\,dt;$$

$$d(\bar{r}'') : ds = \frac{\bar{i}a\sin t - \bar{j}\,a\cos t}{(a^2 + h^2)^{3/2}} = \bar{r}''';$$

$$K = \left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \frac{a}{a^2 + h^2};\quad \rho = \frac{a^2 + h^2}{a};$$

$$\bar{\nu} = \rho\bar{r}'' = -\bar{i}\cos t - \bar{j}\sin t;$$

$$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu} = \frac{\bar{i}h\sin t - \bar{j}h\cos t + \bar{k}a}{\sqrt{a^2+h^2}};$$

$$T = \rho^2(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}''') = \frac{h}{a^2+h^2}.$$

Уравнения элементов трехгранника в точке $M(t)$ кривой:

касательной

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z - ht}{h};$$

нормальной плоскости

$$Xa\sin t - Ya\cos t - hZ + h^2t = 0;$$

главной нормали

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t} = \frac{Z - ht}{0};$$

спрямляющей плоскости

$$X\cos t + Y\sin t - a = 0;$$

соприкасающейся плоскости

$$X\sin t - Y\cos t + \frac{a}{h}Z - at = 0;$$

бинормали

$$\frac{X - a\cos t}{h\sin t} = \frac{Y - a\sin t}{-h\cos t} = \frac{Z - ht}{a}.$$

Свойства винтовой линии. Длина дуги винтовой линии, отсчитываемой от точки A ($t = 0$) (фиг. 70)

$$s = \sqrt{a^2+h^2}\,t;$$

для того же t дуга σ окружности — проекции винтовой линии на xOy: $\sigma = at$; s пропорциональна σ:

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}\,\sigma.$$

Уравнения винтовой линии с параметром s:

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}},\quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

$$z = \frac{hs}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Направляющие косинусы:

касательной

$$\left\{\frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}},\ \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}},\ \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\};$$

главной нормали

$$\{-\cos t,\ -\sin t,\ 0\};$$

бинормали

$$\left\{\frac{h\sin t}{\sqrt{a^2+h^2}};\ \frac{-h\cos}{\sqrt{a^2+h^2}};\ \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\}.$$

Касательная образует с осью винта постоянный угол γ, для которого

$$\cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}},$$

или иначе — винтовая линия пересекает образующие цилиндра, на котором она лежит, под постоянным углом γ.

Угол $90° - \gamma = \theta$ между винтовой линией и основной окружностью или между касательными к ним, называемый углом подъема винтовой линии, определяется из формул

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}};\quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}};$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{h}{a}.$$

Отношение полного шага H к длине основной окружности есть $\operatorname{tg}\theta$:

$$\frac{H}{2\pi a} = \frac{h}{a}.$$

Проекция главной нормали на xOy:

$$Y = X\operatorname{tg} t.$$

Главная нормаль во всякой точке M пересекает ось винта и перпендикулярна ей. Главная нормаль совпадает с нормалью к цилиндрической поверхности. Винтовая линия — геодезическая на цилиндре.

Бинормаль образует постоянный угол Φ с осью винта, равный углу подъема винтовой линии:

$$\cos\Phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}};\quad \operatorname{tg}\Phi = \frac{h}{a}.$$

Всякая прямая, находящаяся на кратчайшем расстоянии r от оси винта и образующая с осью винта угол Φ, определяемый равенством

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{h}{r},$$

называется *лучом винта*. Бинормали всех винтовых линий данного винта суть лучи винта; они образуют комплекс (∞^3) лучей.

Во всякой точке винтовой линии кривизна и кручение постоянны. Пра-

вая винтовая линия имеет положительное кручение, для левой винтовой линии кручение отрицательное:

$$T = -\frac{h}{a^2 + h^2}.$$

Выражение кривизны и кручения через угол θ:

$$K = \frac{\cos^2\theta}{a}; \quad T = \frac{\cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{a} = \frac{\sin 2\theta}{2a}.$$

Таблица В

Основные формулы и уравнения кривой (13), (14) с произвольным параметром t

Векторные формулы	Координатные формулы
$d\bar{r} = \dot{\bar{r}}\,dt$	$\dot{\bar{r}} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}$
$ds = \lvert d\bar{r}\rvert = \sqrt{\dot{\bar{r}}^2}\,dt = \lvert\dot{\bar{r}}\rvert\,dt$	$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
$\dot{s} = \sqrt{\dot{\bar{r}}^2}$	$\bar{\tau} = \dfrac{\bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z}}{\dot{s}}$
$\bar{\tau} = d\bar{r} : ds = \dfrac{\dot{\bar{r}}}{\dot{s}}$	$\ddot{\bar{r}} = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k}\ddot{z}$ $\dot{s}\ddot{s} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}$
$\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} = K\dot{s}^3\bar{\beta}$	$\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}$
$\lvert\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\rvert = K\dot{s}^3$	$\lvert\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\rvert = \sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2} = A$
$K = \dfrac{\sqrt{\dot{\bar{r}}^2 \ddot{\bar{r}}^2 - (\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}})^2}}{\dot{\bar{r}}^3}$	$K = \dfrac{A}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}$
$\bar{\beta} = \dfrac{\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}}{\lvert\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\rvert}$	$\bar{\beta} = \dfrac{1}{A}\left[\bar{i}\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} + \bar{j}\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}\right]$
$\bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau} = \dfrac{\dot{\bar{r}}^2 \ddot{\bar{r}} - (\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}})\dot{\bar{r}}}{\lvert\dot{\bar{r}}\rvert\,\lvert\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}\rvert}$	$\bar{\nu} = \dfrac{1}{A}\left[\bar{i}\begin{vmatrix} \dot{s} & \dot{x} \\ \ddot{s} & \ddot{x} \end{vmatrix} + \bar{j}\begin{vmatrix} \dot{s} & \dot{y} \\ \ddot{s} & \ddot{y} \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} \dot{s} & \dot{z} \\ \ddot{s} & \ddot{z} \end{vmatrix}\right]$
$T = \dfrac{\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}}{(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})^2}$	$T = \dfrac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}$

Замечание. Иногда лучше вычислять $\bar{\nu}$ по схеме табл. А, причем потребуется $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds} = \dfrac{\dot{\bar{r}}^2 \ddot{\bar{r}} - (\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}})\dot{\bar{r}}}{\dot{\bar{r}}^4}$.

Продолжение табл. *B*

Элементы трехгранника	Векторные уравнения	Координатные уравнения
Касательная	$\overline{R}=\overline{r}+u\dot{\overline{r}}$	$\frac{X-x}{\dot{x}}=\frac{Y-y}{\dot{y}}=\frac{Z-z}{\dot{z}}$
Нормальная плоскость	$(\overline{R}-\overline{r})\,\dot{\overline{r}}=0$	$(X-x)\,\dot{x}+(Y-y)\,\dot{y}+(Z-z)\,\dot{z}=0$
Главная нормаль	$\overline{R}=\overline{r}+u\overline{r}\times(\dot{\overline{r}}\times\ddot{\overline{r}})$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{x}\\ \ddot{s}&\ddot{x}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{y}\\ \ddot{s}&\ddot{y}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{z}\\ \ddot{s}&\ddot{z}\end{vmatrix}}$
Спрямляющая плоскость	$(\overline{R}-\overline{r})\,\dot{\overline{r}}\,(\dot{\overline{r}}\times\ddot{\overline{r}})=0$	$(X-x)\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{x}\\ \ddot{s}&\ddot{x}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{y}\\ \ddot{s}&\ddot{y}\end{vmatrix}+$ $+(Z-z)\begin{vmatrix}\dot{s}&\dot{z}\\ \ddot{s}&\ddot{z}\end{vmatrix}=0$
Соприкасающаяся плоскость	$(\overline{R}-\overline{r})\,\dot{\overline{r}}\,\ddot{\overline{r}}=0$	$\begin{vmatrix}X-x&Y-y&Z-z\\ \dot{x}&\dot{y}&\dot{z}\\ \ddot{x}&\ddot{y}&\ddot{z}\end{vmatrix}=0$
Бинормаль	$\overline{R}=\overline{r}+u\,(\dot{\overline{r}}\times\ddot{\overline{r}})$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\dot{y}&\dot{z}\\ \ddot{y}&\ddot{z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\dot{z}&\dot{x}\\ \ddot{z}&\ddot{x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\dot{x}&\dot{y}\\ \ddot{x}&\ddot{y}\end{vmatrix}}$

Смысл $\overline{r}$, x, y, z, $\overline{R}$, X, Y, Z, u см. на стр. 285, табл. А.

Общие винтовые линии (линии откоса) — кривые, касательные к которым образуют постоянный угол с заданным направлением. Они лежат на цилиндре с образующими, параллельными данному направлению, и пересекают их под постоянным углом. Главная нормаль общей винтовой линии совпадает с нормалью к цилиндрической поверхности.

Во всякой точке общей винтовой линии $K:T=\text{const}$. Эволюты (пространственные) всякой плоской кривой—общие винтовые линии

Пример. Цилиндро-коническая винтовая линия

$$x=ae^{mt}\cos t,$$

$$y=ae^{mt}\sin t,\quad z=be^{mt}$$

лежит на конусе

$$x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\beta,$$

пересекает его образующие под постоянным углом и проектируется на плоскость в логарифмическую спираль

$$r=ae^{mt},\quad a=b\operatorname{tg}\beta.$$

Найти все ее элементы.

Составляем производные по t:

$$\dot{x}=ae^{mt}(m\cos t-\sin t);$$

$$\dot{y}=ae^{mt}(m\sin t+\cos t);$$

$$\dot{z}=bme^{mt};$$

$$\ddot{x}=ae^{mt}(m^2\cos t-2m\sin t-\cos t);$$

$$\ddot{y}=ae^{mt}(m^2\sin t+2m\cos t-\sin t);$$

$$\ddot{z}=bm^2e^{mt};$$

$$\dddot{x}=ae^{mt}(m^3\cos t-3m^2\sin t-3m\cos t+\sin t);$$

$$\dddot{y}=ae^{mt}(m^3\sin t+3m^2\cos t-3m\sin t-\cos t);$$

$$\dddot{z}=bm^3e^{mt};$$

$$\dot{s}=ce^{mt},$$

где

$$c=\sqrt{a^2+m^2(a^2+b^2)};$$

$$\overline{\tau}=\frac{a(m\cos t-\sin t)}{c}\,\overline{i}+$$

$$+\frac{a(m\sin t+\cos t)}{c}\,\overline{j}+\frac{bm}{c}\,\overline{k}.$$

Здесь проще сначала искать $d\bar{\tau}$:

$$d\bar{\tau} = \left[\bar{i}\,\frac{a(-m\sin t-\cos t)}{c} + \bar{j}\,\frac{(m\cos t-\sin t)}{c}\right]dt$$

и затем

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{i}\,\frac{a(-m\sin t-\cos t)}{c^2e^{mt}} + \bar{j}\,\frac{a(m\cos t-\sin t)}{c^2e^{mt}};$$

$$K = \left|\frac{d\bar{\tau}}{as}\right| = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{c^2e^{mt}};\quad \rho = \frac{c^2e^{mt}}{a\sqrt{m^2+1}};$$

$$\bar{\nu} = \rho\,\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\times$$

$$\times[-\bar{i}(m\sin t+\cos t)+\bar{j}(m\cos t-\sin t)].$$

Иногда проще сначала искать $\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}$, что, впрочем, полезно сейчас сделать

$$\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}} = e^{2mt}\begin{vmatrix} & & \bar{k}\\ a(m\cos t-\sin t) & & bm\\ a(m^2\cos t-2m\sin t-\cos t) & & bm^2\end{vmatrix}$$

и, вычитая из третьей строки вторую строку с предварительным умножением на m, получаем

$$\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}} = e^{2mt}[-\bar{i}\,abm(m\cos t-\sin t) - \bar{j}\,abm(m\sin t+\cos t)+\bar{k}\,a^2(m^2+1)];$$

$$|\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}| = ac\sqrt{m^2+1}\;e^{2mt} = K\dot{s}^3;$$

$$\bar{\beta} = \frac{\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}}{K\dot{s}^3} = \frac{-\bar{i}\,bm(m\cos t-\sin t)}{c\sqrt{m^2+1}} - \bar{j}\,\frac{bm(m\sin t+\cos t)}{c\sqrt{m^2+1}} + \bar{k}\,\frac{a\sqrt{m^2+1}}{c}.$$

При вычислении определителя $\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}}$ следует сделать такие же упрощения, как выше, и получается

$$\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}} = a^2bm(m^2+1)e^{3mt};$$

$$T = \frac{\rho^2(\dot{\bar{r}}\,\ddot{\bar{r}}\,\dddot{\bar{r}})}{(\dot{s}^2)^3} = \frac{bm}{c^2e^{mt}}.$$

Третья координата $\bar{\tau}$ постоянная, поэтому данная кривая имеет постоянный угол γ с Oz, следовательно, эта кривая — общая винтовая линия, она пересекает все образующие цилиндра, основанием которого является логарифмическая спираль, а образующие $\parallel Oz$, под тем же постоянным углом γ,

$$\cos\gamma = \frac{bm}{c};\quad \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta\,\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}.$$

Кривая пересекает образующие конуса под углом ψ, для которого

$$\cos\psi = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Отношение

$$K:T = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{bm} = \operatorname{tg}\gamma = \text{const}.$$

Основные формулы и уравнения кривой, заданной неявными уравнениями [15]

$$dx = \lambda D_1,\quad dy = \lambda D_2,\quad dz = \lambda D_3$$

(см. стр. 283);

$$ds = \lambda\sqrt{D_1^2+D_2^2+D_3^2} = \lambda A;$$

$$d\bar{r} = \lambda(\bar{i}D_1+\bar{j}D_2+\bar{k}D_3);$$

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{1}{A}[\bar{i}\,D_1+\bar{j}D_2+\bar{k}D_3].$$

$$\begin{vmatrix} & \bar{j} & \bar{k}\\ a(m\sin t+\cos t) & & bm\\ a(m^2\sin t+2m\cos t-\sin t) & & bm^2\end{vmatrix}$$

Далее бывает удобно, чтобы использовать табл. A, искать производные по дуге и выражать их через дифференциалы:

$$\bar{r}' = \bar{\tau} = d\bar{r}:ds;$$

$$\bar{r}'' = d\bar{\tau}:ds = \frac{d^2\bar{r}\,ds - d\bar{r}\,d^2s}{ds^3};$$

$$\bar{r}''' = d\left(\frac{d\tau}{ds}\right):ds.$$

Но бывает удобнее выразить искомые величины только через дифференциалы x, y, z и s:

$$d^2x = \lambda dD_1 + D_1d\lambda;\quad d^3x = d(d^2x);$$

$$d^2y = \lambda dD_2 + D_2d\lambda;\quad d^3y = d(d^2y);$$

$$d^2z = \lambda dD_3 + D_3d\lambda;\quad d^3z = d(d^2z).$$

$$d^2s = \lambda dA + Ad\lambda;$$

В дальнейшем обозначено:

$$B = \sqrt{\begin{vmatrix} dy & dz\\ d^2y & d^2z\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dz & dx\\ d^2z & d^2x\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}^2} = ds\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2};$$

$$K = \frac{B}{ds^3} = \frac{1}{\rho};$$

$$\bar{\nu} = \rho \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{B}\,[\bar{i}\,(d^2x\,ds - dx\,d^2s) + \bar{j}\,(d^2y\,ds - dy\,d^2s) + \bar{k}\,(d^2z\,ds - dz\,d^2s)];$$

$$\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu} = \frac{\rho}{ds^3}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix};$$

$$T = \frac{\rho^2}{ds^6}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

Уравнения:

касательной и нормальной плоскости — см. стр. 285, 283;

главной нормали

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} ds & dx \\ d^2s & d^2x \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} ds & dy \\ d^2s & d^2y \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} ds & dz \\ d^2s & d^2z \end{vmatrix}};$$

спрямляющей плоскости

$$(X-x)\begin{vmatrix} ds & dx \\ d^2s & d^2x \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} ds & dy \\ d^2s & d^2y \end{vmatrix} + (Z-z)\begin{vmatrix} ds & dz \\ d^2s & d^2z \end{vmatrix} = 0;$$

соприкасающейся плоскости

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0;$$

бинормали

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}.$$

Пример. В точке $(a,\ a,\ a\sqrt{2})$ линии

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2,\quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

найти главные направления, кривизну и кручение. Дифференцирование уравнений приводит к линейной однородной относительно dx, dy, dz системе уравнений:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0;$$
$$(x-a)\,dx + y\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} y & z \\ y & 0 \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} z & x \\ 0 & x-a \end{vmatrix}} = \frac{dz}{\begin{vmatrix} x & y \\ x-a & y \end{vmatrix}},$$

или

$$dx = -kyz;\ dy = kz\,(x-a);\ dz = kay;$$
$$ds = k\sqrt{y^2z^2 + z^2(x-a)^2 + a^2y^2} = ka\sqrt{4a^2 - x^2},$$

где коэффициент пропорциональности k — неизвестная функция от x, y, z.

Если обозначить:

$$dx = k\alpha,\ dy = k\beta,\ dz = k\gamma,\ ds = k\delta,$$

где

$$\alpha = -yz,\ \beta = z\,(x-a),\ \gamma = ay,\ \delta = a\sqrt{4a^2 - x^2},$$

то:

$$d^2x = kd\alpha + \alpha dk;\quad d^3x = kd^2\alpha + 2d\alpha dk + \alpha d^2k;$$
$$d^2y = kd\beta + \beta dk;\quad d^3y = kd^2\beta + 2d\beta dk + \beta d^2k;$$
$$d^2z = kd\gamma + \gamma dk;\quad d^3z = kd^2\gamma + 2d\gamma dk + \gamma d^2k;$$
$$d^2s = kd\delta + \delta dk;$$

или

$$d^2s = ak\frac{-x\,dx}{\sqrt{4a^2 - x^2}} + a\sqrt{4a^2 - x^2}\,dk.$$

Находим вектор

$$\bar{\tau}\left\{\frac{-yz}{a\sqrt{4a^2 - x^2}},\ \frac{z(x-a)}{a\sqrt{4a^2 - x^2}},\ \frac{y}{\sqrt{4a^2 - x^2}}\right\}.$$

Уравнения касательной в данной точке

$$\frac{X-a}{-\sqrt{2}} = \frac{Y-a}{0} = \frac{Z-a\sqrt{2}}{1}.$$

Вычисляем

$$l = \begin{vmatrix} ay & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ kd\beta + \beta dk & kd\gamma + \gamma dk \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ d\beta & d\gamma \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$m = \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ d\gamma & d\alpha \end{vmatrix};$$
$$n = \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ d\alpha & d\beta \end{vmatrix}.$$

Далее находим:

$$d\alpha = -y\,dz - z\,dy = -k\,[ay^2 + z^2\ (x-a)];$$
$$d\beta = z\,dx + (x-a)\,dz = k\,[-yz^2 + (x-a)\ ay];$$
$$d\gamma = a\,dy = kaz\,(x-a).$$

При $x = a$, $y = a$, $z = a\sqrt{2}$ получаем:

$$\alpha = -\sqrt{2}\ a^2;\quad \beta = 0;\quad \gamma = a^2;$$
$$d\alpha = -ka^3;\quad d\beta = -k2a^3;\quad d\gamma = 0;$$
$$l = k^2a^5;\quad m = -k^2a^5;\quad n = k^2 2\sqrt{2}\ a^5.$$

Уравнение бинормали

$$\frac{X-a}{2} = \frac{Y-a}{-1} = \frac{Z-a\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Вычисляем

$$l_1 = \begin{vmatrix} d^2x & d^2s \\ dx & ds \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} kd\alpha + \alpha dk & kd\delta + \delta dk \\ \alpha & \delta \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} d\alpha & d\delta \\ \alpha & \delta \end{vmatrix};$$

$$m_1 = \begin{vmatrix} d^2y & d^2s \\ dy & ds \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} d\beta & d\delta \\ \beta & \delta \end{vmatrix};$$

$$n_1 = \begin{vmatrix} d^2z & d^2s \\ dz & ds \end{vmatrix} = k^2\begin{vmatrix} d\gamma & d\delta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix};$$

$$d\delta = a\frac{-x\,dx}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = -\frac{ax\,k\alpha}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

При $x=a,\ y=a,\ z=a\sqrt{2}$ получаем

$$\delta = a^2\sqrt{3}\quad d\delta = k\sqrt{\frac{2}{3}}\,a^3;$$

$$l_1 = -\frac{k^3a^5}{\sqrt{3}};\quad m_1 = -k^3 2\sqrt{3}\,a^5;$$

$$n_1 = -k^3\sqrt{\frac{2}{3}}\,a^5.$$

Уравнения главной нормали

$$\frac{X-a}{1} = \frac{Y-a}{6} = \frac{Z-a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Кривизна

$$K = \frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{ds^3} = \frac{k^3a^5\sqrt{13}}{k^3a^6 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{3}\,a}.$$

Имеем далее

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ d^2\alpha & d^2\beta & d^2\gamma \end{vmatrix}$$

и вычисляем

$$d^2\alpha = -[ay^3 + z^2(x-a)]\,dk - k\,[2ay\,dy + 2z(x-a)\,dz + z^2dx];$$

$$d^2\beta = [-yz^2 + ay(x-a)]\,dk + k\,[-z^2dy - 2yz\,dz + a(x-a)\,dy + ay\,dx];$$

$$d^2\gamma = az(x-a)\,dk + ka\,[(x-a)\,dz + z\,dx].$$

При $x=a,\ y=a,\ z=a\sqrt{2}$ получаем

$$d^2\alpha = -a^3dk + 2\sqrt{2}\,a^4k^2;$$

$$d^2\beta = -2a^3dk - 3\sqrt{2}\,a^4k^2;$$

$$d^2\gamma = -2a^4k^2.$$

В точке $M(a, a, a\sqrt{2})$ Δ имеет значение

$$\Delta = k^6 \begin{vmatrix} -a^2\sqrt{2} & 0 & a^2 \\ -a^3 & -2a^3 & 0 \\ 2\sqrt{2}\,a^4 & -3\sqrt{2}\,a^4 & -2a^4 \end{vmatrix} = k^6a^9\,3\sqrt{2}.$$

Кручение в данной точке

$$T = \frac{\rho^2}{ds^6}\,\Delta = \frac{3\sqrt{2}}{13a}.$$

Производные ортов главных направлений (формулы Френе)

$$\frac{d\bar\tau}{ds} = K\bar\nu;\quad \frac{d\bar\nu}{ds} = -K\bar\tau + T\bar\beta;$$

$$\frac{d\bar\beta}{ds} = -T\bar\nu$$

При перемещении точки M по кривой можно считать движение сопровождающего в точке M трехгранника происходящим с постоянной (по модулю) скоростью, равной единице (путь s будет численно равняться времени). Предыдущие формулы представляют уравнения движения трехгранника. Трехгранник движется с поступательной скоростью $\bar\tau$ (скорость его вершины M) и со скоростью вращения $\bar\Omega$.

Вектор скорости вращения трехгранника

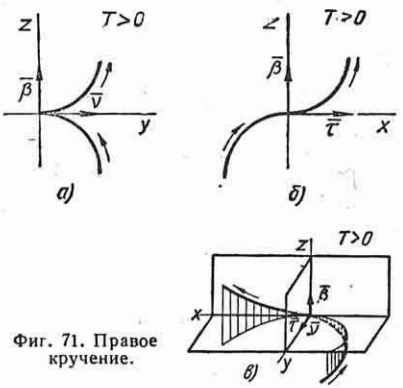
$$\bar\Omega = K\bar\beta + T\bar\tau$$

определяет мгновенную ось вращения и численно (по модулю) равен угловой скорости вращения трехгранника (вектор Дарбу). Производные ортов $\bar\tau$, $\bar\nu$, $\bar\beta$ выражаются через $\bar\Omega$:

$$\frac{d\bar\tau}{ds} = \bar\Omega\times\bar\tau,\qquad \frac{d\bar\nu}{ds} = \bar\Omega\times\bar\nu;$$

$$\frac{d\bar\beta}{ds} = \bar\Omega\times\bar\beta.$$

Расположение кривой вблизи данной точки. Если данная точка M взята за начало координат, направления осей



Фиг. 71. Правое кручение.

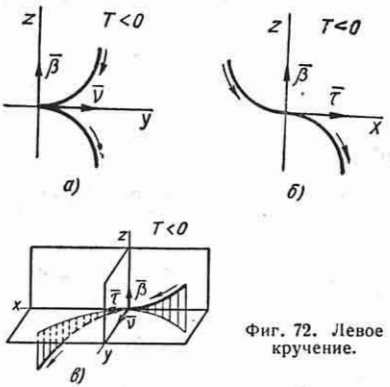
координат взяты по $\bar\tau$, $\bar\nu$, $\bar\beta$ в этой точке, то координаты x, y, z близкой точки M_1 кривой имеют вид

$$x = \Delta s - \frac{1}{6}K^2(\Delta s)^3 - \frac{1}{8}KK'(\Delta s)^4 + \ldots;$$

$$y = \frac{1}{2}K(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}K'(\Delta s)^3 + \frac{1}{24}(K'' - K^3 - KT^2)(\Delta s)^4 + \ldots;$$

$$z = \frac{1}{6}KT(\Delta s)^3 + \frac{1}{24}(KT' + 2K'T)(\Delta s)^4 + \ldots,$$

где Δs — длина дуги MM_1; K, T взяты в точке M. Проекции пространственной кривой на плоскости сопровождающего трехгранника имеют вид, показанный на фиг. 71, *а — в* для случая $T > 0$ и показанный на фиг. 72, *а — в*, для $T < 0$.



Фиг. 72. Левое кручение.

Если в данной точке $T > 0$, то кривая имеет форму правого винта, а если $T < 0$ — форму левого винта (см. фиг. 70).

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Уравнение поверхности. Поверхность может быть задана:

1) явным уравнением

$$z = f(x, y) \tag{17}$$

в той области изменения x, y, где $f(x, y)$ и ее частные производные 1-го порядка $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ — непрерывны; геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (17), называется *простым куском поверхности*;

2) неявным уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \tag{18}$$

определяющим геометрическое место точек и такое, что в окрестности каждой из этих точек имеется простой кусок поверхности; каждая такая точка называется *обыкновенной точкой*. Это геометрическое место точек называется *регулярным куском* поверхности. Последний существует, если функция $F(x, y, z)$ и ее частные производные первого порядка F_x, F_y, F_z в некоторой области пространства непрерывны и F_x, F_y, F_z одновременно в нуль не обращаются.

В особой точке (x_0, y_0, z_0) одновременно удовлетворяются уравнения

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0,\ F_x = F_y = F_z = 0;$$

3) *поверхностью в параметрическом представлении*, заданной тремя функциями

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v) \tag{19}$$

или векторной функцией

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \bar{i}x(u, v) + \bar{j}y(u, v) + \bar{k}z(u, v), \tag{20}$$

называется геометрическое место точек, образуемых концом радиуса-вектора $\bar{r}$, когда параметры u, v пробегают область своего изменения D и когда в окрестности каждой точки (u_0, v_0) области D точки (x, y, z), определяемые формулой (19) или (20), образуют простой кусок поверхности. Точка (x_0, y_0, z_0), соответствующая точке (u_0, v_0) из D, называется *обыкновенной точкой* поверхности.

Поверхность существует, если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ и их частные производные первого порядка в области D непрерывны и в каждой области ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \tag{21}$$

равен двум. Здесь $x_u = \dfrac{\partial x(u, v)}{\partial u}$ и т. д.

Из трех уравнений (19) исключением u, v получается одно уравнение $F(x, y, z) = 0$, определяющее регулярный кусок поверхности.

При $u = c_1 = \text{const}$ уравнение $\bar{r} = \bar{r}(c_1, v)$ определяет линию на поверхности. При $v = c_2 = \text{const}$ $\bar{r} = \bar{r}(u, c_2)$ определяет другую линию на поверхности.

Каждой паре значений (u, v) из области D однозначно соответствует точка (x, y, z) поверхности, и обратно.

Параметры u, v называются *криволинейными координатами* точки на поверхности. Два семейства линий $u = c_1$, $v = c_2$ образуют сеть (правильную) координатных линий.

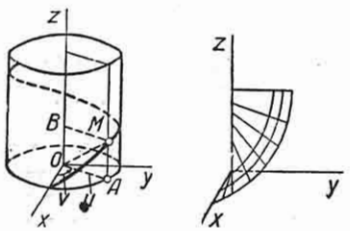
Точка, в окрестности которой поверхность не представляет простого куска поверхности, называется *особой точкой*. Необходимым условием, чтобы точка

поверхности (19) или (20) была особой, является обращение в нуль трех определителей матрицы (21).

Пример. Уравнение прямого геликоида (винтовая поверхность) $y = x \operatorname{tg} z$ можно параметризовать, если положить

$$x = u \cos v; \quad y = u \sin v; \quad z = v.$$

При $u = c_1$ точка $M(x, y, z)$ этой поверхности опишет винтовую линию на цилиндре с радиусом u; при $v = c_2$ точка M опишет прямую BM — пересечение плоскости $z = v$ с плоскостью $y = x \operatorname{tg} v$ (фиг. 73).



Фиг. 73. Прямой геликоид (коноид).

Линию на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ можно задать присоединением к уравнениям поверхности уравнения $\varphi(u, v) = 0$ или системы уравнений $u = u(t)$, $v = v(t)$, причем функции непрерывны и имеют непрерывные производные 1-го порядка; в этом случае уравнение линии имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}[u(t), v(t)].$$

Вектор касательной к этой линии

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv,$$

где $\bar{r}_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}$.

Линейный элемент поверхности. Дифференциал дуги линии $u = u(t)$, $v = v(t)$ на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ выражается формулой

$$ds^2 = (d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2,$$

где $du = u'(t)\,dt$; $dv = v'(t)\,dt$;

$$E = (\bar{r}_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2;$$

$$F = \bar{r}_u \bar{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$G = (\bar{r}_v)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Если $F = 0$ в каждой точке $M(u, v)$, то координатные линии $u = c_1$ и $v = c_2$ ортогональны.

Выражение $Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ называется *первой (основной) квадратичной формой* поверхности или *линейным элементом поверхности.*

Пример. Для поверхности конуса $x = \dfrac{u}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}v)$, $y = \dfrac{u}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}v)$, $z = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ имеем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}v); \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}v); \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin(\sqrt{2}v); \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos(\sqrt{2}v); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$E = 1, \quad G = u, \quad F = 0; \quad ds^2 = du^2 + u^2 dv^2.$$

Угол θ между двумя кривыми (т. е. между касательными к ним) на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ и пересекающимися в точке M вычисляется по формуле

$$\cos\theta = \frac{d\bar{r}\,\delta\bar{r}}{|d\bar{r}|\,|\delta\bar{r}|} = \frac{Edu\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + Gdv\,\delta v}{ds\,\delta s},$$

где d — знак дифференциала для 1-й линии; δ — знак дифференциала для 2-й линии.

О площади поверхности см. стр. 190

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Через всякую обыкновенную точку M поверхности проходит бесчисленное множество регулярных кривых, принадлежащих поверхности. Касательные ко всем этим кривым в точке M лежат в одной плоскости, называемой *касательной плоскостью* к поверхности в точке M. Прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в точке M. Касательная плоскость проходит через векторы $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$, касательные к линиям соответственно $v = c_2$ и $u = c_1$ в точке M.

Вектор нормали

$$\bar{N} = \bar{r}_u \times \bar{r}_v;$$

орт нормали

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{H},$$

$$H = |\bar{N}| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2};$$

$$D_1 = y_u z_v - y_v z_u; \quad D_2 = z_u x_v - z_v x_u;$$
$$D_3 = x_u y_v - x_v y_u.$$

В случае задания поверхности уравнением (17) имеем

$$\bar{n}\left\{\frac{-p}{N}, \quad \frac{-q}{N}, \quad \frac{1}{N}\right\}, \quad N = \sqrt{p^2+q^2+1},$$

$p = z_x$, $q = z_y$; вектор $\bar{n}$, лежащий на нормали, образует острый угол с осью Oz.

В случае задания поверхности уравнением (18) имеем

$$\bar{n}\left\{\frac{F_x}{N}, \quad \frac{F_y}{N}, \quad \frac{F_z}{N}\right\};$$

$$N = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Уравнения нормали

$$\frac{X - r\cos\varphi}{f'(r)\cos\varphi} = \frac{Y - r\sin\varphi}{f'(r)\sin\varphi} = \frac{Z - f(r)}{-1}.$$

Проекция нормали на плоскость xOy

$$Y = X \operatorname{tg}\varphi$$

проходит через начало координат, следовательно, сама нормаль пересекает Oz.

Кривизна поверхности. Кривизна K линии $u = u(t)$, $v = v(t)$ на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ определяется из формулы

$$K\bar{\nu} = \frac{d\bar{\tau}}{ds},$$

где $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}_u \frac{du}{ds} + \bar{r}_v \frac{dv}{ds}$ — единичный вектор касательной к линии; $\bar{\nu}$ — единичный вектор главной нормали той же линии.

Ту же кривизну K имеет плоское сечение поверхности соприкасающейся плоскостью линии.

Если C — плоское сечение поверхности в точке M, C_n — нормальное сечение плоскостью, проходящей через

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Задание поверхности (стр. 293)	Касательная плоскость	Нормаль
(17)	$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$	$\frac{X-x}{-p} = \frac{Y-y}{-q} = \frac{Z-z}{1}$
(18)	$(X - x)F_x + (Y - y)F_y + (Z - z)F_z = 0$	$\frac{X-x}{F_x} = \frac{Y-y}{F_y} = \frac{Z-z}{F_z}$
(19)	$D_1(X - x) + D_2(Y - y) + D_3(Z - z) = 0$	$\frac{X-x}{D_1} = \frac{Y-y}{D_2} = \frac{Z-z}{D_3}$
(20)	$(\bar{R} - \bar{r})\bar{N} = 0$	$\bar{R} = \bar{r} + t\bar{N}$

В таблице x, y, z, $\bar{r}$ — координаты и радиус-вектор точки M поверхности; X, Y, Z, $\bar{R}$ — текущие координаты и радиус-вектор точки касательной плоскости или нормали; все производные вычисляются в точке M.

Пример. Показать, что нормаль в точке (x, y, z) к поверхности вращения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = f(r)$ пересекает ось вращения:

$$x_r = \cos\varphi; \quad y_r = \sin\varphi; \quad z_r = f'(r);$$

$$x_\varphi = -r\sin\varphi; \quad y_\varphi = r\cos\varphi; \quad z_\varphi = 0.$$

$D_1 = -rf'(r)\cos\varphi$; $D_2 = -rf'(r)\sin\varphi$; $D_3 = r$.

$\bar{n}$ к поверхности и через $\bar{\tau}$ к C, K — кривизна C, K_n — кривизна C_n, то

$$K_n = K\cos\theta = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

где $\theta = \angle(\bar{\nu}, \bar{n})$, $\bar{\nu}$ — главная нормаль C (фиг. 74); знаменатель есть ds^2; числитель $Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = -d\bar{r}d\bar{n}$ и называется *второй квадратичной формой* поверхности; коэффициенты этой

формы определяются формулами

$$D = \frac{\bar{r}_{uu}\bar{r}_u\bar{r}_v}{H} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix};$$

$$D' = \frac{\bar{r}_{uv}\bar{r}_u\bar{r}_v}{H} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix};$$

$$D'' = \frac{\bar{r}_{vv}\bar{r}_u\bar{r}_v}{H} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix};$$

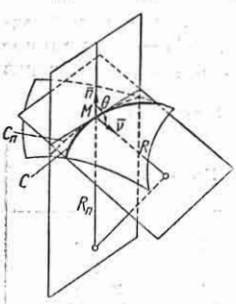
$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

В случае задания поверхности уравнением (17) вторая квадратичная форма имеет вид

$$\frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

Если $R_n = \frac{1}{K_n}$, $R = \frac{1}{K}$ — радиусы кривизны соответствующих сечений C_n и C (фиг. 74), то $R_n \cos\theta = R$ (теорема Менье). R_n берется со знаком плюс, если $\bar{n}$ направлен в сторону вогнутости кривой C_n, и минус, если $\bar{n}$ направлен в сторону выпуклости.



Фиг. 74. Нормальное сечение поверхности.

Для каждого нормального сечения C_n его кривизна

$$K_n = K_1 \cos^2\varphi + K_2 \sin^2\varphi$$

(формула Эйлера), где φ — угол между плоскостями нормальных сечений с кривизной K_n и K_1.

Величины $R_1 = \frac{1}{K_1}$, $R_2 = \frac{1}{K_2}$ — *главные радиусы кривизны*, т. е. наибольшее и наименьшее значения R_n.

Средняя кривизна поверхности в точке (u, v)

$$M = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{DG - 2D'F + D''E}{2(EG - F^2)}.$$

Полная (гауссова) кривизна поверхности в точке (u, v)

$$K = K_1K_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Главные радиусы кривизны суть корни квадратного уравнения

$$KR^2 - 2MR + 1 = 0.$$

Нормальные сечения поверхности, имеющие кривизны K_1 и K_2, называются *главными нормальными сечениями* поверхности, и направление $\frac{dv}{du}$ этих сечений (взаимно перпендикулярных) определяется из квадратного уравнения

$$(GD' - FD'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0;$$

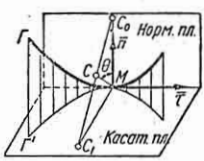
коэффициенты квадратичных форм E, F, G, D, D' D' вычисляются в данной точке (u, v) поверхности.

Классификация точек поверхности. Если в точке M (u, v) поверхности величина $DD'' - D'^2 > 0$, то точка называется *эллиптической*; R_1 и R_2 — одного знака; вблизи точки M поверхность расположена по одну сторону касательной. Если $DD'' - D'^2 < 0$, то точка называется *гиперболической*; R_1 и R_2 — разных знаков. Поверхность пересекается касательной плоскостью в точке M, и вблизи этой точки поверхность имеет вид гиперболического параболоида. Если $DD'' - D'^2 = 0$, то точка называется *параболической*. R_1 или R_2 равен ∞.

Геодезической кривизной K_g в точке M линии Γ на поверхности называется кривизна в той же точке кривой Γ', являющейся проекцией Γ на касательную плоскость поверхности в точке M. Кривизна K линии Γ, K_g и *нормальная кривизна* K_n кривой Γ (кривизна нормального сечения плоскостью, проходящей через $\bar{\tau}$ кривой Γ и через $\bar{n}$ к поверхности в точке M) связаны соотношениями (фиг. 75)

$$K_g = K\sin\theta;$$

$$K_n = K\cos\theta;$$



Фиг. 75. Центр геодезической кривизны.

радиус кривизны Γ' $MC_1 = R_g$ — радиус геодезической кривизны, $K_g = \frac{1}{R_g}$; C_1 — центр геодезической кривизны.

Геодезической линией на поверхности называется такая линия, в каждой точке которой $K_g = 0$. Вдоль геодези-

ческой линии ее главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Расстояние по геодезической линии между двумя ее достаточно близкими точками меньше расстояния между теми же точками по всякой другой кривой, проходящей через эти точки.

Если поверхность дана в форме (17), то дифференциальное уравнение геодезических линий имеет вид

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2}=pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+$$

$$+(2ps-qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(pr-2qs)\left(\frac{dy}{dx}\right)-qr.$$

Огибающая семейства поверхностей. Уравнение $F(x, y, z, t)=0$ определяет однопараметрическое семейство поверхностей; t — параметр.

Если из $F=0$ и $F_t=\dfrac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial t}=0$ исключить t, то получится уравнение поверхности, называемой *дискриминантной*. Для каждого значения t два уравнения $F=0$, $F_t=0$ определяют линию, называемую *характеристикой* той поверхности, которая выделяется из семейства при этом значении t.

Дискриминантная поверхность есть геометрическое место характеристик.

Огибающей семейства поверхностей называется дискриминантная поверхность или ее часть, касающаяся каждой своей точкой некоторой поверхности семейства. Огибающая касается поверхности семейства вдоль характеристики. На огибающей поверхности характеристики образуют семейство линий. Если это семейство линий имеет огибающую, то последняя называется *ребром возврата* семейства поверхностей или огибающей; ребро возврата определяется уравнениями

$$F=0;\quad F_t=0;\quad F_{tt}=\frac{\partial^2F}{\partial t^2}=0.$$

Из трех уравнений можно получить параметрические уравнения ребра возврата

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

В случае задания семейства поверхностей параметрическими уравнениями

$$x=x(u,v,t),\ y=y(u,v,t),\ z=z(u,v,t)$$

огибающая находится присоединением к этим трем еще одного уравнения:

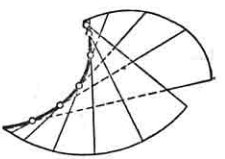
$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_t & y_t & z_t \end{vmatrix}=0. \qquad (22)$$

Развертывающейся поверхностью называется огибающая однопараметрического семейства плоскостей $F=Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C, D — функции t.

Характеристика плоскости из данного семейства есть прямая: $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, где A', B', C', D' — производные по t.

Развертывающаяся поверхность — *линейчатая поверхность* (стр. 298). Ребро возврата определяется уравнениями

$$F=0,$$
$$F_t=0,$$
$$F_{tt}=0.$$



Фиг. 76. Ребро возврата.

Развертывающаяся поверхность состоит из касательных ее ребра возврата (фиг. 76), являющихся характеристиками. Каждая плоскость семейства — соприкасающаяся плоскость ребра возврата. Касательная плоскость к развертывающейся поверхности — одна и та же вдоль характеристики и совпадает с соответствующей соприкасающейся плоскостью ребра возврата.

Развертывающаяся поверхность наложима (без складок и разрывов) на плоскость. Во всякой точке развертывающейся поверхности полная кривизна $K=0$.

Пример. Огибающая семейства плоскостей $F\equiv x\sin t-y\cos t+z-kt=0$, где t — параметр, $k=\text{const}$, найдется исключением t из $F=0$, $F_t=0$. Если положить $z-kt=u$, то можно получить параметрические уравнения огибающей

$$x=k\cos t-u\sin t;$$

$$y=k\sin t+u\cos t;$$

$$z=kt+u,$$

определяющие винтовую поверхность.

Ребром возврата будет $x=k\cos t$, $y=k\sin t$, $z=kt$ — винтовая линия на круглом цилиндре с радиусом k.

Образование поверхностей линиями. Если линии двупараметрического семейства

$$F_1(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\ F_2(x, y, z, \alpha, \beta)=0$$

пересекают некоторую направляющую

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$

то исключением x, y, z из этих четырех уравнений находят соотношение между параметрами: $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Исключая α, β из трех уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, получают поверхность $F(x, y, z) = 0$ как геометрическое место кривых, выделенное из двупараметрического семейства линий.

а) Цилиндрическая поверхность есть геометрическое место прямых, параллельных данному вектору $\bar{\lambda}$ и пересекающих данную направляющую $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$.

Прямые семейства

$$Ax + By + Cz = \alpha, \quad A_1x + B_1y + C_1z = \beta$$

параллельны $\bar{\lambda}$, если

$$\bar{\lambda} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

Если $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ — результат исключения x, y, z из четырех уравнений, то $\varphi(Ax + By + Cz, A_1x + B_1y + C_1z) = 0$ — общий вид уравнения цилиндрической поверхности.

б) Коническая поверхность — геометрическое место прямых $x - x_0 = \alpha(z - z_0)$, $y - y_0 = \beta(z - z_0)$, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) и пересекающих направляющую $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$.

Уравнение конуса

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0,$$

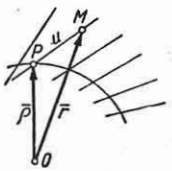
где $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ — результат исключения x, y, z из четырех уравнений.

в) Поверхность вращения образуется вращением данной линии вокруг прямой (оси). Можно поверхность вращения с осью $\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$ образовать движением круга $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \alpha^2$, $lx + my + nz = \beta$, плоскость которого перпендикулярна оси вращения, центр лежит на оси, а радиус изменяется так, чтобы окружность круга встречала данную линию $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$. Если $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ — результат исключения x, y, z из четырех уравнений, то

$$\varphi\left(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}, lx + my + nz\right) = 0$$

уравнение поверхности вращения.

г) Линейчатые поверхности образуются движением прямой (образующей) с направляющим вектором $\bar{\lambda}(v)\{l(v), m(v), n(v)\}$ вдоль направляющей линии $\bar{\rho} = \bar{\rho}(v)\{x(v), y(v), z(v)\}$.



Фиг. 77. Линейчатая поверхность.

Уравнение линейчатой поверхности

$$\bar{r} = \bar{\rho} + u\bar{\lambda},$$

где u (фиг. 77) — параметр, определяющий текущую точку M на образующей; $\bar{r}\{X, Y, Z\}$ — текущий радиус-вектор точки M; $u\bar{\lambda} = \overline{PM}$.

Уравнение касательной плоскости

$$(\bar{R} - \bar{\rho})\bar{\lambda}\left(\frac{d\bar{\rho}}{ds} + u\frac{d\bar{\lambda}}{ds}\right) = 0,$$

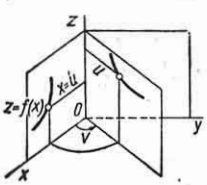
где $\bar{R}$ — радиус-вектор точки касательной плоскости.

Равенство

$$d\bar{\rho}\,\bar{\lambda}\,d\bar{\lambda} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} dx & l & dl \\ dy & m & dm \\ dz & n & dn \end{vmatrix} = 0$$

есть условие того, что линейчатая поверхность — развертывающаяся.

д) Винтовые поверхности (геликоиды) образуются винтовым движением данной кривой вокруг оси. Если Oz — ось винта (см. стр. 286), $r = f(x)$ — профиль геликоида (сечение его плоскостью, проходящей через Oz), v — угол плоскости профиля с xOz (фиг. 78), h — приведенный шаг или параметр винта, то



Фиг. 78. Профиль геликоида.

$$x = u\cos v,$$
$$y = u\sin v,$$
$$z = f(u) + hv$$

параметрические уравнения геликоида; u — расстояние от точки профиля до оси Oz.

При винтовом движении прямой $z = \pm x \operatorname{ctg} \gamma + b$, пересекающей Oz под углом γ, геликоид

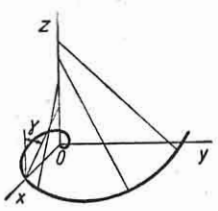
$$x = u \cos v,$$

$$y = u \sin v,$$

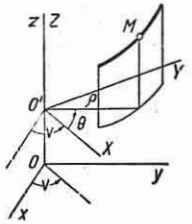
$$z = hv \pm u \operatorname{ctg} \gamma + b$$

называется *архимедовой винтовой поверхностью*; в сечении $z = \text{const}$ получается спираль Архимеда (фиг. 79). Поверхность — неразвертывающаяся.

В общем случае пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат, $O'XYZ$ — подвижная система, совершающая винтовое движение с параметром h вокруг Oz (фиг. 80). Координаты x, y, z точки $M(X, Y, Z)$, совершающей вместе с по-



Фиг. 79. Архимедова винтовая поверхность.



Фиг. 80. Криволинейная образующая винтовой поверхности.

движной системой винтовое движение, выражаются формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos v - Y \sin v; \\ y &= X \sin v + Y \cos v; \\ z &= Z + hv, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где v — угол поворота $O'XYZ$ вокруг Oz. Если X, Y, Z — постоянные, то точка M опишет винтовую линию. Если X, Y, Z — функции одного переменного параметра:

$$X = f_1(u), \quad Y = f_2(u), \quad Z = f_3(u),$$

то мы имеем линию в системе $O'XYZ$ (образующую), которая опишет винтовую поверхность:

$$x = f_1(u) \cos v - f_2(u) \sin v;$$

$$y = f_1(u) \sin v + f_2(u) \cos v,$$

$$z = f_3(u) + hv.$$

Если образующая дана уравнениями в цилиндрических координатах $\rho = f(\theta)$, $Z = F(\theta)$, то геликоид определится уравнениями

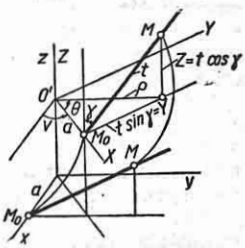
$$x = f(\theta) \cos(\theta + v);$$

$$y = f(\theta) \sin(\theta + v);$$

$$z = F(\theta) + hv \text{ (фиг. 80).}$$

Если образующей является прямая M_0M, составляющая $\angle\gamma$ с осью Oz, ее не пересекающая и находящаяся от Oz на кратчайшем расстоянии a (фиг. 81),

$$\frac{X - a}{0} = \frac{Y}{\sin \gamma} = \frac{Z}{\cos \gamma} = t,$$



Фиг. 81. Линейчатая винтовая поверхность.

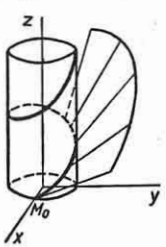
причем ось X направлена по кратчайшему расстоянию, то получается линейчатый геликоид:

$$x = a \cos v - u \sin v;$$

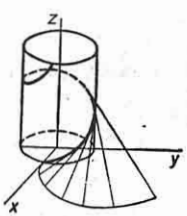
$$y = a \sin v + u \cos v;$$

$$z = hv + u \operatorname{ctg} \gamma,$$

где положено $u = a \operatorname{tg} \theta = t \sin \gamma$. Все прямолинейные образующие геликоида касаются основного (круглого) цилиндра радиуса a с осью Oz и в общем случае пересекают винтовую линию $x = a \cos v$, $y = a \sin v$, $z = hv$ на этом цилиндре, образованную точкой M_0 (фиг. 82). Полученный геликоид,



Фиг. 82. Конволютная винтовая поверхность.



Фиг. 83. Эвольвентная винтовая поверхность.

называемый *конволютным* — неразвертывающийся. В пересечении с плоскостью $z = 0$ получается удлиненная (при $h \operatorname{tg} \gamma > a$) или укороченная (при

$h \operatorname{tg} \gamma < a$) эвольвента окружности с радиусом $h \operatorname{tg} \gamma$:

$$x = a \cos v + vh \operatorname{tg} \gamma \sin v,$$

$$y = a \sin v - vh \operatorname{tg} \gamma \cos v.$$

В частности, если образующая является еще и касательной к винтовой линии на основном цилиндре, то линейчатая винтовая поверхность будет развертывающейся, называемой *эвольвентной*, условием чего является равенство $h = a \operatorname{ctg} \gamma$ (фиг. 83).

Винтовая линия на основном цилиндре является ребром возврата эвольвентного геликоида; в пересечении с плоскостью $z = 0$ получится эвольвента окружности с радиусом a.

Винтовая поверхность может получиться и как огибающая семейства поверхностей, образованного винтовым движением некоторой поверхности (плоскости, конуса и т. д.).

Если X, Y, Z — функции двух переменных параметров:

$$\left.\begin{aligned} X &= f_1(u, t); \\ Y &= f_2(u, t); \\ Z &= f_3(u, t). \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

то имеем в системе $O'XYZ$ поверхность. При винтовом движении $O'XYZ$ получится семейство поверхностей, определяемое уравнениями (23), в которых X, Y, Z заменяются по формулам (24).

Огибающая — винтовая поверхность получится, если к уравнениям (23) присоединить равенство (22).

ГЛАВА XIII

РАЗНОСТНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ*

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ

Если имеется ряд значений функции $y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, соответствующих значениям аргумента x: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то величины $y_1 - y_0, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}$ называются *разностями 1-го порядка*. Обозначают $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$; *разность m-го порядка* есть разность 1-го порядка от разности $(m-1)$-го порядка: $\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$. Удобно разности располагать в таблицу (диагональная таблица разностей):

x	$y=f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5	y_5					

Употребляется также горизонтальная таблица разностей:

x	$y=f(x)$	$\Delta_1 y$	$\Delta_2 y$	$\Delta_3 y$	$\Delta_4 y$	$\Delta_5 y$
x_0	y_0					
		$\Delta_1 y_1$				
x_1	y_1		$\Delta_2 y_2$			
		$\Delta_1 y_2$		$\Delta_3 y_3$		
x_2	y_2		$\Delta_2 y_3$		$\Delta_4 y_4$	
		$\Delta_1 y_3$		$\Delta_3 y_4$		$\Delta_5 y_5$
x_3	y_3		$\Delta_2 y_4$		$\Delta_4 y_5$	
		$\Delta_1 y_4$		$\Delta_3 y_5$		
x_4	y_4		$\Delta_2 y_5$			
		$\Delta_1 y_5$				
x_5	y_5					

Здесь $\Delta_1 y_1 = y_1 - y_0$, $\Delta_1 y_2 = y_2 - y_1 \ldots$, $\Delta_1 y_n = y_n - y_{n-1}$;

$$\Delta_m y_k = \Delta_{m-1} y_k - \Delta_{m-1} y_{k-1};$$

$$\Delta^m y_k = \Delta_m y_{k+m};\ \Delta_m y_k = \Delta^m y_{k-m}.$$

Если значения аргумента даны через равные промежутки $h = x_k - x_{k-1} = \text{const}$, то

$$y_0 = f(x);$$

$$y_1 = f(x+h); \ldots;\ y_k = f(x+kh);$$

$$\Delta y_0 = f(x+h) - f(x);\ \ldots;\ \Delta y_k = f(x+\overline{k+1}h) - f(x+kh);$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_0 = f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+\overline{n-1}h) + \binom{n}{2} f(x+\overline{n-2}h) + \ldots + (-1)^n f(x),$$

где обозначено

$$\overline{a+b} = (a+b),\quad \binom{n}{k} = C_n^k.$$

Значение $y_n = f(x+nh)$ выражается через разности по формуле

$$y_n = y_0 + \binom{n}{1}\Delta y_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0.$$

Конечные разности простейших функций

Степенная функция x^n и многочлены:

$$\Delta x^n = (x+h)^n - x^n = \binom{n}{1} h x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} h^{n-1} x + h^n.$$

Разность первого порядка многочлена $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ есть много-

* См. литературу на стр. 351 [119], [124], [112].

член степени $n-1$. Разность порядка n есть постоянная $a_0 n!\,h^n$; разность $(n+1)$-го порядка от многочлена равна нулю.

Показательная функция a^x:

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x (a^h - 1).$$

Тригонометрические функции:

$$\Delta \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\Delta \cos x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\Delta^n \sin (ax + b) =$$

$$= \left(2 \sin \frac{ah}{2} \right)^n \sin \left(ax + b + n \frac{ah + \pi}{2} \right).$$

Факториальная функция определяется формулой

$$x^{[n]} =$$

$$= x (x - h) (x - 2h) \ldots (x - \overline{n-1}h).$$

Для нее

$$\Delta x^{[n]} = nhx (x - h) \ldots (x - \overline{n-2}h) =$$

$$= n x^{[n-1]} h;$$

. . . . . .

$$\Delta^k x^{[n]} = n (n-1) \ldots (n - \overline{k-1}) \times$$

$$\times x^{[n-k]} h^k;$$

$$\Delta^n x^{[n]} = n!\,h^n.$$

Разложение по факториальным функциям всякой функции $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)$ порядка:

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h} (x - x_0) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2} (x - x_0)^{[2]} + \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,h^3} (x - x_0)^{[3]} +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n} (x - x_0)^{[n]} + R_n,$$

где

$$y_0 = f(x_0); \quad (x - x_0)^{[k]} =$$

$$= (x - x_0) (x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}),$$

$$x_{k-1} = x_0 + (k-1) h;$$

$$R_n = (x - x_0) (x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

$$x_0 < c < x_n.$$

Если $f(x)$ — многочлен степени n, то $\Delta^{n+1} y_0 = 0$, и в его разложении по факториальным функциям остаточный член $R_n = 0$.

Для $f(x) = x^n$, $h = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0^n$ имеем

$$x^n = \frac{\Delta 0^n}{1!} + \frac{\Delta 2 0^n}{2!} x (x-1) +$$

$$+ \frac{\Delta 3 0^n}{3!} x (x-1) (x-2) +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n 0^n}{n!} x (x-1) \ldots (x - \overline{n-1}),$$

причем числа $\Delta^k 0^n$ даются следующей таблицей:

n	$\Delta 0^n$	$\Delta 2 0^n$	$\Delta 3 0^n$	$\Delta 4 0^n$	$\Delta 5 0^n$
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	
5	1	30	150	240	120

Приложение к экстраполяции (продолжение таблицы для следующих значений аргумента). Так как для полинома $f(x)$ n-й степени $\Delta^n f = \text{const}$, то для вычисления $\Delta^n f$ достаточно знать $n+1$ значение функции. Вычисляя последовательно $\Delta^{n-1} f$, $\Delta^{n-2} f$ и т. д., можно экстраполировать таблицу значений полинома в случае равноотстоящих значений аргумента.

Пример. Составить таблицу значений функции $y = x^3 - 4x^2 + 8x$ для целых значений x от 0 до 10.

Для четырех значений непосредственно вычисляем

$$f(0) = 0; \quad f(1) = 5; \quad f(2) = 8; \quad f(3) = 15$$

и по этим значениям составляем разности.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		5		
1	5		−2	
		3		6
2	8		4	
		7		
3	15			

Зная, что $\Delta^3 y_0 = 6 = \text{const} = \Delta^3 y_1 = \Delta^3 y_2$ и т. д., мы далее последовательно находим по формуле

$$\Delta^{m-1} y_{k+1} = \Delta^m y_k + \Delta^{m-1} y_k:$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_1 + \Delta^2 y_1 = 6 + 4 = 10;$$

$$\Delta y_3 = \Delta^2 y_2 + \Delta y_2 = 10 + 7 = 17;$$

$$f(4) = y_4 = \Delta y_3 + y_3 = 17 + 15 = 32.$$

Аналогично находятся $f(5)$, $f(6)$ ... выполнением только сложения.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Задачи интерполирования: 1) определение значений функции, заданной таблицей, для тех значений аргумента, которые находятся между двумя соседними значениями, находящимися в таблице; 2) построение такой функции, которая для данных значений аргумента принимала бы данные значения. Наиболее употребительной интерполирующей функцией является многочлен $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (параболическая интерполяция), а для периодических функций применяется тригонометрический полином (тригонометрическая интерполяция) (стр. 306, 313).

Какова бы ни была заданная функция $f(x)$ или ее $n+1$ значений для *узловых точек* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, всегда существует единственный многочлен n-й степени $\varphi(x)$ такой, что $\varphi(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Интерполяционные формулы для равноотстоящих узловых точек

Первая формула Ньютона дает разложение по факториальным функциям через диагональные разности

$$f(x) \approx \varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

где $x_k = x_0 + kh$; употребляется для x, близких к x_0.

Вторая формула Ньютона выражается через горизонтальные разности

$$f(x) \approx \varphi(x) = y_n + \frac{\Delta_1 y_n}{1!\,h}(x - x_n) + \frac{\Delta_2 y_n}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + \frac{\Delta_n y_n}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1);$$

употребляется для x, близких к x_n.

Формулы Стирлинга и Бесселя удобны для интерполирования значений функции около середины табличного ряда. Пользуются следующей схемой:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-1}$	
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$		
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$			
x_2	y_2	Δy_2				
x_3	y_3					

Формула Стирлинга

$$f(x) \approx \varphi(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{1!\,h \cdot 2}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2}(x - x_0)^2 + \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{3!\,h^3 \cdot 2}(x - x_0)(x - x_1)\times (x - x_{-1}) + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!\,h^4}(x - x_0)^2 \times (x - x_1)(x - x_{-1}) + \ldots$$

В схеме подчеркнуты сплошной чертой разности, взятые в формуле Стирлинга.

Формула Бесселя

$$f(x) \approx \varphi(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{\Delta y_0}{1!\,h}\left(x - \frac{x_1 + x_0}{2}\right) + \frac{\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_{-1}}{2!\,h^2 \cdot 2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!\,h^3}(x - x_0)(x - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_0}{2}\right) + \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{4!\,h^4 \cdot 2}(x - x_0)(x - x_1)\times (x - x_{-1})(x - x_2) + \frac{\Delta^5 y_{-2}}{5!\,h^5}(x - x_0)(x - x_1)\times (x - x_{-1})(x - x_2)\left(x - \frac{x_1 + x_0}{2}\right) + \ldots$$

В схеме подчеркнуты пунктирной линией разности, взятые в формуле

Бесселя. Формула особенно удобна для интерполяции на середину при

$$x = \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Интерполяционная формула Лагранжа для неравноотстоящих узловых точек

$$f(x) \approx \varphi(x) =$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}\, y_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}\, y_1 +$$

$$+ \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\, y_n.$$

Пример. Построить полином $y = f(x)$ по значениям x, y, приведенным в таблице:

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

По формуле Лагранжа получим

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}\, 2 +$$

$$+ \frac{x(x-2)(x-5)}{1(1-2)(1-5)}\, 3 + \frac{x(x-1)(x-5)}{2(2-1)(2-5)}\, 12 +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{5(5-1)(5-2)}\, 147 = x^3 + x^2 - x + 2.$$

Остаточные члены интерполяционных формул

Погрешность при интерполировании можно оценить, если вычислить остаточный член $R = f(x) - \varphi(x)$.

1) Для формулы *Лагранжа*

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \times$$

$$\times (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

где ξ — промежуточное значение между наибольшим и наименьшим из чисел $x_0, x_1, \dots, x_n$.

2) Такое же выражение имеет R и для формул *Ньютона*, если аналитический вид $f(x)$ известен. В противном случае можно заменить

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

в первой формуле Ньютона и

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta_{n+1} y_n}{h^{n+1}}$$

во второй формуле Ньютона.

3) Для формулы *Стирлинга*

$$R = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x-x_0)(x-x_1) \times$$

$$\times (x-x_{-1})\dots(x-x_n)(x-x_{-n}).$$

Здесь можно заменить

$$f^{(2n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-n-1} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2h^{2n+1}}.$$

4) Для формулы *Бесселя*

$$R = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \times$$

$$\times (x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\dots$$

$$\dots(x-x_n)(x-x_{-n})(x-x_{n+1}).$$

Здесь можно заменить

$$f^{(2n+2)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{2n+2} y_{-n-1} + \Delta^{2n+2} y_{-n}}{2h^{2n+2}}.$$

Численное дифференцирование и интегрирование

Для приближенного (численного) дифференцирования $f(x)$ последняя заменяется одной из интерполяционных формул $\varphi(x)$:

по формуле Стирлинга

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} - \right.$$

$$- \frac{1}{6}\,\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} +$$

$$\left. + \frac{1}{30}\,\frac{\Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-3}}{2} + \dots\right];$$

по формуле Ньютона

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots\right].$$

Для приближенного (численного) интегрирования $f(x)$ следует эту функцию заменить интерполяционным многочленом $\varphi(x)$. Интегрирование $\varphi(x)$ приводит к формулам трапеций, Симпсона и др. (см. стр. 182).

ГЛАВА XIV

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ *

Задача приближенного представления функции $f(x)$, заданной аналитически (формулой) или эмпирически (таблицей), решается выбором аппроксимирующей функции $S_n(x)$ вида

$$S_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

Здесь $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_n(x)$ — некоторые заданные функции, а коэффициенты c_0, c_1, . . , c_n подбираются так, чтобы выполнялись требования наилучшего приближения на отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$. Близость функции $f(x)$ к $S_n(x)$ оценивается различными способами; в зависимости от этого получается то или другое наилучшее приближение.

Наиболее употребительным является такое приближение $S_n(x)$, для которого величина

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\,dx$$

имеет наименьшее значение. Величина δ называется *средней квадратической погрешностью*.

Употребляется еще наилучшее приближение с оценкой по *обобщенному среднему квадратическому отклонению с весом* $p(x)$, т. е. такое приближение $S_n(x)$, для которого наименьшее значение имеет величина

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - S_n(x)]^2\,dx,$$

причем функция $p(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$.

Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$,... на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ называются *ортогональными*, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n,$$

где $m, n = 0, 1, 2\ldots$

Обозначим

$$k_n = \int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx;$$

тогда система функций

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x)$$

называется *ортогональной и нормированной*, так как обладает свойством

$$\int_a^b \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

При оценке по среднему квадратическому отклонению коэффициенты наилучшего приближения определяются по формулам

$$c_n = \int_a^b f(t)\,\psi_n(t)\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Эти коэффициенты называются *обобщенными коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *относительно системы* $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,...

Ряд $c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) + \ldots$ называется *обобщенным рядом Фурье функции* $f(x)$.

Когда $f(x)$ задана графически или таблицей, то интегралы (для c_n) вычисляются по формулам численного интегрирования (см. стр. 182).

Система функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$,... называется на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ *полной*, если для любой непрерывной функции

* См. литературу на стр. 349 [35], [69], [82].

$f(x)$ на $[a, b]$ всегда можно подобрать n и коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ так, что среднее квадратическое отклонение $s_n = c_0\psi_0(x) + c_1\psi_1(x) + \ldots + c_n\psi_n(x)$ от $f(x)$ становится меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Условие полноты системы ортогональных функций $\psi_0(x)$, $\psi_1(x), \ldots$ выражается равенством

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

В этом случае говорят, что $s_n(x)$ сходится в среднем к функции $f(x)$.

Среднее квадратическое отклонение $s_n(x)$ от $f(x)$ находится из равенства

$$(b-a)\,\delta_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx - \sum_{i=0}^{n} c_i^2.$$

Примеры полных ортогональных систем функций: 1) Система функций

$$\cos\frac{\pi x}{l},\ \cos 2\frac{\pi x}{l},\ \cos 3\frac{\pi x}{l}, \ldots$$

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin 2\frac{\pi x}{l},\ \sin 3\frac{\pi x}{l}, \ldots$$

полна и ортогональна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2l$. Полнота этой системы впервые доказана А. М. Ляпуновым.

2) Система бесселевых функций

$$\sqrt{x}J_0(\alpha_1 x),\ \sqrt{x}J_0(\alpha_2 x),\ \sqrt{x}J_0(\alpha_3 x), \ldots$$

полна и ортогональна на отрезке $[0, l]$, если α_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — корень уравнения $J_0(\alpha_k l) = 0$ (см. бесселевы функции, стр. 222, 311).

Тригонометрический ряд Фурье

При разложении $f(x)$ на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$ в основной тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + b_1\sin\frac{\pi x}{l} + b_2\sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

коэффициенты вычисляются по формулам Эйлера:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt;$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos k\frac{\pi t}{l}\,dt;$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin k\frac{\pi t}{l}\,dt$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$. В дальнейшем сумму ряда Фурье для $f(x)$ обозначим через $\Phi(x)$.

При приближенной замене $f(x)$ тригонометрической суммой (тригонометрическим полиномом) $s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos k\frac{\pi x}{l} + \beta_k\sin k\frac{\pi x}{l}\right)$ средняя квадратическая ошибка $\delta^2 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}[f(t) - s_n(t)]^2 dt$ будет наименьшей, если $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ — коэффициенты Фурье данной функции.

Для всякой ограниченной и кусочно-непрерывной функции $f(x)$ ее ряд Фурье сходится в среднем к этой функции, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{+l}[f(t) - s_n(t)]^2 dt = 0.$$

Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей в промежутке (a, b) *условиям Дирихле*, если в (a, b) $f(x)$ или непрерывна, или имеет конечное число разрывов 1-го рода (стр. 137), имеет конечное число экстремумов; существуют конечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Иначе: $f(x)$ — ограниченная, и отрезок (a, b) можно разбить на конечное число таких отрезков, внутри каждого из которых $f(x)$ — непрерывная и монотонная.

Теорема Дирихле. Если $f(x)$, заданная в $(-l, l)$, удовлетворяет условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится во всем промежутке $(-l, l)$ и сумма этого ряда: 1) равна $f(x)$ во всякой точке непрерывности $f(x)$; 2) равна $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ в точке разрыва непрерывности; 3) равна $\frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)]$ при $x = -l$ и $x = +l$.

Сходимость ряда будет абсолютной и равномерной на всяком отрезке, не содержащем точки разрыва.

Если пользоваться рядом Фурье вне $(-l, l)$, то $f(x)$ должна быть продолжена вне $(-l, l)$ периодически с периодом $2l$. Концы $x = \pm l$ явятся для продолженной таким образом функции

точками разрыва, если $f(-l+0) \neq f(l-0)$.

Ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}};$$

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\, e^{-i\frac{k\pi t}{l}}\, dt$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если $f(x)$ принимает на $(-l, +l)$ только действительные значения, то

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0;\quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k);$$

$$c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k);\quad k = 1, 2, \ldots$$

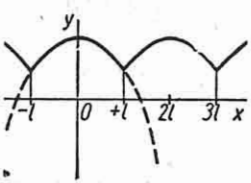
Специальные случаи разложения

1) Если $f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$, то

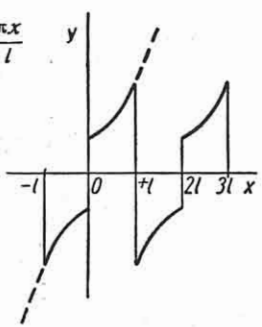
$$b_k = 0,\quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos k\frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi x}{l}$$

(фиг. 1).



Фиг. 1.



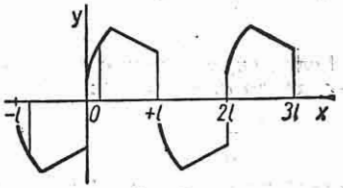
Фиг. 2.

2) Если $f(x)$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$a_k = 0;\quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin k\frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi x}{l}$$ (фиг. 2).

3) Если $f(-l+x) = -f(x)$, т. е. отрицательная полуволна есть перевернутая около Ox полуволна положительная (фиг. 3 и 4), то

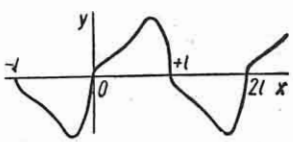


Фиг. 3.

$$a_{2k} = b_{2k} = 0;$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos(2k+1)\frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin(2k+1)\frac{\pi t}{l}\, dt;$$



Фиг. 4.

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos(2k+1)\frac{\pi x}{l} + b_{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l},$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

4) Если $f(x)$ четная и, кроме того, $f(-l+x) = -f(x)$, то $b_k = a_{2k} = 0$;

$$a_{2k+1} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} f(t)\cos(2k+1)\frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos(2k+1)\frac{\pi x}{l}.$$

5) Если $f(x)$ четная и $f(x) = f(l-x)$, то $b_k = a_{2k+1} = 0$;

$$a_{2k} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} f(t)\cos 2k\frac{\pi t}{l}\, dt$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$;

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2k \frac{\pi x}{l}.$$

6) Если $f(x)$ нечетная и $f(-l+x) = -f(x)$, то $a_k = b_{2k} = 0$;

$$b_{2k+1} = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(t) \sin(2k+1) \frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l}.$$

7) Если $f(x)$ нечетная и $f(l-x) = -f(x)$, то $a_k = b_{2k+1} = 0$;

$$b_{2k} = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(t) \sin 2k \frac{\pi t}{l}\, dt;$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} \sin 2k \frac{\pi x}{l}.$$

Одну и ту же функцию $f(x)$, заданную на $0 \leqslant x \leqslant l$, можно разложить в различные ряды Фурье, дающие в этом промежутке $f(x)$:

а) $\Phi_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos n \frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_n \sin n \frac{2\pi x}{l} + \ldots$;

периодом $\Phi_1(x)$ будет l. Коэффициенты

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos k \frac{2\pi t}{l}\, dt;$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin k \frac{2\pi t}{l}\, dt.$$

б) $\Phi_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos n \frac{\pi x}{l} + \ldots$;

периодом $\Phi_2(x)$ будет $2l$. $\Phi_2(x)$ совпадает с $f(x)$ в $0 \leqslant x < l$; в промежутке $-l < x \leqslant 0$ ряд $\Phi_2(x)$ дает симметричное относительно Oy продолжение.

Коэффициенты находятся по формулам специального случая 1.

в) $\Phi_3(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} + \ldots + b_n \sin n \frac{\pi x}{l} + \ldots$; период $\Phi_3(x)$ равен $2l$. $\Phi_3(x)$ дает на $(-l, 0)$ продолжение, симметричное относительно начала координат, и совпадает с $f(x)$ в промежутке $0 < x < l$.

Коэффициенты находятся по формулам специального случая 2.

г) $\Phi_4(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2 \frac{\pi x}{l} + a_4 \cos 4 \frac{\pi x}{l} + \ldots$, период $\Phi_4(x)$ равен l; коэффициенты находятся по формулам случая 5 и т. д.

Интеграл Фурье. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке и $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится, то

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt$$

Это выражение для $f(x)$ называется *интегралом Фурье* функции $f(x)$.

Если $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux\, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut\, dt.$$

Если $f(x)$ нечетная, то

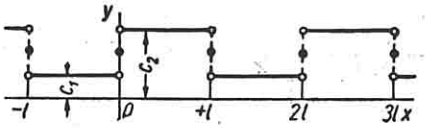
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux\, du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut\, dt.$$

Примеры некоторых разложений в ряд Фурье. Ниже даны разложения в ряд Фурье некоторых простейших функций, заданных на некотором отрезке и продолженных вне этого отрезка периодически. Изменением масштабов по

Ox и Oy, а также переносом координатных осей можно получить другие разложения.

Интегрированием рядов, а также сложением и вычитанием получаются новые разложения.

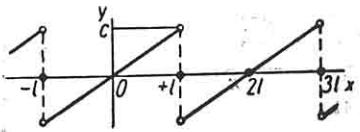
1) $$\frac{c_1+c_2}{2}+\frac{2(c_2-c_1)}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l}+\ldots+\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]=$$



Фиг. 5.

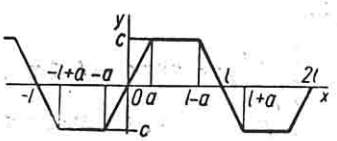
$$=\begin{cases} c_1 \text{ при } -l<x<0 \\ c_2 \text{ при } 0<x<l \\ \dfrac{c_1+c_2}{2} \text{ при } x=0,\ \pm l,\ \pm 2l,\ldots \end{cases}$$

2) $$\frac{2c}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l}-\ldots\right]=\begin{cases} \dfrac{cx}{l} \text{ при } -l<x<l \\ 0 \text{ при } x=0,\ \pm l,\ \pm 2l,\ \ldots \end{cases}$$



Фиг. 6.

3) $$\frac{4cl}{a\pi^2}\left[\sin\frac{\pi a}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\sin 3\frac{\pi a}{l}\sin 3\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin 5\frac{\pi a}{l}\sin 5\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]=$$

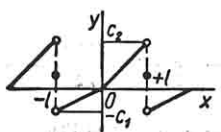


Фиг. 7.

$$=\begin{cases} -c & \text{при } -l+a\leqslant x\leqslant -a \\ \dfrac{c}{a}x & \text{при } -a\leqslant x\leqslant a \\ c & \text{при } a\leqslant x\leqslant l-a \\ \dfrac{c}{a}(l-x) & \text{при } l-a\leqslant x\leqslant l+a \end{cases}$$

4) $$\frac{c_2-c_1}{4}+2\frac{c_1-c_2}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]+$$

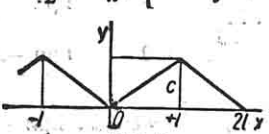
$$+\frac{c_1+c_2}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l}-\ldots\right]=$$



Фиг. 8.

$$=\begin{cases} \dfrac{c_1}{l}x & \text{при } -l<x\leqslant 0 \\ \dfrac{c_2}{l}x & \text{при } 0<x<l \\ \dfrac{c_2-c_1}{2} & \text{при } x=\pm l,\ \pm 3l,\ \ldots \end{cases}$$

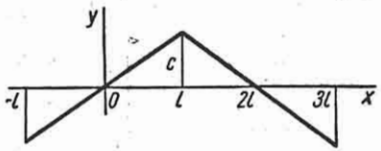
5) $$\frac{c}{2}-\frac{4c}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]=$$



Фиг. 9.

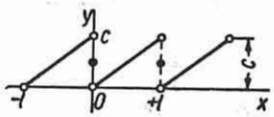
$$=\begin{cases} \dfrac{c}{l}x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l \\ -\dfrac{c}{l}x \text{ при } -l\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$$

6) $$\frac{8c}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{2l}-\frac{1}{3^2}\sin 3\frac{\pi x}{2l}+\frac{1}{5^2}\sin 5\frac{\pi x}{2l}-\ldots\right]=\begin{cases}\frac{c}{l}x & \text{при } -l\leqslant x\leqslant l\\ \frac{c}{l}(2l-x) & \text{при } l\leqslant x\leqslant 3l\end{cases}$$



Фиг. 10.

7) $$\frac{c}{2}-\frac{c}{\pi}\left[\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{l}+\ldots\right]=$$

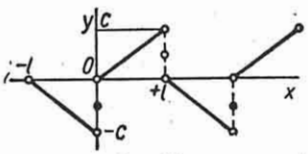


Фиг. 11.

$$=\begin{cases}\frac{cx}{l}+c & \text{при } -l<x<0\\ \frac{cx}{l} & \text{при } 0<x<l\\ \frac{c}{2} & \text{при } x=-l, 0, l, \ldots\end{cases}$$

8) $$\frac{-4c}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]+$$

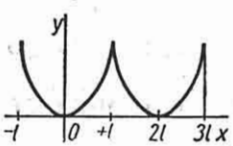
$$+\frac{2c}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi x}{l}+\ldots\right]=$$



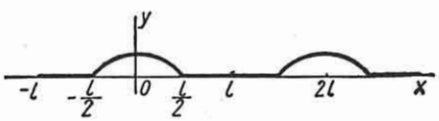
Фиг. 12.

$$=\begin{cases}-\frac{cx}{l}-c & \text{при } -l<x<0\\ \frac{cx}{l} & \text{при } 0<x<l\\ +\frac{c}{2} & \text{при } x=-l, l, 3l\ldots\\ -\frac{c}{2} & \text{при } x=0, 2l, \ldots\end{cases}$$

9) $$\frac{l^2}{3}-\frac{4l^2}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2^2}\cos 2\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi x}{l}-\ldots\right]=x^2 \text{ при } -l\leqslant x\leqslant l$$



Фиг. 13.



Фиг. 14. [к разложению 10].

10) $$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{4\cdot 1^2-1}\cos\frac{2\pi x}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\cdot 2^2-1}\cos\frac{4\pi x}{l}-\frac{1}{4\cdot 3^2-1}\cos\frac{6\pi x}{l}+\ldots\right]=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l} & \text{при } -\frac{l}{2}\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\\ 0 & \text{при } \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\\ 0 & \text{при } -l\leqslant x\leqslant-\frac{l}{2}\end{cases}$$

11) $$\frac{2z\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2}-\frac{\cos x}{z^2-1}+\frac{\cos 2x}{z^2-2^2}-\frac{\cos 3x}{z^2-3^2}+\ldots\right]=\cos zx \text{ при } -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

Разложение в ряды по бесселевым функциям

Если $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$, корни уравнения $J_0(\alpha_k l) = 0$ [75], [151], $k = 1, 2, \ldots$, то имеет место свойство ортогональности с весом $p(x) = x$:

$$\int_0^l x J_0(\alpha_k x)\, J_0(\alpha_m x)\, dx = 0 \quad (k \neq m);$$

если $k = m$, то

$$2\int_0^l x J_0^2(\alpha_k x)\, dx = l^2 J_0'^2(\alpha_k l) = l^2 J_1^2(\alpha_k l).$$

Для функции $f(x)$ сумма

$$S_n = c_1 J_0(\alpha_1 x) + c_2 J_0(\alpha_2 x) + \ldots + c_n J_0(\alpha_n x)$$

дает наилучшее приближение с оценкой по обобщенному среднему квадратическому отклонению с весом $p = x$, причем коэффициент c_k находится по формуле

$$l^2 J_0'^2(\alpha_k l)\, c_k = 2\int_0^l x J_0(\alpha_k x)\, f(x)\, dx.$$

Аналогичные разложения имеют место по функциям Бесселя высших порядков.

Ряд $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ сходится в $[0, l]$ к $f(x)$, имеющей непрерывную производную с ограниченной вариацией.

Разложение в ряды по полиномам Чебышева

Полиномы Чебышева (см. стр. 224) удовлетворяют свойству ортогональности с весом $p = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Наилучшее приближение $f(x)$ полиномами Чебышева $T_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, т. е. многочленом

$$S_n = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x),$$

с оценкой по обобщенному среднему квадратическому отклонению с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ достигается для коэффициентов

$$c_k = \frac{2^{2k-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\, T_0}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

или

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\, d\theta; \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos\theta)\, d\theta.$$

*Пример. Разложить $|x|$ по полиномам Чебышева.

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\cos\theta|\cos k\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2^{k-1}}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\cos k\theta\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos\theta\cos k\theta\, d\theta\right];$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{4}{\pi};$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$c_{2n+1} = 0.$$

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}}\, T_{2n}(x).$$

Первые приближения:

$$|x| \approx \frac{2}{\pi}; \quad |x| \approx \frac{2}{\pi} + c_2 T_2 = \frac{2}{3\pi}(4x^2 + 1);$$

$$|x| \approx \frac{2}{\pi} + c_2 T_2 + c_4 T_4 = \frac{2}{15\pi}(-16x^4 + 36x^2 + 3).$$

Двойные ряды

Функцию $f(x, y)$ можно приближенно представить двойной суммой

$$S_{mn}(x, y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} c_{kl} \varphi_k(x) \psi_l(y),$$

где $\varphi_k(x)$ и $\psi_l(y)$ — специальные функции, определяемые характером задачи. При замене $f(x, y)$ этой суммой S_{mn} коэффициенты c_{kl} определяются из условия, чтобы интеграл

$$\iint_D p(x, y) [S_{mn} - f(x, y)]^2 \, dx \, dy$$

был наименьшим; вес $p(x, y) > 0$.

Примеры:

1) Разложение $f(x, y)$ с периодом 2π как по x, так и по y в ряд Фурье (область D — прямоугольник):

$$f(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \lambda_{kl} [a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \sin ly],$$

где

$$\lambda_{kl} = \begin{cases} 1/4, & \text{если } k = l = 0; \\ 1/2, & \text{если } k = 0, \ l > 0 \text{ или } k > 0, \ l = 0; \\ 1, & \text{если } k > 0, \ l > 0. \end{cases}$$

$$a_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, y) \cos kx \cos ly \, dx \, dy;$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, y) \sin kx \cos ly \, dx \, dy;$$

$$c_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, y) \cos kx \sin ly \, dx \, dy;$$

$$d_{kl} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, y) \sin kx \sin ly \, dx \, dy.$$

2) Если область D — круг радиуса a и r, φ — полярные координаты, то функцию $f(r, \rho)$, обращающуюся в нуль на окружности, можно разложить в двойной ряд

$$f(r, \varphi) = \sum_{k, l}^{\infty} J_l(\alpha_{kl} r) (A_{kl} \cos l\varphi + B_{kl} \sin l\varphi),$$

где

$$\pi A_{kl} \int_0^a J_l^2(\alpha_{kl} r) \, r \, dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_l(\alpha_{kl} r) \cos l\varphi \, r \, dr \, d\varphi,$$

$$\pi B_{kl} \int_0^a J_l^2(\alpha_{kl} r) \, r \, dr = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_l(\alpha_{kl} r) \sin l\varphi \, r \, dr \, d\varphi$$

($l, k = 1, 2, 3, \ldots$); α_{kl} находятся из уравнения $J_l(\alpha_{kl} a) = 0$;

$$2 \int_0^a J_l^2(\alpha_{kl} r) \, r \, dr = a^2 J_l'^2(\alpha_{kl} a) = a^2 J_{l+1}^2(\alpha_{kl} a).$$

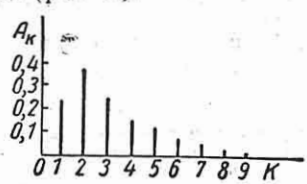
Практический гармонический анализ *

Для большинства технических расчетов достаточно взять первые 10—12 гармоник периодической функции $f(x)$:

$$a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = A_k \sin \left(k \frac{\pi x}{l} + \varphi_k \right);$$

$k = 0, 1, \ldots, 12$. Здесь A_k — амплитуда, φ_k — начальная фаза k-й гармоники; они определяются по формулам: $a_k = A_k \sin \varphi_k$, $b_k = A_k \cos \varphi_k$ или $A_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$, причем из двух значений φ_k, отличающихся на π, выбирают то, при котором знак $\sin \varphi_k$ совпадает со знаком a_k и знак $\cos \varphi_k$ совпадает со знаком b_k.

Последовательность амплитуд A_0, A_1, $A_2, \ldots$ образует *спектр* периодической функции (фиг. 15).



Фиг. 15.

Для приближенного вычисления коэффициентов ряда Фурье следует заменить интегралы суммами по одной из формул приближенного интегрирования, например по формуле трапеций.

Обозначим период $2l = T$ и возьмем для периодической функции $y = f(x)$ ее значения $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-1}$ ($y_{2n} = y_0$) для равноотстоящих значений аргумента

$$0, \ \frac{T}{2n}, \ 2\frac{T}{2n}, \ \ldots, \ (2n-1)\frac{T}{2n}.$$

* См. литературу на стр. 349 [35], [112], [125].

Тригонометрическая сумма

$$S_{2n} = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + a_n \cos n\frac{2\pi x}{T} + b_1 \sin\frac{2\pi x}{T} + \ldots + b_{n-1} \sin(n-1)\frac{2\pi x}{T},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} y_k;$$

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos k\frac{m\pi}{n};$$

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} y_k \sin k\frac{m\pi}{n}, \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

($b_n = 0$) является интерполирующим многочленом для периодической функции (тригонометрическая интерполяция) и дает наилучшее квадратическое приближение для $f(x)$.

Для вычисления коэффициентов применяются вычислительные схемы и шаблоны [35], [114], [117], а также специальные приборы — гармонические анализаторы [117].

Ниже приведена схема Рунге вычисления коэффициентов для 12 ординат.

Вычисляются суммы и разности по столбцам:

$$\begin{array}{lc} & y_0\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ y_6 \\ & \underline{y_{11}\ y_{10}\ y_9\ y_8\ y_7} \\ \text{Сумма} & s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6 \end{array}$$

$s_0 = y_0$, $s_1 = y_1 + y_{11}$ и т. д.

Разность $d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5$

$d_1 = y_1 - y_{11}$ и т. д.

	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Сумма	c_0	c_1	c_2	c_3	σ_1	σ_2	σ_3
Разность	∂_0	∂_1	∂_2		δ_1	δ_2	

Дальнейшие вычисления производятся по следующей схеме:

1 {	c_0	c_1	∂_0		c_0	$-c_3$	∂_0	∂_2	σ_0				σ_1	σ_3
	c_2	c_3												
0,866				∂_1						σ_2	δ_1	δ_2		
0,5			∂_2		$-c_2$	c_1			σ_1					
Сумма	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Сумма I + II	$12a_0$		$6a_1$		$6a_2$		—		$6b_1$		$6b_2$		—	
Разность I — II	$12a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$		$6b_5$		$6b_4$		$6b_3$	

Здесь вместо c, ∂, σ, δ должны быть помещены соответствующие суммы и разности, умноженные на стоящие в той же строке слева множители. В каждом столбце сумма полученных таким образом величин обозначена I или II.

Гармонический синтез

Если дан ряд Фурье некоторой периодической функции $f(x)$, то можно вычислить ее значения при $x = \frac{k}{12}T$, где T — период $f(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 11$, при помощи той же схемы Рунге. Предполагается, что в пределах допустимой точности можно ограничиться в ряде Фурье первыми шестью гармониками. Положим $s_0 = a_0$, $s_1 = a_1, \ldots$, $s_6 = a_6$; $d_1 = b_1$, $d_2 = b_2, \ldots, d_5 = b_5$, где a_k, b_k — заданные коэффициенты ряда. Затем производим вычисления согласно схеме до получения величин α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, β_1, β_2, β_3, β_4 β_5, соответствующих величинам $12a_0$, $6a_1$, $6a_2$, $6a_3$, $6a_4$, $6a_5$, $12a_6$, $6b_1$, $6b_2$, $6b_3$, $6b_4$, $6b_5$, помещенным в двух последних строках таблицы.

После этого находим:

$y_0 = \alpha_0$; $y_4 = \alpha_4 + \beta_4$; $y_8 = \alpha_4 - \beta_4$;
$y_1 = \alpha_1 + \beta_1$; $y_5 = \alpha_5 + \beta_5$; $y_9 = \alpha_3 - \beta_3$;
$y_2 = \alpha_2 + \beta_2$; $y_6 = \alpha_6$; $y_{10} = \alpha_2 - \beta_2$;
$y_3 = \alpha_3 + \beta_3$; $y_7 = \alpha_5 - \beta_5$; $y_{11} = \alpha_1 - \beta_1$.

ГЛАВА XV

НОМОГРАФИЯ *

Номограммой называется графическое изображение функциональной зависимости между несколькими переменными, позволяющее находить приближенные числовые значения одной из переменных по заданным значениям других.

Прямолинейной *функциональной шкалой* функции $f(x)$ называется прямая (носитель шкалы), на которой от некоторой точки (начальная точка шкалы) откладываются отрезки $S = mf(x)$ и в конце каждого отрезка ставится пометка x, соответствующая значению $y = f(x)$; m — *модуль шкалы* — число миллиметров в единице масштаба. В начальной точке ставится пометка x_0, для которой $f(x_0) = 0$. В одну сторону шкалы откладываются $S > 0$, в другую сторону $S < 0$, при $x = x_0$ $S = 0$.

Уравнение функциональной шкалы $S = mf(x)$ позволяет построить шкалу. На практике приходится строить функциональные шкалы для некоторого рабочего интервала $[a \leqslant x \leqslant b]$, поэтому заменяют данное уравнение следующим: $S = m[f(x) - f(a)]$.

Назовем пометку $x = a$, для которой $S = 0$, *начальной пометкой шкалы*. Модуль m выражается через L — длину шкалы — по формуле

$$m = \frac{L}{f(b) - f(a)}.$$

Для построения шкалы необходимо по уравнению составить таблицу:

x	$a = x_0$	x_1	x_2	...	$x_n = b$
S	0	S_1	S_2	...	L

где $S_k = m[f(x_k) - f(a)]$, x_k — те значения, которые чаще всего встречаются при вычислениях.

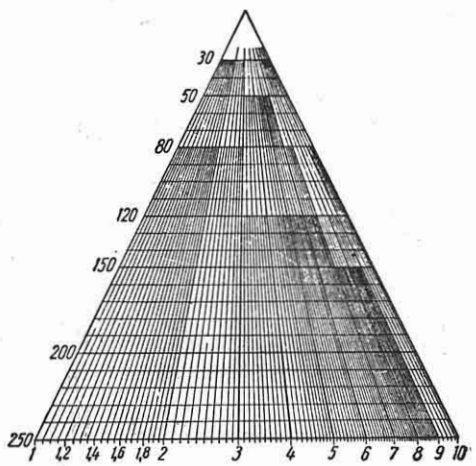
* См. литературу на стр. 351 [130], [131], [137].

Равномерная шкала имеет уравнение

$$S = \frac{L}{b - a}(x - a);$$

одинаковым приращениям x соответствуют равные отрезки на шкале.

Логарифмическая шкала имеет уравнение $S = m \lg x$ с начальной пометкой $x_0 = 1$. Построение $S = m \lg x$ можно производить графически, проектируя $S = 250 \lg x$ из одной точки плоскости



Фиг. 1. Логарифмический шаблон.

на параллельные прямые. С полученного *логарифмического шаблона* (фиг. 1) можно снимать $S = m \lg x$ для всякого m и для всякого рабочего интервала.

Проективная шкала или «*просто проективная шкала*» — шкала функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, которая может быть получена проектированием равномерной шкалы из некоторого центра на выбранную прямую (носитель шкалы) (см. пример на стр. 320).

Проективная шкала функции $f(x)$ есть шкала функции

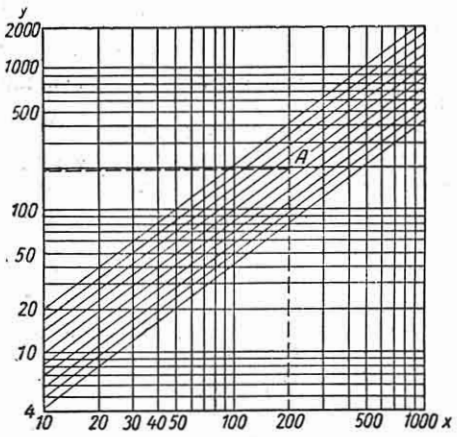
$$y = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d}.$$

Криволинейной шкалой называется линия (базис шкалы) с нанесенными пометками z, построенная по параметрическим уравнениям

$$S_1 = m_1 f_1(z); \quad S_2 = m_2 f_2(z),$$

причем S_1 строится по оси Ox, S_2 —по оси Oy, в прямоугольной или косоугольной системе координат.

Функциональная сетка. Если на осях координат построить шкалы $S_1 = m_1 f_1(x)$, $S_2 = m_2 f_2(y)$ (фиг. 2), то точке A плоскости соответствуют координаты (x, y)



Фиг. 2. Функциональная сетка.

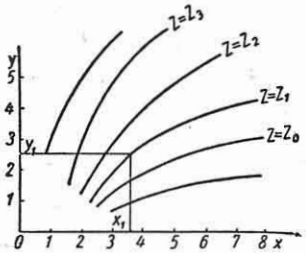
в так называемой *функциональной* (неравномерной) *сетке*, образованной прямыми, проведенными параллельно осям координат через точки с пометками x на одной оси и через точки с пометками y на другой оси.

Проектируя A на оси координат, получим декартовы координаты той же точки A: $u = \frac{S_1}{m}$, $v = \frac{S_2}{m}$, если начальные точки шкал совпадают с началом координат. Формулы перехода $u = \frac{m_1}{m} f_1(x)$, $v = \frac{m_2}{m} f_2(y)$ позволяют написать уравнение кривой $F\left[\frac{m_1}{m} f_1(x), \frac{m_2}{m} f_2(y)\right] = 0$ в виде $F(u, v) = 0$. В сетке (x, y) получается иная кривая, нежели в сетке (u, v). Соответствующим выбором функциональных шкал на осях кривую можно выпрямить.

Наиболее употребительными номограммами являются сетчатые номограммы и номограммы из выравненных точек.

СЕТЧАТЫЕ НОМОГРАММЫ

Уравнение с тремя переменными $F(x, y, z) = 0$ всегда можно номографировать, если считать две из переменных, например x, y, текущими декартовыми координатами точки кривой, а третью z — параметром семейства кривых. Полученное семейство кривых (не пересекающихся в рабочей части области изменения переменных) и есть *сетчатая номограмма* (из кривых линий) или *абак Декарта*. Если задать $x = x_1$, $y = y_1$, то соответствующее значение $z = z_1$ получим на фиг. 3 как пометку той кривой, на которую попадает точка (x_1, y_1).



Фиг. 3. Сетчатая номограмма.

Если точка (x, y) не попадает на готовую линию, то пометку z, соответствующую той линии семейства, которая должна через эту точку (x, y) пройти, надо оценить приближенно при помощи двух рядом стоящих пометок на двух проведенных кривых семейства.

Прямолинейный декартов абак — семейство из прямых линий. Общая форма уравнения, допускающего прямолинейный абак в координатах x, y, имеет вид

$$f_1(z)\,x + f_2(z)\,y + f_3(z) = 0.$$

Условие выпрямляемости абака Декарта. Семейство линий $F(x, y, z) = 0$ можно выпрямить, если это уравнение может быть приведено к виду $f_1(z)\varphi(x) + f_2(z)\psi(y) + f_3(z) = 0$. Если на осях

координат построить функциональные шкалы $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, то получим семейство прямых

$$f_1(z)\,u + f_2(z)\,v + f_3(z) = 0,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$ — формулы, преобразующие декартову сетку в функциональную.

Необходимое и достаточное условие выпрямляемости семейства кривых $F(x, y, z) = 0$ состоит в том, чтобы отношение $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$ можно было представить в форме произведения трех множителей, из которых каждый зависит лишь от одного аргумента.

Если $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = M(x)\,N(y)\,P(z)$, то формулы преобразования декартовой сетки в функциональную имеют вид

$$u = \int M(x)\,dx + C_1; \quad v = \int \frac{dy}{N(y)} + C_2.$$

Пример. $xz + yz^2 + 2x^3z - 2y - 1 = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z + 6x^2z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = z^2 - 2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = (1 + 6x^2) \cdot 1 \cdot \frac{z}{z^2 - 2}.$$

т. е. абак уравнения выпрямляем. Находим

$$u = \int (1 + 6x^2)\,dx = x + 2x^3 + C_1;$$

$$v = \int dy = y + C_2;$$

уравнение семейства прямых преобразованного абака примет вид

$$(u - C_1)\,z + (v - C_2)(z^2 - 2) - 1 = 0.$$

Общая форма сетчатых номограмм. Одно уравнение $F(u, v, w) = 0$ эквивалентно системе

$$f_1(u, x, y) = 0, \quad f_2(v, x, y) = 0,$$

$$f_3(w, x, y) = 0.$$

Каждое из этих уравнений определяет на плоскости x, y семейство кривых; u, v, w — пометки на кривых в соответствующих семействах. Совокупность этих трех семейств дает сетчатую номограмму самого общего типа. Задав u, v, найдем w как пометку той кривой семейства $w = \text{const}$, которая проходит через точку пересечения кривых с пометками u и v.

Если все три семейства — прямолинейные, то $F = 0$ равносильно системе

$$x\varphi_1(u) + y\psi_1(u) + 1 = 0;$$

$$x\varphi_2(v) + y\psi_2(v) + 1 = 0;$$

$$x\varphi_3(w) + y\psi_3(w) + 1 = 0.$$

Три прямые пересекаются в одной точке, если определитель системы равен нулю. Так как u, v, w связаны уравнением $F(u, v, w) = 0$, то последнее эквивалентно такому уравнению:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \psi_1(u) & 1 \\ \varphi_2(v) & \psi_2(v) & 1 \\ \varphi_3(w) & \psi_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель в левой части равенства называется *определителем Массо*. Если уравнение $F(u, v, w) = 0$ приводится к этому виду, то его можно изобразить прямолинейной сетчатой номограммой.

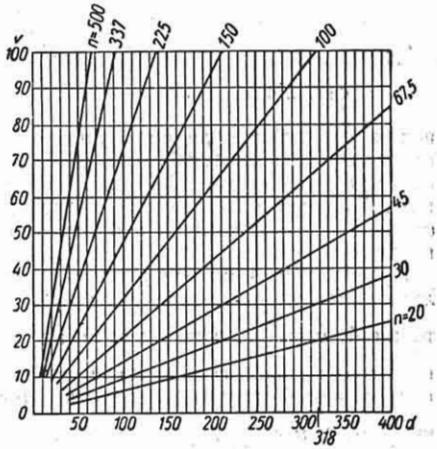
Практически удобно употреблять логарифмические сетки (на обеих осях шкалы логарифмические) или полулогарифмические сетки (на одной оси шкала равномерная, на другой — логарифмическая). Уравнение вида $w = u^\alpha v^\beta$ приводится логарифмированием к виду

$$\lg w = \alpha \lg u + \beta \lg v,$$

следовательно, при $x = \lg u$, $y = \lg v$ получим семейство прямых.

Пример. Построить сетчатую номограмму формулы скорости резания $v = \frac{\pi dn}{1000}$, причем даны рабочие интервалы переменных: v [1; 100], d [4; 400], n [20; 500]; длины шкал $l_v = l_d = 120$.

а) *Лучевая номограмма.* Уравнение имеет вид линейный относительно v, d, параметр прямолинейного семейства — n.



Фиг. 4. Лучевая номограмма скорости резания.

На осях d и v строим равномерные шкалы по уравнениям $S_1 = 0{,}3d$; $S_2 = 1{,}2v$, т. е. модули равны: $m_1 = \frac{120}{400 - 0} = 0{,}3$, $m_2 = \frac{120}{100 - 0} = 1{,}2$;

таким образом, интервалы несколько изменятся: d [0; 400], v [0; 100].

Для построения прямых семейства $v = kd$ $\left(k = \frac{\pi n}{1000}\right)$, выходящих из начала координат, надо на каждой прямой взять точку с одной и той же абсциссой $d = \frac{1000}{\pi} \approx 318$, тогда $v = n$; при $d = \frac{100}{\pi}$, $v = 10n$ (фиг. 4).

б) *Логарифмическая номограмма.*

$$\lg v = \lg d + \lg \frac{\pi n}{1000};$$

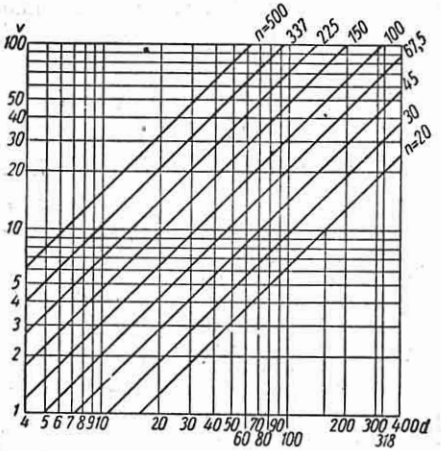
v [1; 100], d [4; 400], n [20; 500];

$$m_1 = \frac{120}{\lg 100 - \lg 1} = 60;$$

$$m_2 = \frac{120}{\lg 400 - \lg 4} = 60;$$

$$S_v = 60 \lg v; \quad S_d = 60 (\lg d - \lg 4).$$

На осях d и v строим логарифмические шкалы по этим уравнениям.



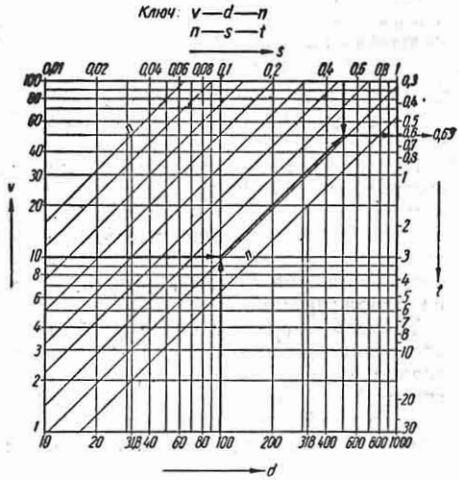
Фиг. 5. Логарифмическая номограмма скорости резания.

Для построения прямых, имеющих один и тот же угол наклона 45° к оси d, надо на каждой прямой взять точку $d = \frac{1000}{\pi}$, $v = n$. Чтобы параллельные прямые отстояли друг от друга на равных расстояниях, следует изменять n по закону геометрической прогрессии: $n_0 = 20$; $q = 1{,}5$; $n_1 = 20q = 30$, $n_2 = 20q^2 = 45$ и т. д. (фиг. 5).

Случай многих переменных. Если уравнение $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ заменить равносильной системой

$$F_1(z_1, z_2) = \alpha, \quad F_2(z_3, z_4) = \alpha,$$

где α — вспомогательная переменная, то можно построить две сетчатые номограммы, которые и позволят по трем значениям z_1, z_2, z_3 найти четвертое z_4. Если в каждой из номограмм одним и тем же α соответствуют одни и те же кривые, то при одинаковом их расположении и одинаковой градуировке α



Фиг. 6. Номограмма в паспорте токарного станка.

можно обе номограммы наложить так, чтобы кривые с одинаковыми пометками α совпадали. В полученной после совмещения номограмме пометки α на кривых можно не ставить. Метод можно обобщить на любое число переменных. Удобно им пользоваться в случае уравнения вида $f_1(z_1) + f_2(z_2) + \ldots + f_n(z_n) = 0$.

Пример. Построить сетчатую номограмму паспорта токарного станка по формуле $\pi d = 100vst$. Переменные изменяются в следующих границах: d [10; 1000], v [1; 100], s [0,01; 1,0], t [0,1; 10]:

$$\lg d = \lg v + \lg s + \lg \frac{100t}{\pi}.$$

Если обозначить

$$\lg v - \lg d = \lg \alpha, \quad -\lg s - \lg \frac{100t}{\pi} = \lg \alpha$$

и взять

$$\alpha = \frac{\pi n}{1000},$$

то первая номограмма была построена в предыдущем примере. Взяв $l_v = l_d = 200$, модули по 100, можно второе уравнение номографировать также семейством прямых с наклоном 45° к оси s. Совместив прямые с одинаковыми пометками n, получим номограмму в виде квадрата с логарифмическими шкалами переменных d, v, s, t на сторонах его. Сначала строят две шкалы d, v, как в первом примере. Затем на стороне, параллельной шкале d, строят в том же направлении

шкалу s. Прямые семейства под 45° проводят без пометок. Чтобы построить шкалу t, надо найти пометку одной из ее точек, а затем, зная модуль $m = 100$ и направление возрастания t, достраивают всю логарифмическую шкалу t (фиг. 6). При $d = 100$, $v = 10$, $s = 0{,}5$ получаем $t = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}63$. Ключ на фиг. 6 показывает, при помощи каких координат строят точки, лежащие на прямой с одной и той же пометкой n.

НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

Номограмма из выравненных точек состоит из трех шкал (прямолинейных или криволинейных) с пометками переменных соответственно z_1, z_2, z_3. Три точки, пометки которых являются решением уравнения $F(z_1, z_2, z_3) = 0$, лежат на одной прямой.

Такие номограммы более удобны для построения и пользования. Однако не всякое уравнение представляется номограммой из выравненных точек.

В дальнейшем f_l, φ_l, ψ_l и т. д. обозначают функции от одного переменного z_l.

Номографическим порядком уравнения $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ называется число различных функций, зависящих каждая от одной переменной, входящих в уравнение и соединенных действиями сложения и умножения. Произведение двух функций от одного аргумента считается новой функцией.

Например, $2z_1z_2^2 + z_2^2z_3 + z_1 = 0$ — уравнение 3-го порядка: полагая $z_1 = f_1$, $2z_2^2 = f_2$, $\frac{1}{2} z_3 = f_3$, получим

$$f_1f_2 + f_2f_3 + f_1 = 0.$$

Уравнение $z_1^3 + z_1^2z_2^2 + z_1z_3 + z_3 = 0$ — 5-го порядка.

Уравнение $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ номографируется, если оно не выше 6-го порядка. Для построения номограммы надо уравнение привести к канонической форме.

Наиболее общая форма номографируемого уравнения (форма Массо)

$$F(z_1, z_2, z_3) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 1 \\ f_2 & \varphi_2 & 1 \\ f_3 & \varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Канонические формы — частные случаи формы Массо. Иногда можно уравнение $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ привести к виду

$$Af_3 + B\varphi_3 + C\psi_3 = 0,$$

где A, B, C — функции z_1 и z_2. Обозначим $\frac{A}{C} = u$, $\frac{B}{C} = v$. Из этих двух равенств исключим z_1, потом z_2. Если после исключения получаются два линейных уравнения

$$uf_1 + v\varphi_1 + \psi_1 = 0;$$

$$uf_2 + v\varphi_2 + \psi_2 = 0$$

и, кроме того,

$$uf_3 + v\varphi_3 + \psi_3 = 0,$$

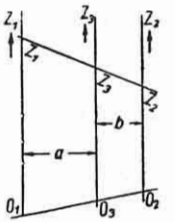
то, приравняв нулю определитель этой системы, мы получим $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ в форме определителя, а поделив строки на элементы одного из столбцов, приведем определитель к форме Массо.

Жанром номограммы называется число криволинейных шкал, составляющих номограмму.

Номограммы нулевого жанра

Номограмма с тремя параллельными шкалами для уравнения $f_1 + f_2 = f_3$.

На крайних прямых строят функциональные шкалы по уравнениям $S_1 = m_1f_1$; $S_2 = m_2f_2$; на промежуточной параллельной прямой строят шкалу $S_3 = m_3f_3$, где $m_3 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$. Расстояния a и b между S_1, S_3 и S_3, S_2 связаны соотношением $a : b = m_1 : m_2$ (фиг. 7).



Фиг. 7. Схема расположения шкал в номограмме для уравнения $f_1 + f_2 = f_3$.

Пример. $v = \frac{\pi a n}{1000}$; рабочие интервалы v [1; 100], a [5; 500], n [20; 500], $l_v = l_a = 200$;

$$\lg v - \lg a = \lg \frac{\pi n}{1000};$$

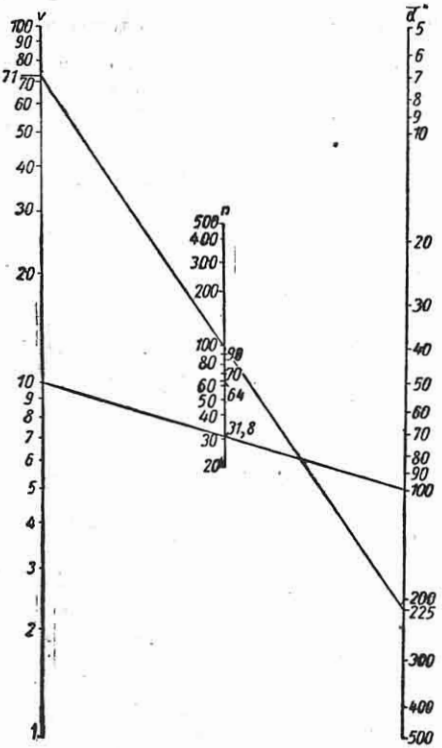
$$m_1 = m_2 = 100; \quad m_3 = \frac{m_1}{2} = 50.$$

Уравнения шкал: $S_1 = 100 \lg v$; $S_2 = 100 \times (\lg a - \lg 5)$.

Функции $\lg v$ и $\lg a$ входят в формулу с противоположными знаками, поэтому направления возрастания отрезков S_1 и S_2 противоположны. Шкала $S_3 = 50 \left(\lg \frac{\pi n}{1000} - \lg \frac{\pi n_0}{1000} \right)$ направлена в одну сторону со шкалой S_1. Пометка n_0 в начальной точке найдется из требования $S_3 = 0$;

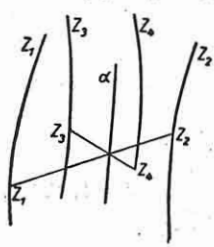
через эту точку пройдет прямая, соединяющая начальные точки на шкалах v и d, т. е. точки с пометками $v=1$, $d=5$.

Из $v=\frac{\pi dn}{1000}$ находим: $1=\frac{\pi\cdot 5\cdot n_0}{1000}$; $n_0=\frac{200}{\pi}\approx 64$ (фиг. 8).



Фиг. 8. Номограмма на параллельных шкалах для скорости резания.

Случай четырех и многих переменных. Как и в сетчатых номограммах, сначала $F(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$ заменяют равносильной системой $F_1(z_1, z_2)=\alpha$, $F_2(z_3, z_4)=\alpha$; α — новая вспомогательная переменная. Если построить номограммы на криволинейных шкалах для каждого уравнения так, чтобы шкала α имела один и тот же базис и одну и ту же градуировку, то обе номограммы можно совместить, и получится одна составная номограмма.



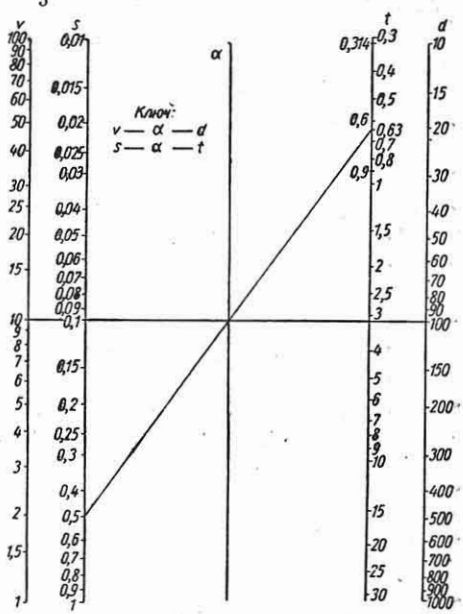
Фиг. 9. К построению номограммы с четырьмя переменными.

Зная z_1, z_2, z_3, можно найти z_4. Шкалу α не градуируют (немая шкала). Прямая, соединяющая точки с пометками z_1, z_2, пересекает немую шкалу в некоторой точке; через эту точку, а также через точку z_3 надо провести вторую прямую, пересекающую четвертую шкалу в искомой точке z_4 (фиг. 9). Метод обобщается на случай любого числа переменных.

Пример. $\pi d=100vst$ (см. пример в сетчатых номограммах).

$$\lg v-\lg d=\lg\alpha;\quad -\lg s-\lg\frac{100t}{\pi}=\lg\alpha.$$

Так как на всех прямолинейных шкалах v, d, s, t модули одинаковые, то в каждой из номограмм промежуточная (третья) шкала находится на одинаковых расстояниях от крайних шкал. Построив три шкалы v, d, s, надо для построения 4-й шкалы t найти пометку одной ее точки, например при $d=100$, $v=10$, $s=0{,}5$ найдем $t=\frac{\pi}{5}\approx 0{,}63$ (фиг. 10). Зная направление шкалы t



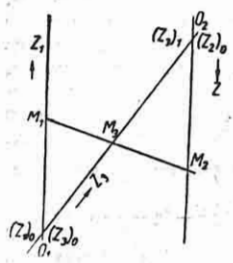
Фиг. 10. Номограмма на параллельных шкалах (в паспорте токарного станка).

и модуль, градуируем всю шкалу. Ключ $v-\alpha-d$, $s-\alpha-t$ показывает, какие точки лежат на одной прямой.

Z-номограмма для уравнения $\frac{f_1}{f_2}=f_3$. На двух параллельных прямых строим шкалы $S_1=m_1f_1$, $S_2=m_2f_2$ в противоположных направлениях, на третьей секущей прямой строится шкала

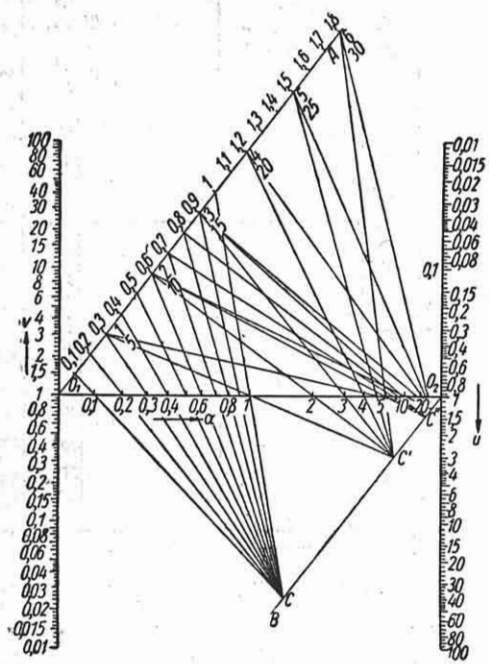
$$S_3=l\,\frac{kf_3}{kf_3+1},\quad k=\frac{m_1}{m_2},\quad l=O_1O_2$$

(фиг. 11). Третью шкалу можно построить геометрически как проективную шкалу для функции f_3. Пометки в начальных точках: на шкале z_1 в точке O_1 стоит пометка $(z_1)_0$, определяемая уравнением $f_1[(z_1)_0] = 0$; на шкале z_2 в точке O_2 стоит пометка $(z_2)_0$, для которой $f_2[(z_2)_0] = 0$; на шкале z_3 в точке O_1 стоит пометка $(z_3)_0$, для которой $f_3[(z_3)_0] = 0$; в точке O_2 той же шкалы стоит пометка $(z_3)_1$, для которой $\frac{1}{f_3[(z_3)_1]} = 0$.



Фиг. 11. К построению Z-номограммы.

Три точки M_1, M_3, M_2 с пометками z_1, z_3, z_2 (решение данного уравнения) лежат на одной прямой.



Фиг. 12. Z-номограмма.

Пример. Построить Z-номограмму уравнения $v = u^\alpha$, u [0,01; 100], v [0,01; 100], α [0; 30]. Длина крайних шкал $L = 200$. Имеем

$$\lg v = \alpha \lg u.$$

На параллельных прямых (фиг. 12) строим логарифмические шкалы, на секущей прямой — просто проективную шкалу для α.

Модули $m_1 = m_2 = \frac{200}{\lg 100 - \lg 0{,}01} = 50$; $S_1 = 50 \lg v$; $S_2 = 50 \lg u$.

Начальные точки O_1 и O_2 имеют пометки $v_0 = 1$; $u_0 = 1$, $S_3 = l\frac{\alpha}{\alpha+1}$. В точке O_1 $\alpha_0 = 0$; в точке O_2 $\alpha_1 = \infty$. При $S_3 = \frac{l}{2}$ $\alpha = 1$. По трем точкам $(0, 1, \infty)$ на прямой O_1O_2 можно построить проективную шкалу проектированием на O_1O_2 любой равномерной шкалы на вспомогательной прямой O_1A из центра C, лежащего на прямой $O_2B \parallel O_1A$. Пометки на O_1O_2 в точках пересечения с проектирующими лучами те же, что и на равномерной шкале (фиг. 12).

Номограмма позволяет производить действия: возведение в степень, извлечение корня и логарифмирование в пределах, указанных рабочими интервалами изменения u, v, α.

Общий случай

Номограмма (третьего жанра) из трех криволинейных шкал будет самой общей номограммой из выравненных точек.

Если уравнение приведено к виду

$$F(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 1 \\ f_2 & \varphi_2 & 1 \\ f_3 & \varphi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то получаются уравнения шкал:

$$x_1 = f_1; \quad x_2 = f_2; \quad x_3 = f_3;$$
$$y_1 = \varphi_1; \quad y_2 = \varphi_2; \quad y_3 = \varphi_3.$$

Каждая пара равенств $x_l = f_l(z_l)$, $y_l = \varphi_l(z_l)$ — параметрические уравнения с параметром z_l некоторой кривой. В точках этой кривой ставятся соответствующие пометки z_l; получается криволинейная шкала. Три точки на трех шкалах с пометками z_1, z_2, z_3, составляющими решение данного уравнения, лежат на одной прямой.

Если с указанными уравнениями не получается удобной номограммы, то для ее приспособления можно ввести в уравнения константы, произволом которых пользуются для изменения расположения шкал и их градуировки.

Предыдущие уравнения можно заменить следующими:

$$x_l = \frac{a_1 f_l + b_1 \varphi_l + c_1}{a_3 f_l + b_3 \varphi_l + c_3}; \qquad (l = 1, 2, 3)$$

$$y_l = \frac{a_2 f_l + b_2 \varphi_l + c_2}{a_3 f_l + b_3 \varphi_l + c_3}.$$

Здесь произвольными будут восемь постоянных (отношения девяти коэффициентов к одному из них).

ГЛАВА XVI

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ *

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

В технике приходится иметь дело со случайными событиями и связанными с ними случайными величинами. Например, получение размера детали в заданных границах — случайное событие; отклонения размера сделанной детали от номинала, ошибки измерения — случайные величины.

Под *вероятностью события* A понимают отношение числа m случаев, благоприятствующих данному событию A, к числу n всех случаев (равновозможных, единственновозможных и несовместимых, т. е. взаимно исключающих друг друга) и обозначают

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Невозможному событию ($m = 0$) соответствует вероятность 0, достоверному (благоприятствуют все n возможных случаев) — вероятность 1. Вероятность случайного события заключена между 0 и 1.

Несовместимые случайные события, сумма вероятностей которых равна 1, образуют полную группу событий.

Пример. В партии, содержащей 100 деталей, имеются 5 деталей с отклонением 0,05 от номинала; 10 деталей с отклонением 0,10; 40 деталей с отклонением 0,15; 35 деталей с отклонением 0,20 и 10 деталей с отклонением 0,25. Если размер взятой детали отличается от номинала не менее 0,15 и не более 0,20, то такая деталь может быть употреблена при сборке без пригонки. Найти вероятность события A, состоящего в том, что если взять из данной партии деталь наудачу, то сборка будет произведена без пригонки. Случайным событием является появление той или иной детали при взятии ее из партии. Все события равновозможны, единственновозможны и несовместимы. Число всех таких случаев равно 100. Число случаев, благоприятствующих сборке без пригонки, равно 75 (40 деталей с отклонением 0,15 и 35 деталей с отклонением 0,20); искомая вероятность $P(A) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

Если имеется бесконечное множество равновозможных, единственновозможных и несовместимых случаев и всей совокупности их может быть дана количественная характеристика S в некоторых мерах длины, площади и т. п., а части этой совокупности, благоприятствующей наступлению рассматриваемого события A, может быть дана аналогичная характеристика в виде значения s в тех же мерах, то вероятность появления события A определяется отношением

$$P(A) = \frac{s}{S}.$$

Пример. При выполнении некоторой разметочной операции наносится разметочная точка в пределах круга диаметром 1 *мм*, причем положение точки в любом месте круга предполагается равновозможным. Найти вероятность события A, состоящего в том, что точка окажется в пределах операционного допуска $\pm 0{,}2$ *мм* по одной координатной оси и $\pm 0{,}3$ *мм* по другой оси. Центр круга — в начале координат.

Количественной характеристикой бесконечного множества всех возможных случаев является площадь круга $S = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}78$ *мм*^{2}. Количественной характеристикой бесконечного множества случаев, благоприятствующих событию A, является площадь прямоугольника $s = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$ *мм*^{2}. Отсюда $P(A) = \frac{0{,}24}{0{,}78} \approx 0{,}31$.

Теорема сложения. Вероятность P появления любого из нескольких несовместимых событий, входящих в одну полную группу, равна сумме вероятностей этих событий.

Если n несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу*, т. е. $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$, то вероятность того, что появится или событие A_1, или $A_2, \ldots$, или A_k ($k < n$), равна P (или A_1, или $A_2, \ldots$, или A_k) $= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$.

* См. литературу на стр. 350: [103], [107], [110], [106], [104].

Пример. Пусть в примере с партией в 100 деталей (стр. 321) взятые наудачу детали с одним из отклонений есть событие A_i, где i — номер отклонения от 1 до 5 в указанном выше порядке. По определению вероятности можно составить таблицу распределения вероятностей этих событий:

A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
$P(A)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\sum_{i=1}^{5} P(A_i) = \frac{100}{100} = 1$

Событие, состоящее в том, что взятая деталь имеет отклонение от номинала не менее 0,15 и не более 0,2, имеет по теореме сложения вероятность

$$P(\text{или } A_3, \text{ или } A_4) = \frac{40}{100} + \frac{35}{100} = 0{,}75.$$

Теорема умножения. При рассмотрении нескольких случайных событий они называются независимыми, если вероятность любого из этих событий не зависит от наступления или ненаступления других рассматриваемых событий.

Вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(\text{и } A_1, \text{ и } A_2, \ldots, \text{ и } A_k) = P(A_1)\,P(A_2), \ldots, P(A_k).$$

Пример. В урне n шаров с двумя признаками. Пусть вероятность вынуть шар с первым признаком есть p, вероятность вынуть шар со вторым признаком равна $q = 1 - p$. При возвращении шара обратно в урну вероятность вынуть подряд 2 раза шар с первым признаком равна p^2, вероятность вынуть подряд 2 раза шар со вторым признаком q^2, вероятность вынуть подряд в определенном порядке сначала шар с первым признаком, затем со вторым равна pq, такова же вероятность вынуть шары с разными признаками, но в другой последовательности. Вероятность вынуть шары с разными признаками, но безразлично, в каком порядке, равна $pq + qp = 2pq$.

Если события A и B зависимы, то *условной вероятностью* события B называется вероятность, вычисляемая в предположении, что произошло событие A, и обозначается через $P(B)_A$. Если обозначить $P(\text{и } A, \text{ и } B) = P(AB)$, то

$$P(AB) = P(A)\,P(B)_A;$$

из этого равенства можно найти условную вероятность $P(B)_A$.

Случайные величины

Если дискретная случайная величина может принимать любое значение от x_1 до x_n, то совокупность (*распределение*) вероятностей p всех возможных значений является количественной характеристикой дискретной случайной величины.

Распределение вероятностей задается таблицей

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_n	
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	....	$p(x_n)$	$\sum_i p(x_i) = 1$

Функция $p(x_i)$ называется *законом распределения* дискретной случайной величины.

Если случайная величина является непрерывной, принимающей всякое значение в некотором промежутке (области) ее значений, то количественной характеристикой такой случайной величины является *плотность вероятности* или *дифференциальная функция распределения* $\varphi(x)$, т. е. предел отношения вероятности того, что случайная величина X окажется в промежутке $(x,\ x + \Delta x)$, к длине Δx при $\Delta x \to 0$:

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

График функции $\varphi(x)$ называется *кривой распределения* случайной величины.

Вместо законов распределения $p(x_i)$ и $\varphi(x)$ количественной характеристикой может служить *интегральная функция распределения* $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина X имеет значение, меньшее данного значения x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Если x принимает значения от a до b, то $F(x) = 0$ для $x \leqslant a$, $F(x) = 1$ для $x \geqslant b$. Для дискретных случайных величин $F(x) = \sum_i p(x_i)$, где $x_i < x$; вероятность того, что случайная величина x находится в заданных пределах

$$x_k \leqslant x < x_l,$$

равна по теореме сложения

$$P(x_k \leqslant x < x_l) = \sum_{i=k}^{l} p(x_i).$$

Для непрерывных случайных величин

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x) = \frac{dF}{dx};$$

$$P(x' \leqslant x < x'') = \int_{x'}^{x''} \varphi(x)\,dx = F(x'') - F(x').$$

УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Часто встречаются следующие два закона распределения дискретных случайных величин.

1. Биномиальный закон распределения встречается в задаче о вероятности сложного события при повторных испытаниях над простым событием с постоянной вероятностью p в каждом отдельном испытании.

Пусть x_i принимает значения $x_i = 0, 1, 2, \ldots, n$; тогда при n испытаниях вероятность появления события x_i раз равна

$$p(x_i) = C_n^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} = \frac{n!}{x_i!\,(n-x_i)!} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}.$$

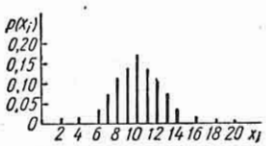
Примеры:

1) При $p = 1/2$, $n = 5$ закон распределения симметричный (см. фиг. 1):

$$p(x_i) = C_5^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 C_5^{x_i};$$

$p(0) = 1/32 \approx 0{,}03$ $\quad p(3) = 10/32$
$p(1) = 5/32$ $\quad p(4) = 5/32$
$p(2) = 10/32$ $\quad p(5) = 1/32$

Фиг. 1. Симметрическое распределение случайных величин в биномиальном законе.



Фиг. 2. Симметрическое распределение случайных величин в биномиальном законе.

2) $p = 1/2$, $n = 20$, $p(x_i) = C_{20}^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$;

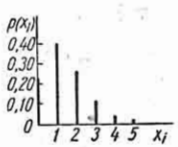
$p(0) = (1/2)^{20}$; $p(1) = 20\,(1/2)^{20}$; $p(2) = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}(1/2)^{20}$; $\ldots$, $p(10) = C_{20}^{10}(1/2)^{20} \approx 0{,}176$, $\ldots$, $p(20) = (1/2)^{20}$ (фиг. 2).

3) При $p \neq 1/2$ закон распределения несимметричный.

Если $p = 1/4$, $n = 5$, то

$$p(x_i) = C_5^{x_i} \left(\frac{1}{4}\right)^{x_i} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x_i};$$

$p(0) = (3/4)^5 \cdot 1 \approx 0{,}24$;
$p(1) = (3/4)^5 \cdot 5/3 \approx 0{,}40$;
$p(2) = (3/4)^5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{3^2 \cdot 1 \cdot 2} \approx 0{,}26$;
$p(3) = (3/4)^5 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \approx 0{,}1$;
$p(4) = \frac{15}{4^5} \approx 0{,}015$;
$p(5) = (1/4)^5 = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$ (фиг. 3).



Фиг. 3. Несимметрическое распределение в биномиальном законе.

4) При $p = 1/4$, $n = 20$ несимметричность уменьшается. При вычислениях следует пользоваться таблицами факториалов и степеней целых чисел.

При больших значениях x_i и n можно использовать приближенную формулу

$$p(x_i) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sigma}\Phi'(z),$$

где

$$z = \frac{x_i - a}{\sigma}; \quad a = np; \quad \sigma = \sqrt{npq},$$

$q = 1 - p$; $\Phi'(z)$ см. в табл. XVIII (стр. 60).

2. Распределение по закону Пуассона встречается в задаче о вероятности повторного события, если $p \to 0$ при $n \to \infty$, причем $np = a = \text{const}$:

$$p(x_i) = \frac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a}.$$

Наивероятнейшее число $x_i = (x_i)_m$ появлений события при биномиальном распределении находится из неравенства

$$np - q < (x_i)_m < np + p,$$

если $np - q$ и $np + p$ — дроби, и из равенств

$$(x_i)_m = np - q; \quad (x_i)_{m+1} = np + p,$$

если эти числа целые; в этом случае вероятности $(x_i)_m$ и $(x_i)_{m+1}$ одинаковы.

Пример. При $p = 1/2$, $q = 1/2$, $n = 5$ имеем $np - q = 5 \cdot (1/2) - (1/2) = 2$; $np + p = 5 \cdot (1/2) + (1/2) = 3$, т. е. числа 2 и 3 наивероятнейшие числа появлений события. Их вероятности одинаковы (см. выше пример 1) и самые большие.

Для непрерывных случайных величин имеет наибольшее употребление **нормальный закон распределения случайных величин** (закон Гаусса)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где среднее значение $E(x) = \bar{x}$, дисперсия $D(x) = \sigma^2$ определены далее (стр. 326). Если обозначить $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ (мера точности), то

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-\bar{x})^2}.$$

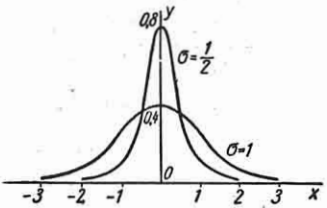
Вычислять $\varphi(x)$ удобно по табл. XVIII (стр. 60):

$$\varphi(z) = \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

где

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}.$$

С увеличением σ^2 уменьшается максимум $\varphi(x)$, равный $\varphi(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989\frac{1}{\sigma}$. На фиг. 4 дан график $\varphi(x)$ при $\bar{x} = 0$, $\sigma = \frac{1}{2}$ и $\sigma = 1$. Площадь под графиком остается неизменной, и при увеличении дисперсии увеличивается



Фиг. 4. График нормального распределения.

вероятность бо́льших значений случайной величины.

Точки перегиба графика $\varphi(x)$ имеют абсциссы $x_1 = \bar{x} - \sigma$ и $x_2 = \bar{x} + \sigma$, соответствующие им ординаты $y_1 = y_2 = \frac{y_{max}}{\sqrt{e}} = 0{,}6065\,y_{max}$.

Вероятность нахождения x в заданных пределах от x_1 до x_2

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

$$P(-\infty < x < \infty) = 1.$$

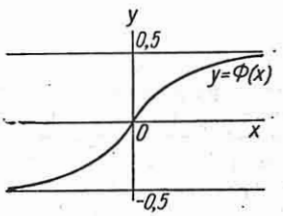
При помощи интеграла

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

называемого *функцией Лапласа* или *интегралом вероятностей*,

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}\right).$$

Таблица значений $\Phi(z)$ приведена на стр. 61 для $z > 0$; для $z < 0$ пользуются свойством: $\Phi(-z) = -\Phi(z)$. График



Фиг. 5. График функции Лапласа.

$\Phi(z)$ — интегральной функции распределения случайных величин по закону Гаусса — дан на фиг. 5.

Имеются таблицы функции $\mathrm{erf} z = 2\theta(z)$, где

$$\theta(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\,dt.$$

Переход от $\Phi(z)$ к $\theta(z)$ совершается по формулам

$$\Phi(z) = \theta\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad \theta(z) = \Phi(z\sqrt{2}).$$

На практике в вопросах математической статистики вместо $P(A)$ вводится *частость* $W(A)$ появления случайного события A:

$$W(A) = \frac{M}{N},$$

где M — число появлений события A, N — число всех испытаний, при которых это событие могло появиться.

$W(A)$ называют *статистической вероятностью*, $P(A)$ — теоретической или математической вероятностью. При увеличении числа испытаний частость приближается к вероятности (см. закон больших чисел).

Функция $W(x_i)$ называется статистическим законом распределения дискретной случайной величины, и ее значения вычисляются по формуле

$$W(x_i) = \frac{N_i}{N},$$

где N_i — число наблюденных значений x_i; N — число всех наблюдений.

Для непрерывной случайной величины x область полученных на практике ее значений разделяется на несколько промежутков одинаковой ширины Δx, и число значений величины x в каждом промежутке называется *частотой*. Таблица частот называется *статистическим распределением*.

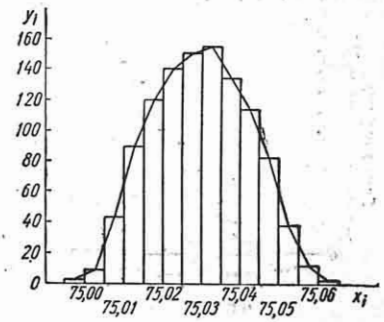
Аналогично кривой распределения $\varphi(x)$ употребляются гистограмма и полигон распределения.

Гистограмма распределения состоит из прямоугольников, построенных на промежутках Δx, площади которых пропорциональны числам значений случайной величины, приходящимся на данный промежуток. При одинаковой ширине промежутков высоты прямоугольников пропорциональны частотам.

Полигон распределения получится, если соединить прямыми середины верхних сторон прямоугольников гистограммы (при одинаковых Δx). В пределе при $\Delta x \to 0$ полигон превращается в кривую распределения. Полигон распределения — практическая кривая распределения.

Пример. В таблице приведены результаты измерений диаметров отверстий втулок от $x_{min} = 75{,}000$ *мм* до $x_{max} = 75{,}060$ *мм* в количестве $N = 1100$ шт. Промежутки $(x_i - 1,\ x_i)$ означают, что диаметр $x > x_{i-1}$ *мм* и $x \leqslant x_i$ *мм*; N_i — число втулок в соответствующем промежутке.

Если по горизонтальной оси отложить значения x_i, а по вертикальной — ординаты y_i, пропорциональные N_i (фиг. 6), то полученный ступенчатый график, состоящий из прямоугольников, будет гистограммой распределения x_i. Площадь каждого прямоугольника с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ пропорциональна частоте N_i. Если принять $\Delta x_i = 1$, $y_i = N_i$, то площадь всей гистограммы равна N. Называют N *объемом совокупности* предметов.



Фиг. 6. Гистограмма и полигон распределения.

На той же фиг. 6 дан полигон распределения x_i.

Сумма площадей прямоугольников построенной гистограммы между $x = \alpha$ и $x = \beta$ дает частоту S значений x между α и β:

$$S(\alpha < x < \beta) = \sum_{\alpha}^{\beta} N_i.$$

Если это значение S отложить как ординату, соответствующую β, то получим ступенчатую кривую накопленных

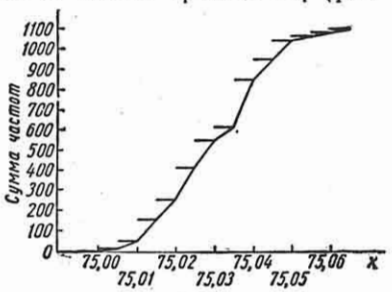
$x_i - 1,\ x_i$	Менее 75,000	75,000—75,005	75,005—75,010	75,010—75,015	75,015—75,020	75,020—75,025	75,025—75,030
N_i	3	9	45	91	121	139	150

Продолжение

$x_i - 1,\ x_i$	75,030—75,035	75,035—75,040	75,040—75,045	75,045—75,050	75,050—75,055	75,055—75,060	Свыше 75,060
N_i	155	136	116	84	38	11	2

частот, что соответствует интегральной кривой распределения (фиг. 7).

Огивой называется ломаная линия, соединяющая точки, абсциссы которых соответствуют границам частных интервалов Δx_l, а ординаты суть суммы частот, соответствующие всем интервалам слева от взятой границы Δx_l (фиг. 7).



Фиг. 7. Огива.

Широтой распределения называется разность $x_{\max} - x_{\min}$ для случайной величины x.

В случае двухмерного распределения непрерывных случайных величин (x, y) указывается область значений x, y и плотность вероятности $\varphi(x, y)$.

Функция $\varphi(x, y)$ определяет поверхность распределения; объем, ограниченный этой поверхностью и плоскостью xy, должен быть равен 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Вероятность нахождения точки $A(x, y)$ в заданной области R равна

$$P(A \subset R) = \iint_R \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Точка плоскости с координатами

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, x\, dx\, dy;$$

$$y_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, y\, dx\, dy$$

называется *центром группирования*.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Характеристики (некоторые параметры) *расположения и рассеивания* случайных величин позволяют численно выразить существенные особенности распределений случайных величин

Характеристикой расположения служит *среднее значение* $E(x)$ случайной величины, которое определяет *центр распределения* (группировки, рассеивания) значений случайной величины, т. е. такую точку, около которой группируются значения случайной величины.

Если случайная величина x принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Для непрерывных случайных величин

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\, dx.$$

Среднее значение $E(x)$ еще называют *математическим ожиданием* случайной величины. Оно обозначается $M(x) = E(x) = \text{М. О. } x = \bar{x} = a$. Далее будем обозначать $E(x) = \bar{x}$.

Характеристикой рассеивания служит *дисперсия* $D(x)$ случайной величины

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 p_i = E(x - \bar{x})^2$$

и

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \varphi(x)\, dx.$$

Дисперсия постоянной, т. е. неслучайной, величины равна нулю.

Среднее квадратическое отклонение, или *стандарт*, σ связан с дисперсией формулой $\sigma^2 = D(x)$.

Отношение $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ называется *коэффициентом изменчивости* или *вариации*.

Практически удобно вычислять $\bar{x}$ и σ следующим образом: если x_l встречается n_l раз, $\Sigma n_l = n$, то среднее арифметическое (средняя взвешенная)

$$\bar{x} = \frac{\sum n_l x_l}{n} = a + \frac{\sum n_l (x_l - a)}{n},$$

где a — произвольное число и подбирается так, чтобы числа $x_l - a$ были возможно меньше;

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{\sum n_l (x_l - a)^2}{n} - (\bar{x} - a)^2.$$

Пример. Если величина $x = 2, 3, 4, 5, 6$ появилась соответственно $n_i = 3, 8, 10, 7, 2$ раза, то взяв $a = 4$, вычисляем:

x	n_i	$x-a$	$n_i(x-a)$	$n_i(x-a)^2$
2	3	−2	−6	12
3	8	−1	−8	8
4	10	0	0	0
5	7	1	7	7
6	2	2	4	8
Сумма	30		−3	35

$$\bar{x} = 4 + \frac{-3}{30} = 4 - 0{,}1 = 3{,}9;$$

$$\sigma^2 = \frac{35}{30} - (3{,}9-4)^2 = \frac{35}{30} - 0{,}1^2 =$$

$$= 1{,}167 - 0{,}01 \approx 1{,}16.$$

Для характеристики средней части всей области изменения x употребляются мода и медиана.

Мода — наивероятнейшее значение случайной величины x.

Медиана (Me) — такое значение x, что вероятность $x < Me$ равна вероятности $x > Me$.

Для непрерывной случайной величины

$$\int_{-\infty}^{Me} \varphi(x)\,dx = \int_{Me}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Средним арифметическим отклонением d случайной величины x называется

$$d = \sum_i |x_i - \bar{x}|\, p_i$$

и

$$d = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}|\, \varphi(x)\,dx.$$

Вероятным отклонением r случайной величины x называется такое отклонение от медианы Me, что вероятность отклонений, меньших его по абсолютной величине, равна вероятности отклонений, больших его по абсолютной величине, т. е.

$$\int_{Me-r}^{Me+r} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Свойства σ: 1) дисперсия D и стандарт σ суть меры рассеяния, т. е. чем больше дисперсия или стандарт величины x, тем более рассеяны около средней ее значения, тем более она изменчива; с уменьшением D и σ рассеяние и изменчивость x уменьшаются;

2) стандарт имеет размерность величины x, для которой он вычислен;

3) средний квадрат отклонений x от какой-нибудь величины, отличной от средней, будет более D;

4) сложение средних и дисперсий: если для нескольких совокупностей, например трех, с объемами n_1, n_2, n_3 их средние суть $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ и дисперсии σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, то для общей совокупности объемом $n = n_1 + n_2 + n_3$ средняя

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n},$$

а дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + n_3\sigma_3^2}{n} +$$

$$+ \frac{n_1(\bar{x}_1-\bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2-\bar{x})^2 + n_3(\bar{x}_3-\bar{x})^2}{n}.$$

Это свойство показывает изменение D при соединении в одну совокупность нескольких однородных статистических совокупностей.

Для рассмотренных выше законов распределения имеем:

1) для биномиального распределения среднее значение $\bar{x} = E(x_j) = np$; дисперсия $D(x_i) = npq$, стандарт $\sigma = \sqrt{npq}$;

2) для распределения по закону Пуассона $\bar{x} = a$, $D = a$, $\sigma = \sqrt{a}$; равенство $\bar{x} = D$ характерно для закона Пуассона;

3) для нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$, среднее значение $E(x) = \bar{x}$, дисперсия $D(x) = \sigma^2$, среднее квадратическое отклонение есть σ.

Для этого распределения существуют следующие зависимости между отклонениями σ, d, r и мерой точности h:

$\sigma =$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, d \approx 1{,}253d$	$\frac{r}{\rho\sqrt{2}} \approx 1{,}432r$
$d =$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma \approx 0{,}798\sigma$	$\frac{r}{\rho\sqrt{\pi}} \approx 1{,}133r$
$r =$	$\sqrt{2}\,\rho\sigma \approx 0{,}675\sigma$	$\sqrt{\pi}\,\rho d \approx 0{,}345d$
$h =$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \approx \frac{0{,}707}{\sigma}$ | $\frac{1}{d\sqrt{\pi}} \approx \frac{0{,}564}{d}$	$\frac{\rho}{r} \approx \frac{0{,}477}{r}$

Здесь $\rho = 0{,}476936\ldots$

Для отклонения 3σ вероятность того, что $|x| < 3\sigma$, равна $P(|x| < 3\sigma) = 0{,}9973$, т. е. за пределами $\pm 3\sigma$, будет 0,27% отклонений (при средней $\bar{x} = 0$).

Пример. Если при нормальном распределении числовой характеристики x качества изделия предельные отклонения x от ее средней $\bar{x}$ принять равными -3σ и $+3\sigma$, то количество брака, обусловленного тем, что $x < \bar{x} - 3\sigma$ или $x > \bar{x} + 3\sigma$, составит 0,27%.

Если в данной совокупности S, называемой *генеральной*, содержится N предметов, имеющих отметку x, и если эта отметка принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_s$, частоты которых суть соответственно $N_1, N_2, \ldots, N_s$ ($\Sigma N_i = N$), то число N называется *объемом генеральной совокупности*, а среднее значение x называется *генеральной средней*: $a = \frac{1}{N}\sum N_i x_i$.

Если выбрать из S наудачу n предметов (возвращая взятый предмет обратно в S), то образуется *повторная случайная выборка*: $x_1, x_2, \ldots, x_s$ с частотами $n_1, n_2, \ldots, n_s$ ($\Sigma n_i = n$); если же взятый предмет не возвращается в S, то образуется *бесповторная случайная выборка*. Средняя выборки называется *выборочной средней*: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i$.

При большом n и $N \gg n$ имеем $a \approx \bar{x}$.

Распределение Стьюдента применяется для оценки вероятности отклонения выборочной средней от генеральной средней. Если случайная величина $t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_{\bar{x}}}$, где $\bar{x}$—выборочная средняя, a — генеральная средняя,

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

x_i — выборочные значения, то при любом значении $n \geqslant 2$ величина t имеет дифференциальным законом распределения вероятностей выражение

$$s(t) = c\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)};$$

$\Gamma(x)$ — функция гамма (стр. 178, табл. X на стр. 41). Функция $s(t)$ представляет плотность вероятностей в распределении Стьюдента.

Этим распределением пользуются для $n < 20$; если $n \geqslant 20$, то распределение Стьюдента можно заменить нормальным (со средней 0 и дисперсией 1).

В табл. на стр. 334 даны значения $S(z)$ интегральной функции распределения для закона Стьюдента

$$S(z) = \int_{-\infty}^{z} s(t)\,dt.$$

Величина $S(z)$ есть вероятность неравенства $-\infty < t < z$ для данного n.

Вероятность неравенства $-z < t < +z$:

$$P(-z < t < z) = \int_{-z}^{+z} s(t)\,dt =$$

$$= 2\int_{0}^{z} s(t)\,dt = 2S(z) - 1.$$

Вероятность

$$P(|t| \geqslant z) = 2[1 - S(z)].$$

Пример. Найти вероятность значений t таких, что $|t| \geqslant 2{,}5$ для выборок объема $n = 7$. По табл. на стр. 334 для $z = 2{,}5$ находим $S(z) = 0{,}9765$, следовательно,

$$P(|t| \geqslant 2{,}5) = 2(1 - 0{,}9765) = 0{,}047.$$

Значит, вероятность значений t, лежащих между $-2{,}5$ и $2{,}5$, равна $1 - 0{,}047 = 0{,}953$.

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Закон больших чисел устанавливает близость между вероятностью случайного события и частостью появления его при большом числе испытаний. Наиболее общая форма этого закона дана П. Л. Чебышевым и А. А. Марковым.

Теорема Чебышева. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Обозначим через $\bar{x}$ среднее арифметическое наблюденных значений величин x_i:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n},$$

а через x_0 — среднее арифметическое математических ожиданий:

$$x_0 = \frac{\sum a_i}{n}.$$

Если дисперсии ограничены

$$\sigma_i^2 \leqslant L,$$

где L — постоянная, то вероятность P выполнения неравенства

$$|\bar{x} - x_0| < \varepsilon$$

удовлетворяет условию

$$P > 1 - \frac{L}{n\varepsilon^2}.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении n вероятность P становится сколь угодно близкой к достоверности, как бы мало ни было положительное число ε.

Частным случаем теоремы Чебышева является *теорема Пуассона*: если при n независимых испытаниях вероятность наступления события A при k-м испытании равна p_k и если m — общее число появлений A при n испытаниях, то

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Частным случаем теоремы Пуассона является теорема Бернулли: если $p_k = \text{const} = p$, то

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева имеет применение в теории ошибок наблюдений. Пусть измеряется некоторая неизвестная физическая постоянная a. Производим ряд независимых друг от друга измерений. Результат каждого из этих измерений будет случайной величиной. Пусть x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — эти случайные величины. Допустим, как это делает теория ошибок наблюдений, что средние значения этих величин одинаковы и равны как раз измеряемой постоянной a, т. е.

$$E(x_1) = \ldots = E(x_n) = a.$$

Это первое допущение означает, что наши измерения свободны от систематических ошибок.

Допустим, далее, что дисперсии x_1, $x_2, \ldots, x_n$ равномерно ограничены, т. е.

$$D(x_1) < L, \ldots, D(x_n) < L,$$

где L — постоянная.

Это второе допущение означает, что случайные рассеяния результатов наблюдений вокруг измеряемой величины не могут безгранично возрастать.

Сделанные два допущения позволяют применить к величинам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ теорему Чебышева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Это значит, что, увеличивая число наблюдений, можно достичь практической уверенности в том, что среднее арифметическое из результатов наблюдений будет как угодно мало отличаться от измеряемой постоянной.

Теорема Маркова. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и дисперсиями $\sigma_1^2 = b_1, \sigma_2^2 = b_2, \ldots, \sigma_n^2 = b_n$, которые таковы, что при $n \to \infty$

$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n^2} \to 0.$$

Обозначим через $\bar{x}$ среднее арифметическое наблюденных значений величин x_i, через x_0 — среднее арифметическое математических ожиданий:

$$x_0 = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Тогда, какова бы ни была положительная постоянная ε,

$$P(|\bar{x} - x_0| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n^2\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева получается отсюда как частный случай, когда все b_k равномерно ограничены.

При вычислении P на основании предыдущих теорем получается недостаточно точный результат.

Более точное значение P получается при помощи следующей предельной теоремы А. М. Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и с дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = B \quad \text{и} \quad d_i = E\,|x_i - a_i|^{2+\varepsilon},$$

где ε — положительное постоянное.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{B^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = 0,$$

то вероятность P неравенства

$$z_1 \sqrt{B} < \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i < z_2 \sqrt{B}$$

с увеличением n неограниченно приближается к значению интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Оценка частости. Если в генеральной совокупности, состоящей из N предметов (N — объем совокупности), имеется M предметов с признаком A, то вероятность появления A при одном испытании равна $p = \frac{M}{N}$. Пусть сделана бесповторная выборка, объем которой $n < N$ и признак A появился m раз; тогда частость $W(A) = \frac{m}{n} \approx p$. Для оценки этого приближенного равенства пользуются приближенной формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

где

$$\sigma = \sqrt{\frac{m(n-m)}{n^3}\left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

а ε называется *точностью*.

Если задана ε, то находят P и, обратно, задав P, можно найти ε. Имеем

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)},$$

откуда

$$n \geqslant \frac{1}{4\sigma^2 + \frac{1}{N}}.$$

Зная объем генеральной совокупности N, точность ε и вероятность $\Phi(z)$, по которой находим z, $z = \frac{\varepsilon}{\sigma}$, можем определить объем бесповторной выборки.

Примеры:

1) Из партии, содержащей 1000 деталей, сделана выборка в 100 шт., в которой оказалось 10 деталей бракованных. Найти вероятность, что во всей партии брак не превышает 15%. Здесь $N = 1000$, $n = 100$, $m = 10$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$, p — неизвестно, но $\max \left|\frac{m}{n} - p\right| = \left|\frac{10}{100} - \frac{15}{100}\right| = 0{,}05$.

Вычисляем:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}05\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}05}{\sigma}\right);$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{10 \cdot 90}{100^3}\left(1 - \frac{100}{1000}\right)} = 0{,}0285;$$

$\Phi\left(\frac{0{,}05}{0{,}0285}\right) = \Phi(1{,}75) = 0{,}4599$ (по табл. XIX, стр. 61);

$$P = 0{,}92.$$

2) Если $N = 1000$, точность $\varepsilon = 0{,}05$ и вероятность $P = 0{,}95$, следовательно, $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}475$, то по табл. XIX (стр. 61) $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 1{,}96$, откуда $\sigma = \frac{0{,}05}{1{,}96}$.

Находим

$$n = \frac{1}{4\frac{0{,}05^2}{1{,}96^2} + \frac{1}{1000}} = \frac{1}{0{,}0036} = 277{,}8.$$

Это означает, что, взяв случайную выборку $n \geqslant 278$, мы получим, что с вероятностью 0,95 будет выполняться неравенство

$$\frac{m}{n} - 0{,}05 < p < \frac{m}{n} + 0{,}05.$$

ТЕОРИЯ ОШИБОК И СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Полученные из опыта (наблюдение, измерение) величины содержат случайные ошибки, которые не поддаются точному учету и в каждом отдельном измерении действуют различно. Учесть такие ошибки можно только в среднем. Если исследуемые величины определяются непосредственно, то обработка полученных результатов ведется статистическими приемами. Если же величины определяются косвенным путем (посредственные измерения), то при наличии случайных ошибок и случайных величин обработка результатов производится по способу наименьших квадратов.

Непосредственные измерения

Обозначим измеряемую постоянную величину через a, полученные при измерении значения — через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и предположим, что эти измерения — *равноточные* или *одинакового веса* (т. е. они произведены одним инструментом, при одинаковых условиях, одним наблюдателем).

Искомая величина

$$a \approx \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Оценка этого приближенного равенства состоит в том, что если x_i — случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения вероятностей

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то требуется указать вероятность

$$P(\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon).$$

Для любых $n \geqslant 2$ величина $t = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_{\bar{x}}}$ подчиняется закону распределения Стьюдента, причем

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Величины $x_i - \bar{x}$ называются *остаточными погрешностями* (или кажущимися ошибками).

Вероятность

$$P(\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon) = 2\int_0^z s(t)\,dt = \alpha,$$

где $\varepsilon = z\sigma_{\bar{x}}$, т. е. с вероятностью α можно утверждать, что значение a заключено между числами $\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}}$ и $\bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$.

В частности, с вероятностью 0,682 можно утверждать, что

$$a = \bar{x} \pm 1{,}14\sigma_{\bar{x}} \quad \text{для} \quad n = 5;$$
$$a = \bar{x} \pm 1{,}06\sigma_{\bar{x}} \quad \text{»} \quad n = 10;$$
$$a = \bar{x} \pm 1{,}04\sigma_{\bar{x}} \quad \text{»} \quad n = 15.$$

Для $n > 20$ вероятность $P(|a - \bar{x}| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$. Поэтому с той же вероятностью 0,682

$$a = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}};$$

с вероятностью 0,50

$$a = \bar{x} \pm r_{\bar{x}},$$

где $r_{\bar{x}}$ — вероятная ошибка,

$$r_{\bar{x}} = 0{,}6745\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{2}{3}\sigma_{\bar{x}}.$$

Вероятная ошибка r есть такая величина, что вероятность того, что ошибка измерения окажется между r и $-r$, есть $\frac{1}{2}$, и вероятность того, что ошибка окажется вне этих пределов, есть также $\frac{1}{2}$, иначе

$$P(|a - \bar{x}| < r) = 0{,}5.$$

В случае *неравноточных измерений* (с разными весами) вес измерения определяется по формуле

$$w_i = \sigma_0^2 : \sigma_i^2,$$

где σ_0 — число, совпадающее с одним из чисел σ_i, или произвольное (чтобы w_i были удобными для вычислений числами), принимаемое как средняя квадратическая ошибка измерений на единицу веса.

Часто принимают $w_i = n_i$, где n_i — число независимых и равноточных измерений $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$, подчиненных одному и тому же нормальному закону в серии с номером i.

Наконец, иногда приближенно приписывают одним измерениям меньший вес, другим — больший вес в зависимости от качества инструментов и надежности работы лиц, производящих измерения.

За приближенное значение величины a можно принять так называемое среднее взвешенное:

$$a \approx \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i : \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Средняя квадратическая ошибка измерения σ_0 находится по формуле

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Средняя квадратическая ошибка средневзвешенного

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum w_i}} = \sqrt{\frac{\sum w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)\sum w_i}},$$

где Σ берется от $i = 1$ до n.

Результат измерения

$$a = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

или

$$a = \bar{x} \pm r_{\bar{x}}.$$

Пример. Найти результат измерения по полученным неравноточным отдельным измерениям:

x_i	w_i	$x_i w_i$	$\lvert x - x_i \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$w_i (x_i - \bar{x})^2$	$w_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
13	2	26	−4,2	17,64	35,28	−8,4
18	4	72	+0,8	0,64	2,56	+3,2
15	1	15	−2,2	4,84	4,84	−2,2
19	1	19	+1,8	3,24	3,24	+1,8
20	2	40	+2,8	7,84	15,68	+5,6
Сумма	10	172	—		61,60	0,0

Здесь $n = 5$, и по предыдущим формулам вычисляем:

$$\bar{x} = \frac{172}{10} = 17{,}2; \quad \sigma_0^2 = \frac{61{,}60}{4} = 15{,}40;$$

$$\sigma_0 = 3{,}92; \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{3{,}92}{\sqrt{10}} = 1{,}23;$$

$$r_{\bar{x}} = 0{,}6745 \cdot 1{,}23 = 0{,}83.$$

Результат: $a = 17{,}2 \pm 1{,}2$ (± средняя квадратическая ошибка) или $a = 17{,}2 \pm 0{,}8$ (± вероятная ошибка).

Последний столбец в таблице дан для контроля: сумма равна нулю, если $\bar{x}$ вычислено без приближения, и не превышает $0{,}05 \cdot 10 = 0{,}5$, если $\bar{x}$ вычислено с точностью до 0,05.

Посредственные измерения

Если определяемая величина f является известной функцией нескольких непосредственно измеряемых независимых между собой величин, $f = f(x, y, z)$, причем ошибки измерения x, y, z (с нормальным распределением) достаточно малы, то можно приближенно заменить f членами 0-го и 1-го порядка ряда Тэйлора. Для значения искомой постоянной X, принимаемой за истинное, имеем приближенное равенство

$$X \approx \bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \sigma_{\bar{y}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0^2 \sigma_{\bar{z}}^2},$$

где значок 0 обозначает, что нужно подставить $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$ в производные; $\sigma_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{y}}$, $\sigma_{\bar{z}}$ означают средние квадратические ошибки.

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть искомые величины x, y, z определяются системой уравнений:

$$f_i(x, y, z) = l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где величины l_i получаются измерением и содержат погрешности. Число уравнений, называемых *условными*, больше числа неизвестных; система, вообще говоря, несовместна. Если величины x, y, z имеют нормальное распределение, то считают наиболее вероятной ту систему значений неизвестных, для которых сумма квадратов *остаточных погрешностей* $\varepsilon_i = f_i - l_i$ будет наименьшей.

Случай условных линейных уравнений

Если данная система состоит из линейных условных уравнений

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i,$$

причем все l_i получены в результате равноточных измерений, то подстановка каких-либо x, y, z в это уравнение дает вообще

$$a_i x + b_i y + c_i z - l_i = \varepsilon_i \neq 0.$$

Для наиболее вероятных неизвестных сумма

$$R = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$$

наименьшая. Из этого требования получается система линейных *нормальных уравнений* для определения наиболее вероятных неизвестных:

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z &= [al]; \\ [ba]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z &= [bl]; \\ [ca]\,x + [cb]\,y + [cc]\,z &= [cl] \end{aligned} \quad (*)$$

(см. $[aa]$, $[ab]$, . . в «Обозначениях», стр. 4). Для получения k-го нормального уравнения надо каждое условное уравнение умножить на коэффициент при k-м неизвестном в этом условном уравнении и все уравнения сложить.

Чтобы проконтролировать вычисление коэффициентов нормальных уравнений, следует вычислить суммы

$$s_i = a_i + b_i + c_i + l_i,$$

и тогда должно иметь место для коэффициентов первого нормального уравнения тождество

$$[aa] + [ab] + [ac] + [al] = [as].$$

Аналогичные тождества имеют место для остальных уравнений.

Если систему (*) решать при помощи определителей, то выражения

$$w_x = \frac{D}{A_{11}}, \quad w_y = \frac{D}{A_{22}}, \quad w_z = \frac{D}{A_{33}}$$

называются *весами неизвестных*, где D — определитель системы (*), A_{11}, A_{22}, A_{33} — алгебраические дополнения элементов главной диагонали определителя.

Если система (*) решается по способу Гаусса последовательным исключением x, затем y и получается линейное уравнение $Az = B$, тогда $A = w_z$; остальные веса находятся аналогично, т. е. опять из последнего уравнения, если начать исключения с другой неизвестной.

Подставив полученные значения неизвестных в уравнение

$$a_i x + b_i y + c_i z - l_i = \varepsilon_i,$$

можно вычислить остаточные погрешности ε_i. Средняя квадратическая ошибка σ_0 на единицу веса вычисляется по формуле

$$\sigma_0^2 = [\varepsilon\varepsilon] : (n - s),$$

где s — число неизвестных (в данном случае $s = 3$).

Средние квадратические ошибки определяемых величин находятся по формулам

$$\sigma_x = \frac{\sigma_0}{\sqrt{w_x}}; \quad \sigma_y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{w_y}}; \quad \sigma_z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{w_z}}.$$

Искомые величины

$$X = x \pm \sigma_x; \quad Y = y \pm \sigma_y; \quad Z = z \pm \sigma_z,$$

где x, y, z — решения нормальных уравнений.

Если ошибки ε_i в величинах l_j (остаточные погрешности) имеют разные веса, то надо каждое из первоначальных уравнений умножить на корень квадратный из соответствующего веса, а затем составлять нормальные уравнения вида

$$[waa]\,x + [wab]\,y + [wac]\,z = [wal]$$

и т. д.; получаются взвешенные нормальные уравнения.

В случае нелинейных зависимостей сначала находят каким-либо способом приближенные значения неизвестных; обозначают эти последние через x_0, y_0, z_0, затем разлагают каждое f_j в ряд по степеням $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, $\zeta = z - z_0$. Ограничиваясь первыми степенями ξ, η, ζ, получают линейные условные уравнения

$$A_i\xi + B_i\eta + C_i\zeta = l_i - f_i(x_0,\ y_0\ z_0),$$

из которых определяют наиболее вероятные значения поправок ξ, η, ζ.

Здесь

$$A_i = \frac{\partial f_i(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}; \quad B_i = \frac{\partial f_i(x_0, y_0, z_0)}{\partial y};$$

$$C_i = \frac{\partial f_i(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}.$$

Пример. Рассмотрим задачу нахождения эмпирической формулы по полученному из опыта ряду значений x и y, связанных функциональной зависимостью. Вид последней задается или подбирается по виду графика.

Найти формулу вида $y = \alpha + \beta x$ при задании:

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,31	0,82	1,29	1,85	2,51	3,02

В задаче о нахождении эмпирической формулы неизвестными являются параметры α и β; $n = 6$. Условные уравнения имеют вид

$$\alpha + 0{,}5\beta = 0{,}31;$$
$$\alpha + 1\beta = 0{,}82;$$
$$\alpha + 1{,}5\beta = 1{,}29;$$
$$\alpha + 2\beta = 1{,}85;$$
$$\alpha + 2{,}5\beta = 2{,}51;$$
$$\alpha + 3\beta = 3{,}02.$$

Составляем нормальные уравнения:

$$6\alpha + 10{,}5\beta = 9{,}8;$$
$$10{,}5\alpha + 22{,}75\beta = 21{,}945.$$

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 10{,}5 \\ 10{,}5 & 22{,}75 \end{vmatrix} = 26{,}25; \quad A_{11} = 22{,}75; \quad A_{22} = 6.$$

Таблица функции $S(z)$ для распределения Стьюдента

z \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500000
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539	539	539	539	539	539	539	539	539	539	53983
0,2	563	570	573	575	575	576	576	577	577	577	577	578	578	578	578	578	578	578	578	57926
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615	615	615	616	616	616	616	616	616	616	61791
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651	652	652	652	652	653	653	653	653	653	65542
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686	686	687	687	688	688	688	688	688	689	69146
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719	720	720	721	721	721	722	722	722	722	72575
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750	751	751	752	752	753	753	753	754	754	75804
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779	780	780	781	782	782	782	783	783	783	78814
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805	806	807	808	808	809	809	810	810	810	81594
1,0	750	789	804	813	818	822	825	827	828	830	831	832	832	833	833	834	834	835	835	84134
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851	853	854	854	855	856	856	857	857	858	86433
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871	872	873	874	875	876	876	877	877	878	88493
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889	890	891	892	893	893	894	894	895	895	90320
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904	906	907	908	908	909	910	910	911	911	91924
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918	919	920	921	922	923	924	924	924	925	93319
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930	931	932	933	934	935	935	936	936	937	94520
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940	941	943	944	944	945	946	946	947	947	95543
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949	950	952	952	953	954	955	955	956	956	96407
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957	958	959	960	961	962	962	963	963	964	97123
2,0	852	908	930	942	949	954	957	960	962	963	965	967	967	967	968	969	969	970	970	97725
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974	975	976	977	977	978	979	979	979	980	98610
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981	982	983	984	985	985	986	986	986	987	99180
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987	988	988	989	990	990	990	991	991	991	99534
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991	991	992	992	993	993	994	994	994	994	99744
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993	994	994	995	995	996	996	996	996	996	99865
3,2	904	957	975	984	988	991	992	994	995	995	996	996	996	997	997	997	997	998	998	99931
3,4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997	997	997	998	998	998	998	998	998	998	99965
3,6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998	998	998	998	999	999	999	999	999	999	99984
3,8	918	969	984	990	994	996	997	997	998	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999	99993
4,0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999	999	999	999	999	999	1,000	1,000	1,000	1,000	99997
4,2	926	974	988	993	996	997	998	998	999	999	999	999	1,000	1,000	1,000					99999
4,4	929	976	989	994	996	998	998	999	999	999	1,000	1,000								99999
4,6	932	978	990	995	997	998	999	999	999	1,000										
4,8	935	980	991	996	998	998	999	999	1,000											
5,0	937	981	992	996	998	999	999	1,000												

Решение нормальной системы

$$\alpha = -0{,}285, \quad \beta = 1{,}1.$$

Искомая зависимость будет

$$y = 1{,}1x - 0{,}285.$$

Веса искомых величин

$$w_\alpha = \frac{26{,}25}{22{,}75}; \quad w_\beta = \frac{26{,}25}{6}.$$

Вычисление остаточных погрешностей:

$$\varepsilon_1 = -0{,}285 + 0{,}5 \cdot 1{,}1 - 0{,}31 = -0{,}045;$$
$$\varepsilon_2 = -0{,}285 + 1{,}1 - 0{,}82 = -0{,}005;$$
$$\varepsilon_3 = -0{,}285 + 1{,}5 \cdot 1{,}1 - 1{,}29 = 0{,}075;$$
$$\varepsilon_4 = -0{,}285 + 2 \cdot 1{,}1 - 1{,}85 = 0{,}065;$$
$$\varepsilon_5 = -0{,}285 + 2{,}5 \cdot 1{,}1 - 2{,}51 = -0{,}045;$$
$$\varepsilon_6 = -0{,}285 + 3 \cdot 1{,}1 - 3{,}02 = -0{,}005.$$

Находим $[\varepsilon\varepsilon] = 0{,}014$.

Вычисление средних квадратических ошибок: на единицу веса

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{0{,}014}{6-2}} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}014};$$

для α и β

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}014} : \sqrt{\frac{26{,}25}{22{,}75}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0{,}014 \cdot 22{,}75}{26{,}25}} = 0{,}056;$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}014} : \sqrt{\frac{26{,}25}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0{,}014 \cdot 6}{26{,}25}} = 0{,}03.$$

Результат решения:

$$\alpha = -0{,}285 \pm 0{,}056; \quad \beta = 1{,}1 \pm 0{,}03.$$

ГЛАВА XVII

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

Счетная логарифмическая линейка позволяет производить над заданными числами действия умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, а также действия с тригонометрическими функциями. Результат вычисления получается приближенный, с тремя значащими цифрами.

На фиг. 1 представлена логарифмическая линейка длиной 250 *мм*, которая состоит из корпуса K, движка D и бегунка B (с визирной линией посередине). На корпусе нанесены следующие шкалы.

1) Равномерная шкала A с модулем 250; уравнение шкалы $s = 250y$ (см. «Номография», стр. 314), причем y изменяется от 0 до 1 через 0,002, пометки 1, 2, . . . ,9 означают что $y = 0{,}1$; 0,2; . . . 0,9: в начале шкалы $y = 0$, в конце шкалы $y = 1$.

2) Логарифмическая шкала L функции $y = \lg x$ с модулем 250; уравнение шкалы $S_1 = 250 \lg x$; x изменяется от 1 до 10. От 1 до 2 деления даны через 0,01; от 2 до 4 — через 0,02; от 4 до 10 — через 0,05.

3) Логарифмическая шкала Q с модулем, вдвое меньшим; ее уравнение $S_2 = 125 \lg x$, x изменяется от 1 до 100, причем шкала состоит из двух тождественно равных участков с пометками x от 1 до 10 и от 10 до 100. От 1 до 2 деления даны через 0,02; от 2 до 5 — через 0,05; от 5 до 10 — через 0,1, Шкала Q называется шкалой квадратов.

4) Логарифмическая шкала C имеет уравнение $S_3 = \frac{250}{3} \lg x$, она состоит из трех тождественно равных участков, поэтому x изменяется от 1 до 1000. Цена делений такая же, как на шкале Q. Шкала C называется шкалой кубов.

На лицевой стороне движка имеются две шкалы: L' тождественна со шкалой L и Q' тождественна со шкалой Q. На обратной стороне нанесены логарифмические шкалы S, T и (S и T) тригонометрических функций (см. ниже).

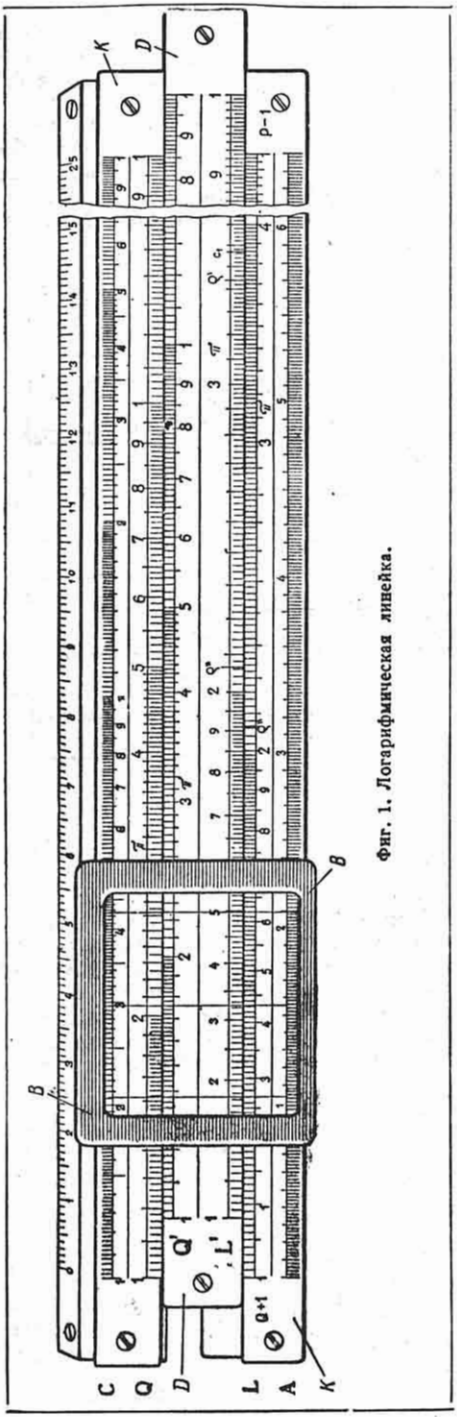
При помощи корпуса и визира можно *находить логарифм числа, число по логарифму, возводить в квадрат и в куб, извлекать корень квадратный и кубичный.*

Если установить визирную линию на x шкалы L, то мы прочитаем $\lg x$ на шкале A в пересечении с ней визирной линии. Прочитанное число является мантиссой $\lg x$, а характеристика $\lg x$ устанавливается по взятому числу x. На фиг. 1 визирная линия отмечает на шкале L число $x = 1432$ (взято 143 и на глаз $^1/_5$ самого мелкого деления, получилось число 1432). Мантисса логарифма этого числа равна 156, следовательно, указанное положение визирной линии дает $\lg 1{,}432 = 0{,}156$; $\lg 14{,}32 = 1{,}156$; $\lg 0{,}1432 = \bar{1}{,}156$ и т. д.

Чтобы найти x по данному $\lg x$, надо визирную линию установить на точку шкалы A, пометка которой равна мантиссе данного логарифма. На шкале L в пересечении с ней визирной линии читаем x; запятая ставится соответственно характеристике.

Для возвышения в квадрат x устанавливают визирную линию на x шкалы L и в пересечении ее со шкалой Q читают x^2. Если отсчет x^2 получается в правой половине шкалы Q (между 10 и 100), то число знаков x^2 налево от запятой равно удвоенному числу знаков x налево от запятой; если же отсчет x^2 получается на левой половине шкалы Q (между 1 и 10), то число знаков x^2 налево от запятой равно удвоенному числу знаков x налево от запятой

* См. литературу на стр. 351: [112], [114], [117], [123], [144], [148], [113а].



Фиг. 1. Логарифмическая линейка.

без единицы. На фиг. 2: $7{,}88^2 = 62{,}1$; на фиг. 3: $1{,}628^2 = 2{,}65$.

Правило определения числа знаков верно и для возвышения в квадрат правильной дроби, если условиться «число знаков» понимать как отрицательное число, содержащее столько единиц, сколько нулей содержится между запятой и ее первой значащей цифрой.

Пример. Дробь 0,00375 имеет (—2) знака; ее квадрат прочитывается на правой половине шкалы Q и должен поэтому иметь $2\cdot(-2) = -4$ знака, что дает $(0{,}00375)^2 = 0{,}0000141$.

Извлечение квадратного корня: $\sqrt{x}$. Данное число x разбивают, начиная от запятой, на грани по две цифры в каждой грани. Если в первой грани высших единиц окажется одна цифра, то x нужно брать в первой половине шкалы Q, а если в этой грани будут две цифры то x нужно брать во второй половине шкалы Q. Результат извлечения квадратного корня из x читают на шкале L. Число знаков в этом результате равно числу граней, на которые разбивается целая часть x. Если x — правильная десятичная дробь, то разбивают на грани, начиная от запятой вправо. Число x берут в первой или во второй половине шкалы Q в зависимости от числа цифр в значащей части первой значащей грани. В результате нужно, кроме нуля целых, взять до значащих цифр столько нулей, сколько граней, состоящих исключительно из нулей, находится в данном числе x.

Примеры: $\sqrt{4'50} = 21{,}2$;

$$\sqrt{0{,}00648} = \sqrt{0{,}00'64'80} = 0{,}0805.$$

При возведении в куб пользуются шкалой C: против пометки x на шкале L читают x^3 на шкале C. Пусть целая часть x имеет n знаков. Если x^3 получается в первой трети шкалы C, т. е. в промежутке от 1 до 10, то результат содержит $3n - 2$ знака. Если x^3 получается в средней трети шкалы (от 10 до 100), то результат содержит $3n - 1$ знак. Если x^3 заключается в последней трети шкалы (от 100 до 1000), то число знаков в результате равно $3n$.

При извлечении кубического корня из данного числа нужно разбить последнее, начиная от запятой, на грани по три цифры в каждой грани. Если в первой грани слева оказывается одна цифра, то число нужно брать в первой трети шкалы C; если в первой грани две цифры, то число надо брать во второй трети шкалы C, и, наконец, если в первой

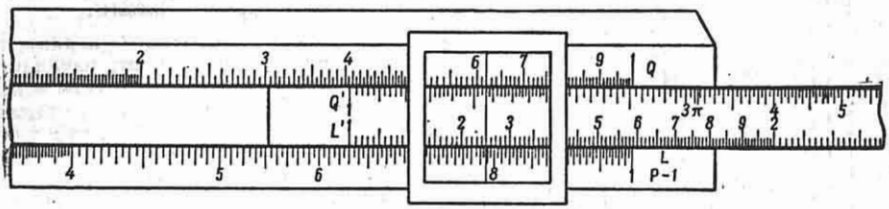
грани три цифры, то число берут в последней трети шкалы C.

Число знаков в корне кубическом равно числу граней.

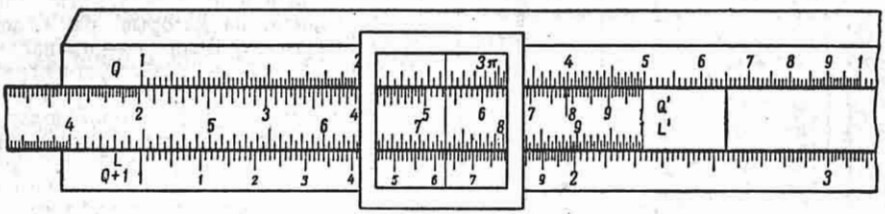
В случае правильной десятичной дроби следует разбить это число на грани, начиная от запятой, и вопрос о том, в какой из трех частей шкалы C нужно брать данное число, решается по числу цифр в значащей части первой значащей грани.

На фиг. 2 и 3 даны произведения $6{,}30 \cdot 1{,}250 = 7{,}88$ и $223 \cdot 7{,}30 = 1628$ (последний знак взят на глаз, как 0,8 деления).

Это правило справедливо и тогда, когда один или оба сомножителя суть правильные десятичные дроби, если «число знаков» рассматривать как отрицательное число (см. возвышение в квадрат).



Фиг. 2. Положение движка „вправо" при умножении 6,30 · 1,250.



Фиг. 3. Положение движка „влево" при умножении 223 · 7,30.

Для умножения xy берут x на шкале L и, продвигая движок направо, устанавливают начало шкалы L' против x шкалы L. Против y, взятого на шкале L', читают при помощи визирной линии на шкале L число, равное произведению xy.

Если пометка y на L' выйдет за пределы L, то передвигают движок влево, устанавливают конец шкалы L' против x на L, а затем опять против y читают на шкале L число, которое равно $\frac{xy}{10}$.

Для умножения каких угодно чисел надо округлять их так, чтобы они имели не более трех верных значащих цифр.

Правило знаков. Если при перемножении движок передвигается направо, то число знаков в целой части произведения равно сумме чисел знаков сомножителей без единицы, если же движок передвигается налево, то число знаков произведения равно сумме чисел знаков сомножителей (см. стр. 346).

Пример. Для произведения 0,0124·81,21, получаем $(-1)+2=1$ знак (движок влево), что дает 1,007.

При перемножении нескольких чисел промежуточные результаты не прочитываются, а отмечаются визирной линией, с которой совмещается начальное или конечное деление движка при следующем умножении. Нужно замечать, в какую сторону передвигается движок и сколько раз, чтобы подсчитать число знаков произведения.

Пример. $2{,}74 \cdot 0{,}34 \cdot 5{,}28 \cdot 0{,}086$. Стрелки внизу $\rightarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow$ указывают, вправо или влево перемещается движок. Число знаков: $1+0-1+1+(-1)=0$ Ответ: 0,423.

Для деления $\frac{x}{y}$ устанавливают при помощи визирной линии против x шкалы L y шкалы L' и частное получают на шкале L как пометку той ее точки, которая приходится против начала движка или конца движка, в зави-

симости от того, пришлось ли передвинуть движок направо или налево для этой установки.

Правило знаков. Если частное читается против начала движка (передвижение направо), то число знаков частного на единицу больше разности чисел знаков делимого и делителя, если же частное читается против конца движка (передвижение налево), то число знаков частного равно разности чисел знаков делимого и делителя.

Примеры.

1) 0,001464 : 0,0648; число знаков: $-2-(-1)=$ $\leftarrow$ $=-1$. Ответ 0,0226.

2) 0,795 : 2,24; число знаков $0-1+1=0$. $\rightarrow$

Ответ: 0,355.

В комбинированном умножении и делении $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f}$ удобно вести вычисления по схеме $a{:}d\cdot b{:}e\cdot c{:}f$.

Пример. $\frac{0{,}787\cdot 32{,}5\cdot 0{,}024}{6{,}33\cdot 5{,}76\cdot 113} =$

$= 0{,}787 : 6{,}33\cdot 32{,}5 : 5{,}76\cdot 0{,}024 : 113.$

$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow$

Число знаков равно $0-1+1+2-1-1+$ $+(-1)-3+1=-3$. Ответ 0,000149.

Обратная сторона движка служит для нахождения *синуса* (шкала S) и *тангенса* (шкала T) *по углам* и, обратно, *углов по синусам и тангенсам*. Шкала (S и T) (посередине) служит как для синусов, так и для тангенсов, для углов x от 34′ до 5°44′.

Для вычисления тригонометрических функций необходимо вытащить движок и в перевернутом виде вдвинуть его в паз корпуса линейки так, чтобы шкала S оказалась на месте Q' и чтобы начальное деление S совпало с начальным делением Q.

Чтобы найти $\sin x$, нужно взять $x°$ на S и прочесть на неподвижной шкале L число, стоящее против $x°$. Это число, разделенное на 10, даст $\sin x$.

Чтобы найти x по $\sin x$, следует 10 $\sin x$ установить на шкале L и на шкале S прочитать $x°$.

Примеры:

1) $x = 22°$ на S; на L читаем 3,75; следовательно, $\sin 22° = 0{,}375$.

2) Дан $\sin x = 0{,}643$, берем 6,43 на L, и на S читаем $x = 40°$.

Эти же действия можно производить без перевертывания движка. В корпусе линейки с обоих концов (иногда с одного) имеются вырезы. На боках этих вырезов штрихами указаны положения начала и конца шкалы L. Чтобы найти $\sin x$, надо, не перевертывая движка, выдвинуть его вправо так, чтобы отсчет x на S пришелся против штриха в вырезе. Против конца L с лицевой стороны движка получится отсчет 10 $\sin x$ на шкале L'; $\sin x$ равен результату деления этого отсчета на 10. Для нахождения x по $\sin x$ передвигают движок направо так, чтобы отсчет 10 $\sin x$ шкалы L' пришелся против конца L, тогда на обратной стороне линейки читают угол x на S против черты в вырезе.

Для углов от 34′ до 5°44′ (их синусы изменяются от 0,01 до 0,1) используется шкала (S и T), но только при нахождении синуса по углу надо отсчеты на L делить не на 10, а на 100; при нахождении угла по синусу ($<0{,}1$) надо на L' устанавливать 100 $\sin x$.

Нахождение $\operatorname{tg} x$, или x по $\operatorname{tg} x$, производится так же, как и в случае $\sin x$, но с заменой шкалы S шкалой T. При втором способе движок надо выдвигать не вправо, а влево и читать на шкале L' против начала (а не конца) шкалы L.

Особые штрихи на шкалах отмечают некоторые употребительные числа: на L, L', Q, Q' отмечается особым штрихом π; штрих C (на L' и на L) отмечает число $\sqrt{4:\pi}$, употребительное при вычислении площади S круга по диаметру его d; $S=\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{d}{C}\right)^2$; иногда имеется штрих $C_1=\sqrt{40:\pi}$, заменяющий C.

При применении C или C_1 результат прочитывается на одной или другой половине шкалы Q. Этим можно пользоваться при производстве вычислений, в которых участвует площадь S.

Штрихи ρ'', ρ' на L и L' служат для перевода угла, заданного в градусах, минутах и секундах, в дуговую меру (в радианы) и обратно; ρ'' соответствует число $\frac{180\cdot 60\cdot 60}{\pi}=206265''$ и ρ' соответствует $\frac{180\cdot 60}{\pi}=3437',75$. Угол x'' в дуговой мере равен $\frac{x''}{\rho''}$, а угол x' равен $\frac{x'}{\rho'}$.

Примеры:

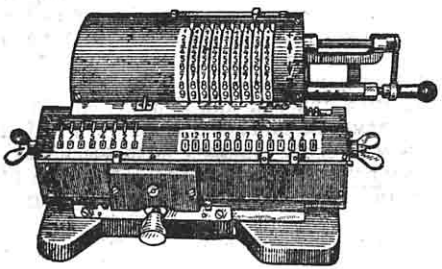
1) Перевести угол 24′17″ в радианы. Совмещаем отсчеты 24 и ρ' шкал L и L'; на L против конца L' читаем 698. Так как число знаков част

ного $\frac{24}{\rho'}$ равно $2 - 4 = -2$, то получаем $24' = -0{,}00698$ радиана. Так же совмещаем отсчеты 17 и ρ'' шкал L и L' и против конца L' читаем на L результат: $17'' = 0{,}0000824$. Окончательно, округляя, находим $24'17'' = 0{,}00706$ радиана.

2. Перевести угол 1,75 радиана в градусную меру. Умножая на линейке числа 1,75 и ρ', находим результат: $6020' = 100°20'$.

АРИФМОМЕТР

Арифмометр (на фиг. 4 — русской конструкции Однера) имеет в верхней части (коробка) девять прорезов, в которых передвигаются рычажки. Сбоку прорезов нанесены цифры; передвигая вдоль каждого прореза рычажок, можно



Фиг. 4. Арифмометр.

«*поставить на рычагах*» любое девятизначное число.

Внизу под рычагами находятся два ряда окошечек (подвижная каретка): одни, более крупные, числом 13 справа, другие, меньшие, слева, числом 8. Ряд окошечек справа образует *результирующий счетчик*, а ряд слева — *счетчик оборотов*. Номер окошечка на счетчике указывает место единиц какого-либо разряда числа, стоящего на этом счетчике.

Справа и слева каретки видны барашки (ласточки), служащие для сбрасывания цифр, появляющихся на этих счетчиках. Повертывая барашки до тех пор, пока они не щелкнут, мы убираем все цифры на счетчиках, оставляя нули.

На коробке машины справа от прорезов имеются две стрелки, на концах которых стоят плюс (+) и минус (—). С правой стороны машины имеется ручка, которую можно повертывать в направлении плюс (по часовой стрелке) и в направлении минус (против часовой стрелки).

Пусть на результирующем счетчике и на счетчике оборотов стоят нули. Поставим на рычагах какое-нибудь число, например 231 705 896, и повернем ручку в направлении плюс. После одного оборота на результирующем счетчике появится то же число 231 705 896.

Сложение и вычитание. Чтобы сложить несколько чисел, надо поставить эти числа одно за другим на рычагах и после каждой установки 1 раз повернуть ручку в направлении плюс. На результирующем счетчике появится сумма всех чисел.

При вращении ручки в обратную сторону на результирующем счетчике появится разность между числом, стоявшим в нем до начала поворота, и числом, поставленным на рычагах.

Умножение. Каретка арифмометра может передвигаться вдоль машины вправо и влево, и под прорезом для единиц можно поставить различные окошечки результирующего счетчика.

Когда каретка находится в крайнем левом своем положении, то против единиц на рычагах находится место единиц на результирующем счетчике; при одном обороте к числу на этом счетчике прибавляется число, установленное на рычагах. Если каретку сдвинуть вправо на одно место (на один разряд), чтобы против единиц на рычагах оказалось второе место (десятков) результирующего счетчика, то при одном обороте в направлении плюс к числу на результирующем счетчике прибавляется число, равное 10-кратному числу, поставленному на рычагах. Передвигая каретку на m разрядов вправо, мы будем при одном обороте в направлении плюс прибавлять число, в 10^m раз большее числа, поставленного на рычагах.

Число оборотов, сделанное ручкой, появляется на счетчике оборотов. Если производятся обороты в направлении плюс и в направлении минус, то на счетчике оборотов появляется алгебраическая сумма числа оборотов, считая число оборотов в направлении плюс положительным, а в направлении минус — отрицательным. Отрицательное число оборотов отмечается на счетчике оборотов красными цифрами.

Чтобы умножить установленное на рычагах число, например, на 538, надо передвинуть каретку так, чтобы против находящейся над счетчиком оборотов стрелки приходилось третье справа окошко этого счетчика (окошко, соответствующее номеру высшего разряда множителя), и начинают вращать ручку

в направлении плюс. Сначала вращают ручку 5 раз; передвигают каретку на одно место влево и вращают ручку 3 раза, наконец, после следующей передвижки каретки влево вращают 8 раз. На счетчике оборотов окажется множитель 538, а на результирующем счетчике — произведение установленного на рычагах числа на множитель 538. Для уменьшения числа оборотов можно при втором положении каретки накрутить не 3 раза, а 4 раза, и затем, после передвижки каретки влево на одно место, вращают ручку в направлении минус 2 раза (что соответствует вычитанию 2 раза). При таком умножении на счетчике оборотов появится число $54\overline{2}$, где знак $\overline{2}$ означает красную цифру 2.

Для вычисления суммы произведений вида $ab + cd + ef + \ldots$ надо поставить a на рычагах, накрутить в счетчике оборотов b; на результирующем счетчике появится ab; сбрасывают b со счетчика оборотов. Затем ставят d на рычагах и, накрутив на счетчике оборотов c, получают на результирующем счетчике сумму $ab + cd$ и т. д.

Деление. Делимое устанавливают на результирующем счетчике так, чтобы цифра высшего разряда находилась в крайней левой части этого счетчика, после чего со счетчика оборотов сбрасывают все цифры. Затем устанавливают на рычагах делитель, начиная с крайнего левого разряда. Каретку ставят в такое положение, чтобы из стоящего на результирующем счетчике делимого можно было вычесть делитель, причем так, что если сдвинуть каретку вправо на одно место, то вычитание стало бы невозможным (фиг. 5). После этого вращают ручку в направлении минус до тех пор, пока на результирующем счетчике не останется число, меньшее делителя. Тогда передвигают каретку на одно место влево и снова вычитают, и т. д. За числами, остающимися на результирующем счетчике, можно не следить, крутя просто до тех пор, пока не раздастся звонок. Тогда делают один оборот назад (т. е. в направлении плюс), затем передвигают каретку и продолжают вычитать. Частное появляется на счетчике оборотов, изображенное красными числами. Запятую в частном ставят по смыслу (см. стр. 346). На результирующем счетчике будет остаток.

Можно

	9	2	
1	2	3	0

Нельзя

9	2		
1	2	3	0

Фиг. 5. Положение каретки и корпуса арифмометра при делении.

Деление можно производить и другим способом. Делитель устанавливают на рычагах. Каретку передвигают так, чтобы против цифры высшего разряда делителя приходилось по крайней мере предпоследнее с левой стороны окошечко результирующего счетчика. Затем вращают ручку в направлении плюс и набирают на результирующем счетчике делимое. Как только набралось на результирующем счетчике число, ближайшее меньшее к делимому, надо каретку передвинуть на 1 разряд влево. Затем опять вращают ручку в направлении плюс до получения на результирующем счетчике ближайшего меньшего числа к делимому и т. д. Частное появляется на счетчике оборотов, запятая в частном ставится по смыслу.

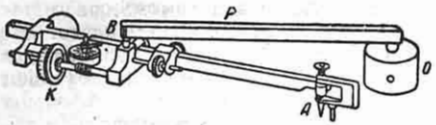
Извлечение квадратного корня. Если известно приближенное значение квадратного корня, то можно получить более точное значение того же корня следующим образом. Пусть $\sqrt{a} = x$. Первое приближение x_1 искомого корня x можно найти, например, при помощи счетной линейки. Для второго приближения надо найти поправку ξ_1 (положительную или отрицательную), чтобы $(x_1 + \xi_1)^2 = a$. Пренебрегая ξ_1^2, получаем из этого уравнения вместо ξ_1 поправку $\xi_1' = \dfrac{a - x_1^2}{2x_1}$ и второе приближение $x_2 = x_1 + \xi_1' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x_1} + x_1\right)$. Посредством арифмометра вычисляем $\dfrac{a}{x_1}$, $\dfrac{a}{x_1} + x_1$ и, наконец, x_2. Относительная погрешность второго приближения составляет всего лишь половину квадрата относительной погрешности первого приближения, и второе приближение имеет вдвое больше верных значащих цифр, чем первое. Далее можно искать третье приближение $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x_2} + x_2\right)$ и т. д.

Пример. Найти $\sqrt{227}$. Счетная линейка дает первое приближение $x_1 = 15{,}1$. Деление $\dfrac{227}{x_1}$ дает 15,03311. Второе приближение $x_2 = \dfrac{1}{2}(15{,}1 + 15{,}03311) = 15{,}06655$. Затем делим 227 на 15,06655, получаем 15,0664883 и находим третье приближение $x_3 = 15{,}066519$, и т. д.

ПЛАНИМЕТРЫ И ИНТЕГРАТОРЫ

Планиметры и интеграторы служат для вычисления площадей и определенных интегралов.

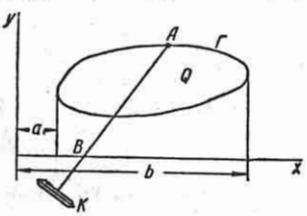
Полярный планиметр. В полярном планиметре (ведущей линией является окружность) два стержня AB и OB (фиг. 6) находятся в точке B на одной оси. В конце стержня OB имеется острый штифт (полюс O), которым этот конец укрепляется неподвижно к чертежу.



Фиг. 6. Планиметр.

В конце стержня AB имеется острие A, которым обводят по контуру обмеряемой площади; на другом конце K того же стержня насажено колесико с острым ободом; плоскость этого колесика перпендикулярна стержню AB. К этому колесику прикреплен второй обод с делениями, по которым отсчитываются угол поворота колесика и число его полных оборотов.

Чтобы измерить площадь Q (фиг. 7), ограниченную контуром Γ, укрепляют



Фиг. 7. Измерение площади планиметром.

полюс планиметра к чертежу, ставят острие в любую точку на Γ, производят отсчет n_0 положения колесика указателем и затем обводят острием по контуру Γ; когда острие после полного обхода Γ снова придет в исходную точку, то делают второй отсчет n_1 положения колесика. Искомая площадь $Q = k(n_1 - n_0)$, где коэффициент пропорциональности $k = rl$, r — радиус колесика, $l = AB$ — длина стержня.

Если же полюс O помещается внутри Γ, то

$$Q = k_1 + k(n_1 - n_0),$$

где k и k_1 — постоянные планиметра, определяемые из размеров его частей. Но эти постоянные можно определить опытным путем. Взяв квадрат или окружность определенной площади, делают обвод контура, и если отсчеты до и после обвода равны n_0 и n_1, то при положении полюса вне контура

$$k = \frac{Q}{n_1 - n_0}.$$

Определив k, делают обвод контура при внутреннем положении полюса. Пусть соответственные отсчеты n_0 и n_1; тогда $k_1 = Q - k(n_1 - n_0)$.

Обычно определение площади фигуры планиметром производят при внешнем относительно контура положении полюса. Если же размеры фигуры велики и невозможно при внешнем положении полюса сделать обвод контура, то фигуру разбивают на несколько частей и определяют площадь каждой части в отдельности.

Правила пользования планиметром. 1. Перед употреблением необходимо планиметр проверить. Ось колесика и стержни не должны шататься в гнездах и должны быть чистыми; вращение должно быть свободным.

2. Очень важно, чтобы ось колесика была параллельна вертикальной плоскости, проходящей через точку вращения B и ось ведущего острия A.

3. Все определения площади должны быть многократными; обвод контура надо производить в двух направлениях: по часовой стрелке и против нее; кроме того, следует менять положение полюса.

4. Необходимо очень внимательно относиться к тщательному обводу контура так, чтобы все его изгибы были захвачены. Обвод должен производиться со средней постоянной скоростью. При случайном уклонении в какую-либо сторону необходимо сделать примерно такое же уклонение в противоположную сторону.

5. Следует избегать шероховатых поверхностей как бумаги, так и доски, на которой лежит бумага; это способствует излишнему вращению колесика. Надо избегать и тщательно шлифованной поверхности, так как уменьшение трения способствует скольжению колесика там, где должно быть его качение.

Дисковый планиметр содержит особый диск, по которому (а не по чертежу)

и катится колесико K. Вращение диска пропорционально повороту стержня OB, благодаря чему увеличивается поворот колесика в большее число раз, а значит, увеличивается точность отсчета угла $n_1 - n_0$; кроме того, показания прибора точнее, так как устраняется возможность скольжения колесика.

Относительная погрешность при обмере площади величиной около 100 $см^2$ обыкновенным планиметром не превосходит 0,5%, а дисковым планиметром 0,1%.

Интегратор в простейшем своем виде отличается от планиметра только тем, что точка B стержня AB ведется не по окружности, как у планиметра, а по данной прямой x (фиг. 7), и можно вычислять $\int_a^b f(x)\,dx$. Площадь измеряется той же формулой $Q = k(n_1 - n_0)$.

В интеграторе имеются два добавочных колесика, пользуясь которыми, можно найти: 1) статический момент обводимой острием A площади Q относительно оси x и 2) момент инерции этой площади относительно той же оси.

Линейка AB (с колесиком K) соединена с двойным зубчатым сектором, с которым соединены два зубчатых колеса M и I равных радиусов; последние снабжены каточками, по которым делаются отсчеты.

Статический момент M площади Q вычисляется по формуле

$$M = A\left(n_1' - n_0'\right),$$

где n_1' и n_0' — отсчеты по каточку колеса M после и до обвода.

Момент инерции I площади Q вычисляется по формуле

$$I = C(n_1 - n_0) + B\left(n_1'' - n_0''\right),$$

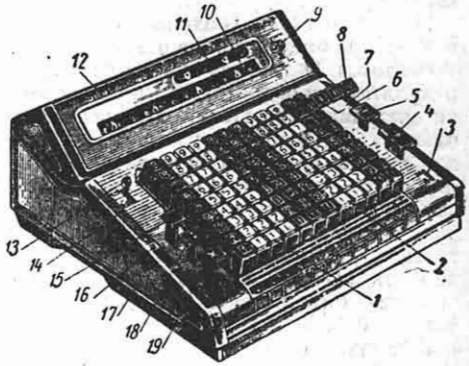
где n_1, n_0 — отсчеты по колесику K; n_1'', n_0'' — отсчеты по каточку колеса I. Коэффициенты A, B, C находят из опыта тем же способом, каким определяют постоянные k и k_1 для полярного планиметра. Зная моменты инерции двух разных фигур (круг, квадрат), обводят их планиметром и получают два уравнения для неизвестных B и C.

Интеграф позволяет найти определенный интеграл с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ дана графиком, то интеграф вычерчивает график функции

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx.$$

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ РЫЧАГОМ

Автоматы этого типа производят действия (сложение, вычитание, умножение и деление) автоматически с помощью электродвигателя, питаемого от осветительной сети. Вычислитель устанавливает исходные данные на клавиатуре и нажатием кнопок и рычагов производит действия. Клавиатура имеет 12 разрядов, счетчик результатов имеет 12 разрядов и



Фиг. 8. Автоматическая вычислительная машина.

счетчик оборотов—6 разрядов. В машине имеется накапливающий счетчик (запоминающая шкала) и дополнительные кнопки.

Средний ряд клавишей (фиг. 8), окрашенный в красный цвет, разделяет клавиатуру на левую половину *1*, имеющую пять разрядов (или вертикальных рядов) и правую половину *2* с семью разрядами, куда включается и красный ряд.

В каждом ряду имеется девять клавишей, служащих для установки цифры одного разряда числа: самый правый ряд для установки единиц, следующий ряд влево для установки десятков и т. д.

Если клавиш неверно нажат, то при нажатии другого клавиша в том же ряду, первый автоматически освобождается. Чтобы гасить цифры в каком-нибудь ряду, надо нажать одновременно два клавиша.

Рычаг закрепления клавиатуры *3* при передвижении от себя (положение M) закрепляет установленные цифровые клавиши; при передвижении

к себе (положение *А*) клавиатура автоматически гасится после каждого хода машины, происходящего после нажатия кнопки сложения *4* или кнопки вычитания *5*. При нажатии этих кнопок, отмеченных на корпусе машины знаками (+) и (—), число, установленное на клавиатуре, передается в счетчик результатов *10* с соответствующими знаками, т. е. машина складывает или вычитает.

Кнопки с правой стороны *I*, *II*, *III* или соответственно *6*, *7*, *8* служат для гашения: *I* — для счетчика оборотов, *II* — для счетчика результатов и *III* — клавиатуры.

На каретке (подвижной части машины) кроме счетчиков результатов *10* и оборотов *11* имеется шкала счетчиков результатов и оборотов *12*. Рычаг заслонки счетчика результатов *9* передвигает планку, в которой имеются окошки для замены дополняющего числа до 10^{κ} (в случае отрицательного результата) самим числом; например, если в счетчике результатов появилось дополнительное число 9999648, то надо передвинуть рычаг *9* вправо, и в верхних окошках того же счетчика результатов читаем 0000352. Но в случае, когда в последнем окошке виден нуль (окрашенный в красный цвет), то к прочитанному числу надо прибавить 10, для чего на клавиатуре устанавливается единица в разряде десятков и передается на счетчик нажатием на кнопку (—).

Рычаг *13* служит для умножения чисел с числом знаков больше шести. Передвижение рычага к себе как бы соединяет обе половины клавиатуры в одно целое и дает возможность установить множимое вплоть до 12-значного.

Рычаг *14* служит для ограничения количества знаков в частном при делении. Рычаг может быть установлен в одно из трех положений, соответствующее числу цифр, которые будут получаться в частном при установке рычага.

Кнопка *15* служит для управления счетчиком оборотов при сложении, вычитании и умножении чисел. Если кнопка: а) поднята вверх, то счетчик оборотов работает в том же направлении, что и счетчик результатов; б) закреплена в среднем положении, то счетчик оборотов совсем не работает; в) полностью нажата, тогда счетчик оборотов работает с обратным знаком относительно работы счетчика результатов, т. е. работает на вычитание от нажатия кнопки (+) и на сложение от нажатия кнопки (—).

Кнопка деления *18* и кнопка умножения *19* включают машину для автоматического деления и умножения. При выполнении действия деления от кнопки *18* положение кнопки *15* не влияет на работу счетчика оборотов.

Рычаг *16* управления счетчиками оборотов и результатов при умножении и делении служит для получения суммы и разности произведений и частных. Если рычаг установлен в положение «+», то оба счетчика работают в направлении, соответствующем знаку пусковых кнопок. Если рычаг установлен в положение «—», то 1) при выполнении умножения от кнопки *19* оба счетчика работают со знаком минус и может быть получена разность произведений и разность множителей; 2) при выполнении деления от кнопки *18* счетчик оборотов работает с обратным знаком и может быть получена разность частных.

Положение рычага *16* не влияет на оба счетчика при выполнении действий сложения и вычитания.

Рычаг *17* — прерыватель деления — используется для прерывания автоматической работы при делении.

Исходным положением машины считается следующее: счетчики и клавиатура погашены; рычаг *3* в положении «А» (к себе); рычаг *9* в положении налево; рычаг *14* в положении от себя; рычаг *16* в положении от себя.

Сложение и вычитание чисел, после того как машина поставлена в исходное положение, производятся так же, как и на арифмометре: число устанавливается на клавиатуре и переносится в счетчик результатов при помощи нажатия кнопок (+) или (—). Счетчик результатов (результирующий счетчик в арифмометре) и счетчик оборотов имеют то же назначение.

Для того чтобы счетчик оборотов отсчитывал количество вычитаемых в том же направлении, что и при сложении, перед производством вычитания нажимают до отказа кнопку *15*.

Если при сложении и вычитании не требуется автоматически гасить установленные на клавиатуре числа, то рычаг *3* ставится в положение «*М*».

Для облегчения работы на клавиатуре машины имеются специальные разделительные линейки, выступающие на несколько миллиметров над клавиатурой

как по вертикали, разделяя разряды, так и по горизонтали. При известном опыте можно ощупью находить соответствующую область и в ней нужный клавиш.

Умножение чисел, имеющих не более шести знаков. Машина ставится в исходное положение и рычаг *13* — в положение от себя.

Множимое устанавливается в правой половине клавиатуры и так, чтобы низший разряд приходился в первом справа ряду, а множитель — в левой половине и низший разряд попадал бы на красный ряд. Нажимают кнопку (×), и машина сначала делает два подготовительных хода, после которых множитель переходит в мультипликатор (невидимый снаружи умножающий механизм), множимое остается на месте, а каретка автоматически передвигается вправо на число разрядов множителя без единицы. Затем начинается процесс умножения, продолжающийся до возвращения каретки в начальное положение и освобождения кнопки (×).

Произведение получается на счетчике результатов, множитель — на счетчике оборотов, а множимое — на клавиатуре. Положение запятой в произведении находится обычным способом (см. «Правило знаков» ниже).

Если на счетчиках уже находились некоторые числа, то на счетчике результатов получается сумма произведений, а на счетчике оборотов — сумма множителей. Чтобы получить разность произведений, надо рычаг *16* установить в положение « — », и тогда новое произведение вычитается из числа, имеющегося на счетчике результатов.

Гашение счетчиков и клавиатуры производится одновременным нажатием на кнопки *I*, *II*, *III*.

Умножение чисел, если один из сомножителей имеет более шести знаков, но само произведение содержит не более 12 знаков. Устанавливают рычаг *13* в положение «к себе».

Множитель с меньшим числом знаков устанавливается в левой половине клавиатуры так, чтобы низший разряд множителя приходился в красном ряду. При помощи нажатия кнопки (×) множитель передается в мультипликатор машины. Затем на клавиатуре устанавливают множитель, имеющий более шести знаков, и так, чтобы его низший разряд приходился на первый справа разряд клавиатуры.

После этого переводят рычаг *13* в положение «от себя», что вызывает автоматический процесс умножения, который заканчивается возвращением каретки в исходное положение, а кнопки (×) — в нормальное положение.

На счетчике результатов получится произведение, а на счетчике оборотов — меньший множитель.

Деление. Машина устанавливается в исходное положение, а рычаг *15* в среднее положение.

Делимое устанавливают в левой половине клавиатуры, начиная с крайнего левого ряда ее; делитель устанавливают в правой половине, начиная с красного ряда; нажимают кнопку (:), машина выполняет процесс деления и останавливается. Запятая в частном устанавливается по обычным правилам (см. ниже). Гашение производится кнопками *I*, *II*, *III*.

Если вычислитель забудет установить делитель и нажмет кнопку (:) (деление на нуль), то двигатель начинает работать беспрерывно. Для выключения двигателя надо рычаг *17* (прерыватель деления) отвести к себе, и двигатель остановится. Чтобы возвратить каретку в начальное положение, надо нажать кнопку (×).

Рычагом *17* останавливают деление и в том случае, когда при делении получилось достаточное число знаков.

Если при делении делимое имеет более семи знаков, то, установив делимое на клавиатуре в крайнем левом положении, нажатием на кнопку (+) передают его на счетчик результатов. Получившуюся на счетчике оборотов единицу гасят кнопкой *II*. Затем устанавливают делитель так, чтобы его высший разряд приходился в красном ряду и нажимают кнопку (:). На счетчике оборотов получается частное.

Правило знаков при умножении и делении. Обозначают через N_a число цифр в целой части числа a ($a > 1$) или число нулей после запятой до первой цифры, отличной от нуля, при $a < 1$, причем $N_a > 0$ при $a > 1$ и число N_a берется с минусом или равно нулю в случае $a < 1$.

Для произведения ab число

$$N_{ab} = N_a + N_b,$$

если первая значащая цифра произве-

дения ab меньше первой значащей цифры хотя бы одного из сомножителей, и

$$N_{ab} = N_a + N_b - 1,$$

если первая значащая цифра произведения ab больше первой значащей цифры хотя бы одного из сомножителей.

Если первые цифры сомножителей и произведения равны, то судят по вторым цифрам и т. д.

Для частного $a : b$ число

$$N_{a|b} = N_a - N_b,$$

если первая значащая цифра делимого меньше первой значащей цифры делителя, и

$$N_{a|b} = N_a - N_b + 1,$$

если первая значащая цифра делимого больше первой значащей цифры делителя.

Пример. 0,48 : 0,00192 = 250, т. е. в частном будет три знака до запятой, так как

$$N_{a|b} = N_a - N_b + 1 = 0 - (-2) + 1 = 3.$$

Комбинированные вычисления. Одновременное умножение двух множимых на один общий множитель. Если сомножители имеют небольшое число знаков, то их устанавливают в правой половине клавиатуры (с небольшим интервалом между ними), а общий множитель — в левой половине. Нажимают кнопку (×) и на счетчике результатов получают оба произведения.

Если сомножители не устанавливаются в правой половине, то используется рычаг *13*.

Последний переводится в положение „к себе". Общий множитель устанавливается на левой половине, и нажатием на кнопку (×) множитель переводится в мультипликатор машины. Затем на клавиатуре устанавливаются оба множителя с некоторым интервалом между ними (чтобы произведения на счетчике оборотов не слились). Рычаг *13* переводится в положение „от себя", и машина производит умножение. Оба произведения, разделенные друг от друга нулями, читаются на результирующем счетчике.

Вычисление суммы произведений $a_1b_1 \pm a_2b_2 \pm \ldots$. На машинах моделей 37 и 38 эта операция производится при помощи рычага *16*. Алгебраическая сумма читается на счетчике результатов; если эта сумма отрицательна, то появляется дополнение до 10^{κ}. Само отрицательное число получится после передвижения рычага *9* вправо на «—».

Вычисление суммы частных $\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} \pm \ldots$ Деление производят обычным способом, но счетчик оборотов не гасят, а на нем накапливают сумму частных, регулируя знаки частных рычагом *16*.

В машинах этого типа имеется накапливающий счетчик (или запоминающая шкала), помещаемый над счетчиками оборотов и результатов, и дополнительные кнопки M, S и SL, находящиеся на правой стороне машины выше кнопок *I*, *II*, *III*.

Накапливающий счетчик управляется кнопками S и SL, а именно: нажатием на S число, стоящее на счетчике результатов, передается на накапливающий счетчик; кнопкой SL это число обратно передается на счетчик результатов.

На счетчике результатов получают отдельные произведения, а на накапливающем счетчике — сумму этих произведений.

Кнопка M служит для многократного умножения и возведения в степень. При нажатии кнопки M число из левой половины счетчика результатов передается в умножающий механизм (невидимый снаружи), и в специальном окошке над левой стороной счетчика результатов появляется буква M (механизм занят).

Если требуется найти произведение abc, то сначала устанавливают число a в левой половине клавиатуры (как множитель при умножении) и кнопкой (+) передают его на счетчик результатов, а затем нажатием на кнопку M передают его в умножающий механизм.

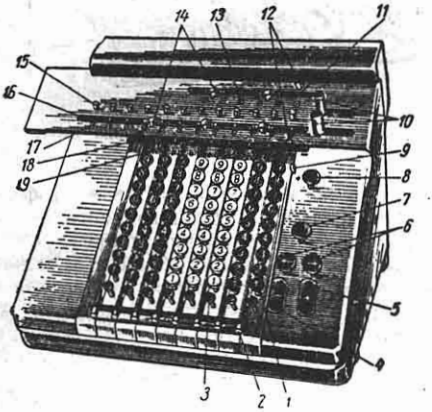
Набирают число b на правой половине клавиатуры. Нажимают кнопку (×), и в левой половине счетчика результатов появляется произведение ab, а на счетчике оборотов — число a.

Гасят клавиатуру и нажимают кнопку M, после чего произведение ab перейдет в умножающий механизм; в правой половине клавиатуры устанавливают третье число c и умножают по предыдущему.

ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА ТОЧМАШ, МОДЕЛЬ КЕВ

Полуавтоматическая клавишная вычислительная машина Точмаш, модель КЕВ (фиг. 9), имеет клавиатуру *1* (установочный механизм) с восемью рядами, что позволяет установить на ней самое большое восьмизначное число.

Линейки-разделители *2* выполняют функции запятых для клавиатуры.



Фиг. 9. Полуавтоматическая вычислительная машина Точмаш, модель КЕВ.

Клавиши *3* служат для поразрядного гашения клавиатуры.

Пусковые кнопки *4* со знаком «—» и *5* со знаком «+» служат для вычитания и сложения. Кнопки *6* со знаками «←» и «→» служат для передвижения каретки влево и вправо.

Чтобы передвинуть каретку на один разряд, надо сделать короткий удар по кнопке, а для передвижения каретки на несколько рядов надо держать кнопку нажатой до соответствующего момента.

Кнопка гашения *7* гасит весь набор, установленный на клавиатуре.

Кнопка закрепления набора *8* может быть нажата и поднята. Если кнопка нажата (устанавливается при сложении и вычитании), то набор гасится автоматически после каждого хода машины. Если же кнопка поднята (устанавливается при умножении и делении), то набор на клавиатуре закреплен, т. е. не гасится после хода машины; набор гасится при помощи кнопки гашения *7*.

Рычаг *9* управляет счетчиком оборотов. При положении «к себе» (или положении «+») направление счетчика оборотов соответствует знаку пусковой кнопки, суммирует положительные и вычитает отрицательные обороты.

При положении «от себя» (или положении «—») счетчик оборотов работает в обратном направлении, т. е. вычитает при нажатии кнопки «+» и складывает при нажатии кнопки «—».

Рычаги *10* служат для гашения счетчиков оборотов и результатов, для чего их надо передвинуть вправо. Счетчик оборотов *13* имеет шесть разрядов (окошек), шкала *11* счетчика оборотов имеет нумерацию окошек и передвижные запятые *14*. Стрелки *12* являются указателями положения каретки.

Счетчик результатов *17* имеет 12 разрядов (окошек), шкала *16* счетчика результатов имеет нумерацию окошек и передвижные запятые *14*.

Вертушки *15* служат для установки чисел на счетчике результатов без использования клавиатуры. Шкала *18* для клавиатуры имеет нумерацию разрядов. Контрольные окошки *19* показывают число, установленное на клавиатуре.

Исходное положение машины для выполнения сложения и вычитания следующее: клавиатура и счетчики погашены, рычаг *9* в положении «+», кнопка *8* нажата и закреплена, каретка на 1-м разряде, т. е. неподвижная запятая *12* указывает на 1-й разряд по шкале счетчиков оборотов и результатов.

Сложение и вычитание производятся как на арифмометре или на автомате модели 37.

Для умножения исходное положение машины следующее: счетчики и клавиатура погашены, каретка установлена на 1-й разряд, кнопка закрепления набора *8* поднята. Рычаг управления счетчиком оборотов *9* установлен в положение «к себе».

Устанавливают множимое на клавиатуре (в правой части ее) и умножение производится последовательным сложением (как на арифмометре) с передвижением каретки из одного разряда в другой для умножения на отдельные разряды множителя.

В счетчике результатов появляется произведение, в счетчике оборотов — множитель.

При умножении на цифры больше «5» можно применять сокращенные умножения, как на арифмометре, но при этом

благодаря наличию передачи десятков в счетчике оборотов последний показывает ответ прямыми цифрами (а не красными, как на арифмометре).

Для деления исходное положение такое же, как для умножения, но рычаг *9* находится в положении «—».

Передвигают каретку вправо до конца, устанавливают делимое на клавиатуре в левой ее части и нажатием на кнопку «+» передают делимое в счетчик результатов, затем гасят клавиатуру и счетчик оборотов. Делитель устанавливается на клавиатуре также в левой ее части, как на арифмометре. Деление производится последовательным вычитанием. Нажимается кнопка «—» и держится в таком положении, пока машина автоматически не остановится (пока не сработает автостоп); затем передвигают каретку на один разряд влево и опять нажимают на кнопку «—» и т. д. При появлении девяток в высшем разряде счетчика результатов машина останавливается не сразу, а сначала автоматически дает корректирующий ход.

Делимое можно устанавливать на счетчике результатов при помощи вертушек *15*.

Частное читается на счетчике оборотов.

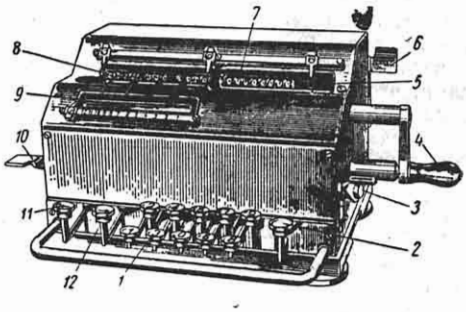
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ ВК

Вычислительная клавишная машина ВК бывает с ручным приводом (модель ВК-1), полуавтоматическая с электродвигателем (модель ВК-2) и автоматическая (ВК-3).

Машина модели ВК-1 (фиг. 10) является усовершенствованным арифмометром, в котором рычажки заменены клавиатурой с десятью клавишами *1* для установки числа.

Справа находится клавиш *2* для передвижения каретки в левое положение (используется при делении после установки числа на клавиатуре).

Рычаг *3* служит для гашения установленного числа. Рукояткой *4* произ-



Фиг. 10. Вычислительная машина ВК-1.

водят те же операции, что и в арифмометре. Окошко красного сигнала *5* показывает направление работы счетчика оборотов. Рычаг *6* гасит счетчик оборотов. Окошки счетчика оборотов *7* и счетчика результатов *8* имеют то же назначение, что и на арифмометре. Имеется контрольное окно *9*. Рычаг *10* гасит счетчик результатов.

Слева от клавиатуры находятся две кнопки «←» и «→», из которых первая (*11*) служит для передвижения каретки влево на один разряд, а вторая — для передвижения вправо.

На машине модели ВК-3 можно автоматически применять сокращенный прием умножения на цифры больше «5», что невозможно в автоматах, описанных выше, а при делении можно автоматически применять рациональный прием деления, состоящий в попеременном использовании кнопок сложения и вычитания.

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ К РАЗДЕЛУ «МАТЕМАТИКА»

Алгебра

1. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, Гостехиздат, М. — Л. 1953.
2. Окунев Л. Я., Высшая алгебра, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
3. Сушкевич А. К., Основы высшей алгебры, Гостехиздат, М. — Л. 1941.
4. Шапиро Г. М., Высшая алгебра, Учпедгиз, 1937.

Элементарная геометрия и тригонометрия

5. Перепелкина А. Н. и Новоселов С. И., Геометрия и тригонометрия для учительских институтов, Учпедгиз, М. — Л. 1947.
6. Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. I (геометрия на плоскости); ч. II (геометрия в пространстве), Гостехиздат, М. — Л. 1948 и 1949.
7. Степанов Н. Н., Сферическая тригонометрия, Гостехиздат, М. — Л. 1948.

Аналитическая и дифференциальная геометрия

8. Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия, ч. I и II, ОНТИ, М. — Л. 1939.
9. Бюшгенс С. С., Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М. — Л. 1940.
10. Выгодский М. Я., Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
11. Делоне Б. Н. и Райков Д. А., Аналитическая геометрия, Гостехиздат, М. — Л., т. I, 1948; т. II, 1949.
12. Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, Гостехиздат, М. — Л. 1950.
13. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, Гостехиздат, М. — Л., ч. I, 1947; ч. II, 1948.
14. Лопшиц А. М., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М. 1948.
15. Милинский В. И., Дифференциальная геометрия, изд. Кубуч, Л. 1934.
16. Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, Гостехиздат, М. — Л. 1947.
17. Норден А. П., Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, М. 1948.
18. Привалов И. И., Аналитическая геометрия, Гостехиздат, М. — Л. 1952.
19. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М — Л. 1950.
20. Фиников С. П., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М. 1952.
21. Фиников С. П., Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, М. 1939.
22. Фиников С. П., Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М. 1952.
23. Фиников С. П., Теория поверхностей, ОНТИ, М. — Л. 1934.

Общие курсы анализа

24. Бермант А. Ф., Курс математического анализа для втузов, Гостехиздат, М. — Л., ч. I, 1953; ч. II, 1953.
25. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. I и II, Гостехиздат, М. — Л. 1933.
26. Власов А. К., Курс высшей математики, т. I и II, Гостехиздат, М. — Л. 1952.
27. Гребенча М. К. и Новоселов С. И., Курс математического анализа, Учпедгиз, М., т. I, 1953, т. II, 1953.
28. Гурса Э., Курс математического анализа, т. I — III, ГТТИ, 1933 — 1934.
29. Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I и II, ГНТИ, М. — Л. 1931.
30. Лузин Н. Н., Дифференциальное исчисление, „Советская наука", М. 1953.
31. Лузин Н. Н., Интегральное исчисление, „Советская наука", М. 1953.
32. Немыцкий В. В., Слудская М. И., Черкасов А. Н., Курс математического анализа, т. I и II, Гостехиздат, М. — Л. 1944.
33. Поссе К. и Привалов И., Курс дифференциального исчисления, ОНТИ, М. — Л. 1939.
34. Поссе К. и Привалов И., Курс интегрального исчисления, ОНТИ, М. — Л. 1939.
35. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Гостехиздат, М. — Л., т. I, 1953; т. II, 1953; т. III, ч. 1-я, 1953; т. III, ч. 2-я, 1953 т. IV, 1953; т. V, 1947.
36. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, М. — Л., т. I, 1951; т. II, 1951; т. III, 1949.
37. Фихтенгольц Г. М., Математика для инженеров, ГТТИ, М. — Л., ч. I, 1934; ч. II, вып. 1, 1932; ч. II, вып. 2, 1933.
38. Франклин Ф., Математический анализ, ч. I и II, Издательство иностранной литературы, М. 1950.
39. Хинчин А. Я., Восемь лекций по математическому анализу, Гостехиздат, М. — Л, 1948.
40. Хинчин А. Я., Краткий курс математического анализа, ГТТИ, М. 1953.

Функции комплексного переменного

41. Гурвитц А., Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, М. — Л. 1933.
42. Курант Р., Геометрическая теория функций комплексной переменной, ГТТИ, М.—Л. 1934.
43. Лаврентьев М. А., Конформные отображения, Гостехиздат, М. — Л. 1946.
44. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, М. — Л. 1951.
45. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, М. — Л. 1952.
46. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, ГОНТИ, М. — Л. 1948.
47. Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного, Гостехиздат, М.—Л. 1949.
48. Янчевский С. А., Функции комплексного переменного, изд. Кубуч, Л. 1937.

Дифференциальные уравнения

49. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ОНТИ Украины, Харьков 1939.

50. Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. I и II, ГТТИ, М. — Л. 1933 — 1934.

51. Гребенча М. К., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Учпедгиз, М. 1937.

52. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Издательство иностранной литературы, 1951.

53. Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах, Гостехиздат, М. — Л. 1950.

54. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л. 1952.

55. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М. — Л. 1953

56. Пиаджио, Интегрирование дифференциальных уравнений, ГТТИ, М. — Л. 1933.

57. Стеклов В. А., Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, ГИЗ, М. — Л. 1927.

58. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л. 1953.

59. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М. — Л. 1947.

60. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М. 1953.

Специальные вопросы анализа

61. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М. — Л. 1947.

62. Бари Н. К., Теория рядов, Учпедгиз, М. 1938.

63. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Издательство иностранной литературы, ч. I, М. 1949.

64. Гарди Г., Интегрирование элементарных функций, ОНТИ, М. — Л. 1935.

65. Геронимус Я. Л., О применении методов Чебышева к задаче уравновешивания механизмов, Гостехиздат, М. — Л. 1948.

66. Гливенко В. И., Интеграл Стильтьеса, ОНТИ, М. — Л. 1936.

67. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, М. — Л. 1934.

68. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Издательство иностранной литературы, М. 1953.

69. Джексон Д. Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, Издательство иностранной литературы, М. 1948.

70. Диткин В. Л. и Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М. — Л. 1951.

71. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М. — Л. 1939.

72. Карман Т. и Био М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, М. — Л. 1948.

73. Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, Издательство иностранной литературы, М. 1948.

74. Конторович П. Г., Операционное исчисление, Гостехиздат, М. — Л. 1949.

75. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ГТТИ, М. — Л. 1935.

76. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I и II, Гостехиздат, М. — Л. 1951.

77. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления ОНТИ, М. — Л. 1938.

78. Лурье А. И., Операционное исчисление, Гостехиздат, М. — Л. 1950.

79. Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, Гостехиздат, М. — Л. 1950.

80. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, М. — Л. 1949.

81. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, М. — Л. 1948.

82. Привалов И. И., Ряды Фурье, ОНТИ, М. — Л. 1934.

83. Серебренников М. Г., Гармонический анализ, Гостехиздат, М. — Л. 1938.

84. Стефенсон И. Ф., Теория интерполяций, Гостехиздат, М. — Л. 1935.

85. Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, М. — Л. 1951.

86. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. I и II, Гостехиздат, М. — Л. 1933, 1934.

87. Фихтенгольц Г. М. и Натансон И. П., Криволинейные и кратные интегралы, ОНТИ, М. — Л. 1937.

88. Эльсгольц Л. Э., Вариационное исчисление, Гостехиздат, М. — Л. 1952.

Векторное и тензорное исчисление

89. Гольдфайн И. А., Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, М. — Л. 1948.

90. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, Гостехиздат, М. — Л., ч. I, 1950; ч. II, 1952.

91. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ГОНТИ, М. — Л. 1951.

92. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, М. — Л. 1953.

93. Фиников С. П., Векторный анализ, ГНТИ, М. — Л. 1931.

94. Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. I, Алгебра тензоров, ГТТИ, М. — Л. 1934.

95. Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, Издательство иностранной литературы, М. 1948.

Теория вероятностей и математическая статистика

96. Арлей, Нильс и Бух, Рандер К., Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, Издательство иностранной литературы, 1951.

97. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, Гостехиздат, М. — Л. 1946.

98. Боев Г. П., Теория вероятностей, Гостехиздат, М. — Л. 1950.

99. Гливенко В. И., Курс теории вероятностей, ОНТИ, М. — Л. 1939.

100. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Гостехиздат, М. — Л. 1950.

101. Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я., Элементарное введение в теорию вероятностей, Гостехиздат, М. — Л. 1952.

102. Гончаров В. Л., Теория вероятностей, Оборонгиз, М. 1939.

103. Лахтин Л. К., Курс теории вероятностей, Госиздат, М. 1924.

104. Марков А. А., Исчисление вероятностей, Госиздат, М. 1924.

105. Марков А. А., Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Изд. АН СССР, 1951.

106. Романовский В. И., Математическая статистика, ОНТИ, М. — Л. 1938.

107. Романовский В. И., Элементарный курс математической статистики, Гостехиздат, 1939.

108. Романовский В. И., Основные задачи теории ошибок, Гостехиздат, М. — Л. 1947.
109. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения (Дискретное распределение), Издательство иностранной литературы, 1952.
110. Фрай Т., Теория вероятностей для инженеров, ГТТИ, М. — Л. 1934.
111. Чебышев П. Л., Теории вероятностей, лекции 1879—1880 гг., АН СССР М. — Л. 1936.

Приближенные вычисления

112. Безикович Я., Приближенные вычисления, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
113. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М. — Л. 1952.
113а. Гинодман В. А., Механизация учета и вычислительных работ, Машгиз, М. 1950.
114. Занден Г., Элементы прикладного анализа, ГТТИ, М. — Л. 1932.
115. Идельсон Н. И., Способ наименьших квадратов, ГТТИ, М. — Л. 1932.
116. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952.
117. Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.
118. Ларченко Е. Г., Техника вычислений, Геодезиздат, М. 1952.
119. Марков А. А., Исчисление конечных разностей, Матезис, Одесса 1911.
120. Милн В. Э., Численный анализ, Издательство иностранной литературы, М. 1951.
121. Оппоков Г. В., Численное интегрирование дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л. 1932.
122. Панов Д. Ю., Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, М. — Л. 1951.
123. Панов Д. Ю., Счетная линейка, Гостехиздат, М. — Л. 1953.
124. Скарборо Дж., Численные методы математического анализа, ГТТИ, М. — Л. 1934.
125. Уиттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, М. — Л. 1933.
126. Фадеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М. — Л. 1950.
127. Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
128. Шилов П. И., Способ наименьших квадратов, Геодезиздат, 1941.

Графические методы исчисления

129. Блох Л. С., Основные графические методы обработки опытных данных, Машгиз, М. — Л. 1951.
130. Герсеванов И. М., Основы номографии, ГНТИ, М. 1932.
131. Глаголев Н. А., Теоретические основы номографии, ОНТИ, М. — Л. 1936.
132. Головнин Д. Н., Графическая математика, ГНТИ, М. — Л. 1931.
133. Графический справочник по математике. Атлас кривых под ред. А. Ф. Берманта, ч. I, ОНТИ, М. — Л. 1937.
134. Мелентьев П. В., Номография, ГНТИ, М. 1933.
135. Невский Б. А., Методика построения номограмм, ОНТИ, М. — Л. 1937.
136. Пентковский М. В., Номография, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
137. Справочник по номографии под ред. Н. А. Глаголева, ОНТИ, М. — Л. 1937.
138. Швердт Г., Номография на основе геометрии отображения, ГНТИ Украины, Харьков 1935.

Таблицы и справочники

139. Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, М. 1952.
140. Бакингем Э., Руководство по проектированию зубчатых передач, ч. I, Математические таблицы, Машгиз, М. 1946.
141. Барлоу, Таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел до 12 500, Издательство иностранной литературы, М. 1950.
142. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, для инженеров и учащихся втузов, ГТТИ, М. — Л. 1953.
143. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. II. Таблицы бесселевых функций, Издательство иностранной литературы, М. 1949.
144. Виллерс Ф. А., Математические инструменты, Издательство иностранной литературы, М. 1949.
145. Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике, Гостехиздат, М. — Л. 1952.
146. Граве Д. А., Элементарный курс теории чисел, Киев 1913 (в этом курсе дана таблица наименьших делителей чисел до 108 000).
147. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, Издательство иностранной литературы, М. 1948.
148. Делоне Б. Н., Краткий курс математических машин, ч. I, Гостехиздат, 1952.
149. Люстерник Л. А., Акушский И. Я. и Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, вып. I, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
150. Майзель В. М., Справочное руководство по машиностроению, ГНТИ Украины, Харьков 1937.
151. „Машиностроение", Энциклопедический справочник, т. 1, кн. I, Машгиз, М. 1947.
152. Никитин А. А., Таблицы процентных отношений, изд. ЦУНХУ Госплана СССР, М. 1940.
153. О. Рурк, Таблицы умножения, Гостехиздат, М. 1949.
154. Рыжик И. М. и Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М. — Л. 1951.
155. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. АН СССР, М. — Л. 1950.
156. Хренов Л. С., Пятизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, М. — Л. 1949.
157. Хренов Л. С., Семизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, М. — Л. 1951.
158. Шумягский Б. М., Таблицы для решения кубических уравнений, Гостехиздат, М. — Л. 1950.
159. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М. — Л. 1949.

ГЛАВА XVIII

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

Основные положения

Сила, приложенная к точке, изображается *вектором*, равным по величине данной силе и направленным в сторону ее действия.

Механической системой называется совокупность материальных частиц, в которой движение каждой частицы зависит от положения и движения остальных.

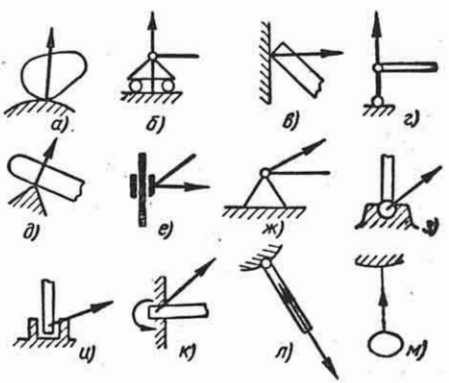
Механическая (или материальная) система называется *неизменяемой* (или *абсолютно твердым телом*), если расстояние между каждыми двумя ее точками постоянно; в противном случае система называется *изменяемой*, или *деформируемой*.

Твердым телом называется система, в которой при исследовании или изучении данного механического явления можно пренебречь взаимными смещениями частиц. Силы взаимодействия между частицами (или телами) данной системы называются *внутренними*, тогда как силы, действующие со стороны тел, не принадлежащих к системе, называются *внешними*. Системы сил, производящие на тело одно и то же действие, называются *эквивалентными*. Сила, эквивалентная системе сил, называется ее *равнодействующей*. Силу, не нарушая ее действия, можно в абсолютно твердом теле переносить в любую точку, лежащую на линии ее действия. Сила может быть *сосредоточенной* (если она приложена в одной точке) или *распределенной* (по длине, поверхности или объему данного тела).

Связи. Условия, стесняющие свободу движения механической системы, называются *связями*. Сила, заменяющая действие связи, называется *реакцией связи*; реакции — силы *пассивные*; прочие силы (обычно задаваемые) называются *активными*. Связи реализуются в виде каких-то тел (не входящих в изучаемую систему).

Основные типы связей:

1. Гладкая опорная поверхность; реакция направлена по нормали к опорной поверхности



Фиг. 1. Типы связей.

(фиг. 1, *а*, *б*, *в*, *г* — схематическое изображение).

2. Опорная точка при опирающейся гладкой поверхности (фиг. 1, *д*); реакция направлена по нормали к опирающейся поверхности.

3. Скользящая муфта, а также подшипник (фиг. 1, *е*); реакция располагается в плоскости, нормальной к направляющей оси.

4. Неподвижная точка, например, шарнир, подпятник (фиг. 1, *ж*, *з*, *и*); реакция проходит через эту точку, но ее направление заранее не известно.

5. Заделка (фиг. 1, *к*); помимо неизвестной реактивной силы возникает момент.

6. Жесткий стержень (фиг. 1, *л*); реакция (усилие) направлена вдоль стержня (растяжение или сжатие).

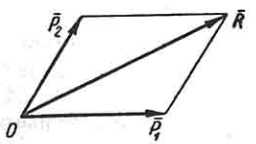
7. Гибкая нить (фиг. 1, *м*); реакция (натяжение) направлена по нити.

Сложение и разложение сил

Правило параллелограмма сил. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, выражается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (фиг. 2):

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos(\widehat{\bar{P}_1,\bar{P}_2})};\\ \frac{P_1}{\sin(\widehat{\bar{P}_2,\bar{R}})} &= \frac{P_2}{\sin(\widehat{\bar{P}_1,\bar{R}})} = \frac{R}{\sin(\widehat{\bar{P}_1,\bar{P}_2})}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

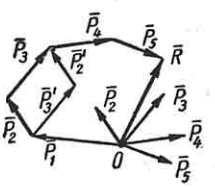
Всякую силу можно разложить в плоскости по двум произвольным направлениям. Для этого следует построить параллелограмм, диагональю которого является эта сила, а стороны имеют заданные направления; эти стороны — искомые *составляющие*, или *компоненты силы*.



Фиг. 2. Параллелограмм сил.

Правило многоугольника сил. Равнодействующая произвольного числа *сходящихся сил* (или *пучка сил*) выражается замыкающей стороной силового многоугольника (фиг. 3). Она называется геометрической суммой составляющих сил и не зависит от порядка слагаемых:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i. \quad (2)$$

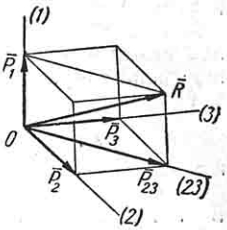


Фиг. 3. Многоугольник сил.

В случае равновесия системы сходящихся сил силовой многоугольник сам собой замыкается.

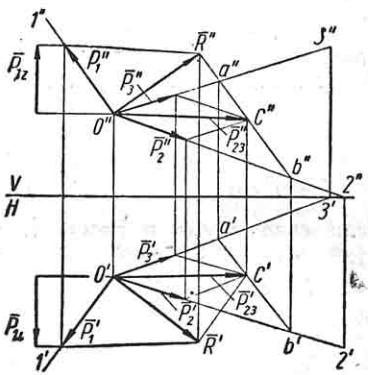
Если все силы действуют вдоль одной и той же прямой, то геометрическое сложение вырождается в алгебраическое.

Правило параллелепипеда сил. Равнодействующая трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, выражается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах (фиг. 4). Разложение силы по трем направлениям, не лежащим в одной плоскости, можно осуществить либо при помощи построения параллелепипеда, либо путем двукратного разложения силы. В последнем случае проводим две плоскости: через силу $\bar{R}$ и одно направление, а затем через два других направления, и находим линию пересечения (*23*) этих двух плоскостей. Разложение очевидно из чертежа.



Фиг. 4. Параллелепипед сил.

Задачу разложения можно решить в ортогональных проекциях [*1, 32*] (фиг. 5). Дана сила $\bar{R}$ и направления *1*, *2*, *3*. Через конец $\bar{R}$ проводим прямую, параллельную направлению *1*, отмечаем точки *A* (*a'*, *a''*) и *B* (*b'*, *b''*) на направлениях *3* и *2*, которые вместе с точкой *O* (*o'*, *o''*) определяют плоскость *2*, *3*; находим точку *C* (*c'*, *c''*) пересечения упомянутой прямой с этой плоскостью. Прямая *OC* (*o'c'*, *o''c''*) соответствует прямой (*23*) на фиг. 4.



Фиг. 5. Разложение силы в ортогональных проекциях.

Таким образом, приходим к двукратному разложению силы $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_{23}$; $\bar{P}_{23} = \bar{P}_2 + \bar{P}_3$. Для нахождения величин

сил надо найти их вертикальные составляющие (например, P_{1z}); тогда

$$P_1 = \sqrt{P_1'^2 + P_{1z}^2}$$

и т. д.

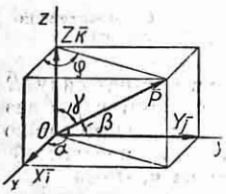
Можно также воспользоваться составляющими в горизонтальной плоскости, перпендикулярными к оси проекции, т. е.

$$P_1 = \sqrt{P_1''^2 + P_{1x}^2}$$

и т. д.

Разложение по осям координат. В прямоугольной системе координат (фиг. 6) имеет место разложение

$$\bar{P} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$



Фиг. 6. Разложение силы по осям координат.

где X, Y, Z—проекции силы на оси, а $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы (орты), определяющие направления осей. Проекции вычисляются либо через углы α, β, γ силы с осями координат, либо же через два угла: угол γ с одной из осей и угол φ (азимут), определяющий положение плоскости, в которой действует сила:

$$\left.\begin{aligned} X &= P\cos\alpha = P\sin\gamma\cos\varphi; \\ Y &= P\sin\beta = P\sin\gamma\sin\varphi; \\ Z &= P\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Если сила лежит в плоскости xOy, то $\gamma = 90°$, $\beta = 90° - \alpha$:

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\sin\alpha.$$

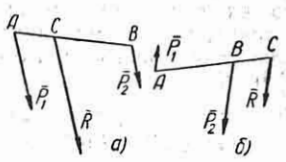
Кроме указанного расположения осей, образующих *правую систему*, применяется также расположение, получаемое перестановкой осей x и y, дающее *левую систему*.

Равновесие трех непараллельных сил в плоскости. Для равновесия трех сил необходимо и достаточно, чтобы их линии действия пересекались в одной точке, а силы образовали замкнутый силовой треугольник (см. стр. 353).

Фиг. 7. Графическое определение опорных реакций балки.

Пример. Балка AB (фиг. 7) с шарнирной опорой A и гладкой опорой B нагружена сосредоточенной силой P. Линия действия реакции в B известна; следовательно, реакция в A проходит через точку O. Из силового треугольника (см. внизу фиг. 7) находим величины реакций.

Сложение двух параллельных сил. Равнодействующая двух параллельных сил (фиг. 8, *а* и *б*), направленных в одну или в противоположные стороны (в последнем случае, если $P_1 \neq P_2$), равна их алгебраической сумме ($R = P_1 \pm P_2$) и делит прямую, соединяющую точки приложения данных сил, внутренним или внешним образом на части, обратно



Фиг. 8. Два случая сложения двух параллельных сил.

пропорциональные этим силам. В обоих случаях имеют место соотношения

$$\frac{AC}{P_2} = \frac{BC}{P_1} = \frac{AB}{R}.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно данную силу $\bar{R}$ разлагать на две параллельные $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ в различных случаях (например, зная точки приложения обеих сил).

В общем случае равнодействующая произвольного числа параллельных сил (если она существует) равна их алгебраической сумме

$$R = \sum P_i. \qquad (4)$$

Моменты сил и пар

Момент силы относительно центра. Моментом силы $\bar{P}$ относительно некоторого центра (или относительно точки) O называется произведение величины силы P на ее плечо h относительно центра (т. е. кратчайшее расстояние от центра точки O, называемой *центром момента*, до линии действия силы). Численно момент равен

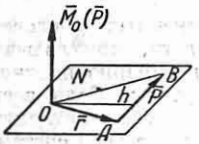
$$M_0(\bar{P}) = Ph. \qquad (5)$$

Момент силы относительно центра изображается вектором, перпендикулярным к плоскости, проходящей через силу и центр момента так, чтобы из его конца вращение силы вокруг центра представлялось против часовой стрелки

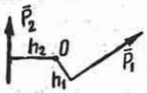
(это — в правой системе, в левой — наоборот). Тогда момент может быть представлен в виде векторного произведения радиуса-вектора точки приложения силы на силу (фиг. 9)

$$\overline{M}_0(\overline{P}) = \overline{r} \times \overline{P}.$$

При рассмотрении плоских систем сил все векторы-моменты параллельны; тогда геометрические операции заменяются алгебраическими, причем момент считается положительным при вращении против часовой стрелки и наоборот.



Фиг. 9. Геометрическое представление момента силы относительно точки.



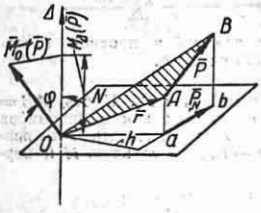
Фиг. 10. Алгебраические значения моментов двух сил.

Пример. На фиг. 10 даны две силы, для которых

$$M_0(\overline{P}_1) = +P_1h_1;$$

$$M_0(\overline{P}_2) = -P_2h_2.$$

Момент силы относительно оси. Моментом силы $\overline{P}$ относительно оси Δ называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно какой-либо точки O оси (фиг. 11). Иначе говоря, это есть момент проекции $\overline{P}_N$ силы на плоскость N, перпендикулярную к оси, относительно точки O пересечения оси с плоскостью:



Фиг. 11. Момент силы относительно оси.

$$M_\Delta(\overline{P}) = M_0(\overline{P})\cos\varphi = M_0(\overline{P}_N). \quad (6)$$

Если X, Y, Z — проекции силы, а x, y, z — координаты точки ее приложения, то моменты силы относительно осей координат соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} M_x(\overline{P}) &= yZ - zY; \\ M_y(\overline{P}) &= zX - xZ; \\ M_z(\overline{P}) &= xY - yX. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

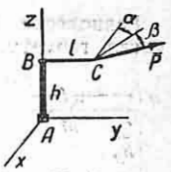
Момент силы относительно оси равен нулю, если сила пересекает ось или параллельна оси.

Пример. На конец C рукоятки ворота ABC (фиг. 12) действует сила P, образующая с горизонтом угол β; угол между вертикальной плоскостью, проходящей через силу, и плоскостью xAz (азимут) равен α. Длина рукоятки l, расстояние между опорами h:

$$X = -P\cos\alpha\cos\beta;$$

$$Y = P\sin\alpha\cos\beta;$$

$$Z = -P\sin\beta.$$



Фиг. 12. Вычисление моментов силы относительно осей координат.

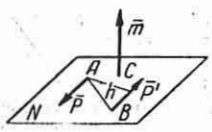
По формулам (7) находим ($x = 0$, $y = l$, $z = h$):

$$M_x = -P(l\sin\beta + h\sin\alpha\cos\beta);$$

$$M_y = -Ph\cos\alpha\cos\beta;\ M_z = Pl\cos\alpha\cos\beta.$$

То же можно найти и проектированием силы на плоскости, перпендикулярные к соответствующим осям.

Пара сил. Парой сил называется совокупность двух численно равных параллельных сил, направленных в разные стороны. Расстояние h между линиями действия сил пары называется ее плечом (фиг. 13). Пару нельзя заменить (а следовательно, и уравновесить) одной силой.

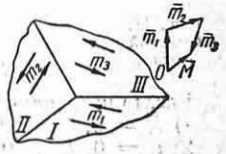


Фиг. 13. Геометрическое представление момента пары.

Момент пары. Моментом пары называется произведение одной из сил пары на ее плечо (фиг. 13):

$$m = Ph. \quad (8)$$

Момент пары изображается вектором, перпендикулярным к плоскости действия пары и приложенным в любой точке. Направление этого вектора, а также алгебраическое представление момента пары для случая плоской задачи подчиняются тем же правилам, что и момент силы. Пары с геометрически равными моментами эквивалентны.



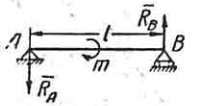
Фиг. 14. Сложение пар в пересекающихся плоскостях.

Сложение пар. При сложении нескольких пар получается новая (результ

тирующая) пара, момент которой равен геометрической (в плоскости — алгебраической) сумме моментов пар составляющих (фиг. 14):

$$\overline{M} = \sum \overline{m}_i. \qquad (9)$$

Равновесие пар имеет место тогда, когда геометрическая (в плоскости — алгебраическая) сумма их моментов равна нулю.



Фиг. 15. Определение опорных реакций балки, находящейся под действием пары.

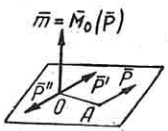
Пример. На балку с пролетом l действует пара с моментом m (фиг. 15). Так как пару можно уравновесить лишь парой с таким же численно моментом, то имеем

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}.$$

Произвольная система сил

Параллельное перемещение силы. Всякую силу $\overline{P}$, не нарушая ее действия, можно перенести параллельно самой себе в любую точку O (фиг. 16), присоединив при этом пару с моментом, равным моменту силы $\overline{P}$ относительно точки O:

$$\overline{m} = \overline{M}_0(\overline{P}).$$



Фиг. 16. Приведение одной силы к заданному центру.

Приведение системы сил к заданному центру. В результате указанной операции, применяемой ко всем силам системы, получается *силовой мо́тор* (фиг. 17), т. е. совокупность результирующей силы — *главного вектора* $\overline{R}$ и результирующей пары с *главным моментом* $\overline{L}_0$, причем

Фиг. 17. Силовой мо́тор.

$$\overline{R} = \sum \overline{P}_i;$$

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{M}_0(\overline{P}_i). \qquad (10)$$

Различные случаи приведения:

1) $R = 0$, $L_0 = 0$ — равновесие;

2) $R = 0$, $L_0 \neq 0$ — пара;

3) $R \neq 0$, $L_0 = 0$ — равнодействующая;

4) $R \neq 0$, $L_0 \neq 0$, $\varphi = 90°$ — переменой центра O сводится к предыдущему;

5) $R \neq 0$, $L_0 \neq 0$, $\varphi = 0$ или $180°$ — *динама, силовой или динамический винт*;

6) $R \neq 0$, $L_0 \neq 0$, φ — произвольный угол, переменой центра O приводится к предыдущему.

Если система приводится к равнодействующей, то имеют место следующие две теоремы:

I. Момент равнодействующей относительно какого-либо центра равен геометрической (в плоскости — алгебраической) сумме моментов всех составляющих относительно того же центра.

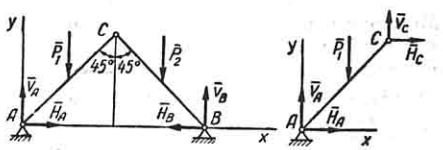
II. Момент равнодействующей относительно какой-либо оси равен алгебраической сумме моментов всех составляющих относительно той же оси.

Условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, приведены в табл. 1 (стр. 358).

Равновесие сочлененных систем. Систему делят на части, прикладывая в местах разделения попарно противоположные и равные силы. Если всего n частей, то можно либо составлять уравнения равновесия для всей системы и $n - 1$ части, либо же только для n частей.

Если число уравнений достаточно для определения неизвестных сил, система называется *статически определимой*, в противном случае — *статически неопределимой*.

Пример. Два равных бруска AC и CB (фиг. 18) с шарнирами в точках A, B, C загружены в своих серединах вертикальными силами



Фиг. 18. Определение реакций в плоской сочлененной системе.

(например, своими весами) P_1 и P_2. Пусть $AB = 4l$. Берем всю систему. Так как в шарнирах направления реакций заранее неизвестны, мы вводим их составляющие — горизонтальную H и вертикальную V:

$$\sum X = H_A - H_B = 0;$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 4 - P_2 \cdot 3 - P_1 \cdot 1 = 0;$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 4 + P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 1 = 0,$$

отсюда

$$V_A = \frac{1}{4}(3P_1 + P_2); \quad V_B = \frac{1}{4}(P_1 + 3P_2).$$

Разделяем систему по шарниру C, отбрасываем правую часть и вводим силы V_C, H_C (левая часть представлена отдельно):

$$\sum X = H_A + H_C = 0;$$

$$\sum Y = V_A + V_C - P_1 = 0;$$

$$\sum M_C = H_A \cdot 2 - V_A \cdot 2 + P_1 \cdot 1 = 0,$$

отсюда

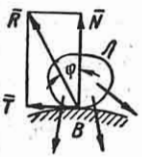
$$V_C = \frac{1}{4}(P_1 - P_2);$$

$$H_A = -H_C = H_B = \frac{1}{4}(P_1 + P_2).$$

Если бы мы составляли уравнения равновесия также и для правой части, то в точке C ввели бы силы $-V_C$, $-H_C$.

Системы с трением

Трение скольжения. Если силы, приложенные к телу A, стремятся его сдвинуть (или же двигают) по опорной поверхности B (фиг. 19), то в месте соприкосновения помимо нормальной составляющей реакции N возникает касательная составляющая, направленная против движения действительного или возможного, обусловленная шероховатостью соприкасающихся поверхностей и называемая *силой трения*. Наибольшая величина силы сухого трения пропорциональна нормальному давлению трущихся поверхностей друг на друга (закон Кулона):



Фиг. 19. Трение скольжения.

$$T_{\max} = fN \text{ или } T \leqslant fN, \qquad (11)$$

где f — *коэффициент трения скольжения* (безразмерная величина). Величина f зависит от материала и качества обработки (а также и от температуры) трущихся поверхностей. В момент начала движения ($T = T_{\max}$) f имеет наибольшее значение (статический коэффициент трения или коэффициент трения при покое), после чего сразу несколько уменьшается, изменяясь в дальнейшем со скоростью сравнительно мало. При этом для большинства материалов f при увеличении скорости уменьшается.

Фиг. 20. Конус трения.

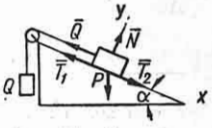
Углом трения называется угол между полной реакцией и нормальной реакцией. При $T = T_{\max}$ этот угол называется *предельным углом трения* (фиг. 19); обозначая его через φ, имеем $\varphi = \operatorname{arctg} f$.

Конус с углом растворения 2φ, описанный вокруг общей нормали к соприкасающимся поверхностям, называется *конусом трения* (фиг. 20). Его свойство: для равновесия тела на шероховатой поверхности равнодействующая приложенных к нему сил должна проходить внутри конуса трения (например, $\bar{P}_1$, но не $\bar{P}_2$).

Пример. Исследовать равновесие груза P (фиг. 21) на шероховатой плоскости при наличии гири Q.

Если вес гири Q мал, то

$$\sum X = P \sin\alpha - Q - T_1 = 0;$$



Фиг. 21. Равновесие системы с трением.

если он велик, то

$$\sum X = P \sin\alpha - Q + T_2 = 0.$$

В обоих случаях

$$\sum Y = N - P\cos\alpha = 0;$$

$$T_1 = P\sin\alpha - Q \leqslant fN = fP\cos\alpha;$$

$$T_2 = Q - P\sin\alpha \leqslant fN = fP\cos\alpha.$$

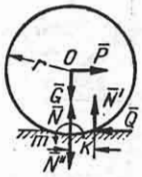
Получаем условия для Q:

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant Q \leqslant P(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Если $Q = 0$ (груз P удерживается лишь силой трения), то $\operatorname{tg}\alpha \leqslant f$, $\alpha \leqslant \varphi$, т. е. предельный угол наклона равен предельному углу трения.

Трение качения. При качении тела по поверхности (фиг. 22) к его оси должна быть приложена сила P для преодоления сопротивления, выражаемого *моментом сопротивления при качении* (моментом пары трения качения):

$$m = kN, \qquad (12)$$



Фиг. 22. Трение качения.

где N — нормальное давление (в случае фиг. 22 равно весу G); k — коэффициент трения качения (выражается в единицах длины), называемый также плечом пары трения. Пара $(\bar{N}', \bar{N}'')$ с моментом m смещает нормальную реакцию N в сторону движения на расстояние k. Если Q есть касательная составляющая реакции (вследствие вмятия), то при равномерном качении имеет место равновесие двух пар: $(\bar{P}, \bar{Q})$ и $(\bar{G}, \bar{N}')$.

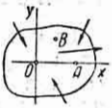
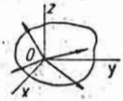
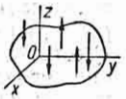
Качение без скольжения имеет место, если

$$fr > k.$$

Примечание. О трении подробнее см. стр. 433.

Таблица 1

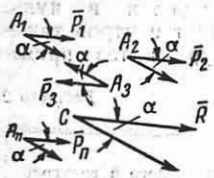
Условия равновесия сил, приложенных к твердому телу

Расположение сил	Схема	Условия равновесия
Силы на одной прямой		Алгебраическая сумма $\sum P_i = 0$
Сходящиеся силы на плоскости		$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0$
Параллельные силы на плоскости		Две формы (силы параллельны оси Y): 1) $\sum Y_i = 0; \quad \sum M_0(\overline{P}_i) = 0;$ 2) $\sum M_0(\overline{P}_i) = 0; \quad \sum M_A(\overline{P}_i) = 0,$ где OA не должно быть параллельно силам
Произвольная плоская система сил		Три формы; 1) $\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum M_0(\overline{P}_i) = 0;$ 2) $\sum M_0(\overline{P}_i) = 0; \quad \sum M_A(\overline{P}_i) = 0;$ $\sum X_i = 0.$ Во всяком случае ось проекций не должна быть перпендикулярна прямой OA. 3) $\sum M_0(\overline{P}_i) = 0; \quad \sum M_A(\overline{P}_i) = 0;$ $\sum M_B(\overline{P}_i) = 0.$ Точки O, A, B не должны лежать на одной прямой
Сходящиеся силы в пространстве		$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0$
Параллельные силы в пространстве		$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_x(\overline{P}_i) = 0;$ $\sum M_y(\overline{P}_i) = 0$ (если силы параллельны оси z)
Произвольная система сил в пространстве		$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0;$ $\sum M_x(\overline{P}_i) = 0; \quad \sum M_y(\overline{P}_i) = 0;$ $\sum M_z(\overline{P}_i) = 0$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Основные определения

Центр параллельных сил. Центром параллельных сил называется точка C, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил (фиг. 23) независимо от их направления.



Фиг. 23. Центр параллельных сил.

Координаты центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; \quad y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \quad z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}. \quad (13)$$

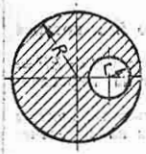
где x_i, y_i, z_i — координаты точки приложения силы P_i.

Центр тяжести. Центром тяжести материальной системы (или тела) называется центр параллельных сил, приложенных ко всем частицам системы и пропорциональных весам этих частиц. Эта точка, называемая также центром масс, имеет координаты

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \quad (14)$$

где m_i — массы частиц с координатами x_i, y_i, z_i; $M = \sum m_i$ — масса всей системы (тела); $\sum m_i x_i$, $\sum m_i y_i$, $\sum m_i z_i$ — *статические моменты массы тела* относительно координатных плоскостей Oyz, zOx, xOy.

В этих формулах под m_i можно разуметь также массы конечных элементов тела, а под x_i, y_i, z_i — координаты центров тяжести этих элементов. Если тело имеет полости, то их можно считать дважды заполненными положительной и „отрицательной" массами.



Фиг. 24. Определение центра тяжести фигуры с вырезом.

Пример. При определении центра тяжести диска с вырезом (фиг. 24) можно считать систему состоящей из сплошного диска радиуса R с положительной массой M и пустоты радиуса r с соответствующей „отрицательной" массой m.

Центры тяжести однородных тел

Общие принципы:

1) Если тело симметрично относительно некоторой точки, его центр тяжести совпадает с этой точкой.

2) Если тело симметрично относительной некоторой оси, его центр тяжести лежит на этой оси.

3) Если тело симметрично относительно некоторой плоскости, его центр тяжести лежит в этой плоскости.

Центры тяжести однородных линий:

$$x_c = \frac{\sum \Delta L_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta L_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum \Delta L_i z_i}{L}, \quad (15)$$

где ΔL_i — элементы длины линии; $L = \sum \Delta L_i$ — полная длина линии.

Центры тяжести однородных поверхностей:

$$x_c = \frac{\sum \Delta F_i x_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta F_i y_i}{F}; \quad z_c = \frac{\sum \Delta F_i z_i}{F}, \quad (16)$$

где ΔF_i — элементы площади поверхности; $F = \sum \Delta F_i$ — полная площадь поверхности.

Центры тяжести однородных объемов:

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_i x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_i y_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_i z_i}{V}, \quad (17)$$

где ΔV_i — элементы объема тела; $V = \sum \Delta V_i$ — полный объем тела.

Написанные три группы формул могут быть истолкованы двояко:

1) при разбиении системы на конечные элементы ΔL_i, ΔF_i, ΔV_i обозначают соответственно длину, площадь, объем элемента, а x_i, y_i, z_i — координаты его центра тяжести;

2) при определении центра тяжести непрерывно распределенных масс ограниченных аналитическими кривыми или поверхностями могущими быть представленными в виде уравнений, суммы переходят в интегралы, распространенные по длине, поверхности, объему:

$$\int_L x\,dL, \ldots \int_F x\,dF, \ldots \int_V x\,dV, \ldots$$

При приближенном определении центра тяжести имеем конечные суммы вместо интегралов.

В случае плоских фигур имеем для линий

$$x_c = \frac{\sum \Delta L_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta L_i y_i}{L}$$

и для площадей

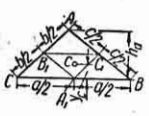
$$x_c = \frac{\sum \Delta F_i x_i}{F}; \quad y_c = \frac{\sum \Delta F_i y_i}{F};$$

здесь $\sum \Delta F_i y_i = S_x$ — *статический момент площади* относительно оси x; $\sum \Delta F_i x_i = S_y$ — статический момент этой площади относительно оси y.

Если центр тяжести лежит на какой-либо оси, то соответствующий статический момент обращается в нуль. Формулы для координат центров тяжести однородных фигур и тел приведены в табл. 2.

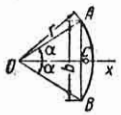
Таблица 2

Центры тяжести однородных фигур и тел



Периметр треугольника.
Центр тяжести находится в центре круга, вписанного в треугольник $A_1B_1C_1$, вершины которого находятся в серединах сторон данного треугольника; расстояние центра тяжести от стороны a

$$y_c = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$$



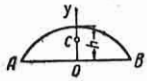
Дуга окружности

$$x_c = \frac{rb}{l} = r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 57{,}296r\,\frac{\sin\alpha^\circ}{\alpha^\circ},$$

где l — длина дуги; α — угол в радианах;
при $\alpha^\circ = 90^\circ$ (полуокружность) $x_c = \frac{2r}{\pi} = 0{,}6366r$

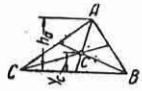
„ $\alpha^\circ = 45^\circ$ $x_c = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi} = 0{,}9003r$

„ $\alpha^\circ = 30^\circ$ $x_c = \frac{3r}{\pi} = 0{,}9549r$



Дуга параболы

$$y_c = \frac{2}{3}h$$



Площадь треугольника.
Центр тяжести находится в точке пересечения медиан, отсекая от каждой из них $^1/_3$ (считая от стороны); его расстояние от стороны $BC = a$

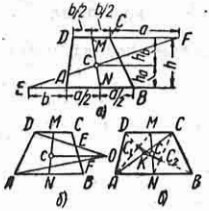
$$y_c = \frac{1}{3}h_a.$$

Вообще

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

$$z_c = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3),$$

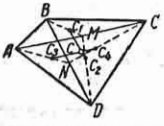
где в скобках — координаты вершин A, B, C



Площадь трапеции

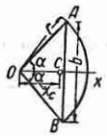
$$h_a = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}; \quad h_b = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}.$$

Графическое построение:
а) Откладывают $CF = a$, $AE = b$ и проводят прямую EF, которая пересекает медиану MN в центре тяжести.
б) Делят одну из боковых сторон на три равные части $CE = EF = FB$, проводят DE и AF. Центр тяжести лежит на пересечении $Oc \parallel AB$ и медианы MN.
в) Трапецию разбивают диагональю на два треугольника, центры тяжести которых c_1 и c_2; центр тяжести находится на пересечении MN и c_1c_2



Площадь произвольного четырехугольника.
Диагоналями AC и BD производится двоякое разбиение на треугольники с центрами тяжести c_1, c_2, c_3, c_4; центр тяжести всей фигуры находится на пересечении c_1c_2 и c_3c_4

Продолжение табл. 2



Площадь кругового сектора

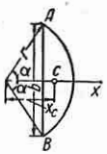
$$x_c = \frac{2rb}{3l} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = 38{,}197 \frac{r \sin \alpha^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{r^2 b}{3F},$$

где l — длина дуги; F — площадь; α — угол в радианах.

При $\alpha^\circ = 90^\circ$ (полукруг) $x_c = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244r$

„ $\alpha^\circ = 45^\circ$ (квадрант) $x_c = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} r = 0{,}6002r$

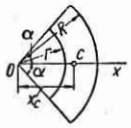
„ $\alpha^\circ = 30^\circ$ (секстант) $x_c = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366r$



Площадь кругового сегмента

$$x_c = \frac{b^3}{12F} = \frac{2r^3 \sin^3 \alpha}{3F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha},$$

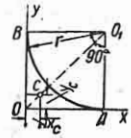
где α — угол в радианах; F — площадь сегмента



Площадь части кругового кольца

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 38{,}197 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha^\circ},$$

где α — угол в радианах

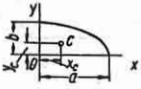


Площадь кругового треугольника.

Круговой треугольник получается вычитанием квадранта из квадрата

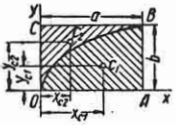
$$x_c = y_c = \frac{10 - 3\pi}{12 - 3\pi} r = 0{,}2234r;$$

$$Oc = x_c \sqrt{2} = 0{,}3159r$$



Площадь эллиптического квадранта (четвертой части эллипса)

$$x_c = \frac{4a}{3\pi} = 0{,}4244a; \quad y_c = \frac{4b}{3\pi} = 0{,}4244b$$



Площади, ограниченные параболой.

Параболический полусегмент OAB:

$$x_{c_1} = \frac{3}{5} a; \quad y_{c_1} = \frac{3}{8} b.$$

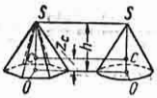
Параболический треугольник OCB:

$$x_{c_2} = \frac{3}{10} a; \quad y_{c_2} = \frac{3}{4} b$$

Боковая поверхность призмы (вообще наклонной).

Центр тяжести c боковой поверхности призмы (а также цилиндра) с параллельными основаниями лежит в центре тяжести периметра среднего сечения

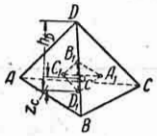
Продолжение табл. 2



Боковая поверхность пирамиды и конуса

$$z_C = \frac{1}{3} h;$$

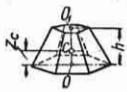
C лежит на прямой SO, где O — центр тяжести периметра основания



Полная поверхность треугольной пирамиды.
Центр тяжести находится в центре шара, вписанного в пирамиду $A_1B_1C_1D_1$, вершины которой совпадают с центрами тяжести граней; его расстояние от грани ABC

$$z_C = \frac{h_D}{3} \cdot \frac{F_A + F_B + F_C}{F_A + F_B + F_C + F_D},$$

где F_A, F_B, F_C, F_D — площади граней, противолежащих вершинам A, B, C, D



Боковая поверхность усеченной пирамиды

$$z_C = \frac{h}{3} \cdot \frac{P + 2p}{P + p},$$

где P и p — периметры нижнего и верхнего оснований: O и O_1 — их центры тяжести

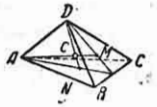
Боковая поверхность усеченного конуса

$$z_C = \frac{h}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}$$

Сферическая поверхность шарового пояса (в частности, сегмента)

$$z_C = \frac{1}{2} h$$

Объем призмы (вообще наклонной).
Центр тяжести C объема призмы (а также цилиндра) с параллельными основаниями лежит в центре тяжести площади среднего сечения



Объем треугольной пирамиды.
Центр тяжести всякой треугольной пирамиды лежит в точке пересечения прямых, соединяющих какие-либо две ее вершины с центрами тяжести противоположных граней, отсекая от каждой из них $^1/_4$ (считая от грани).

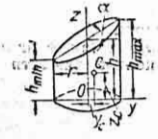
Если h — высота пирамиды, то $z_C = \frac{1}{4} h$. Вообще

$$x_C = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$y_C = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4);$$

$$z_C = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4),$$

где в скобках — координаты вершин



Объем наклонно усеченного прямого круглого цилиндра:

$$y_C = \frac{r^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h}; \quad z_C = \frac{h}{2} + \frac{r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{8h};$$

здесь $h = \frac{1}{2}(h_{\max} + h_{\min})$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2r}(h_{\max} - h_{\min})$$

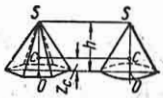
Продолжение табл. 2

Объем цилиндрической полой подковы:

$$y_C = \frac{3}{16}\pi\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}; \qquad z_C = \frac{3}{32}\pi\frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}.$$

В случае сплошной подковы ($r = 0$, $h = 0$)

$$y_C = \frac{3}{16}\pi R; \quad z_C = \frac{3}{32}\pi H$$



Объем пирамиды и конуса:

$$z_C = \frac{1}{4}h;$$

c лежит на прямой SO, где O — центр тяжести площади основания

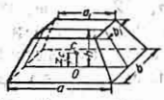
Объем усеченной пирамиды:

$$z_C = \frac{h}{4}\cdot\frac{F + 2\sqrt{FF_1} + 3F_1}{F + \sqrt{FF_1} + F_1},$$

где F и F_1 — площади соответственно нижнего и верхнего оснований; O и O_1 — их центры тяжести

Объем усеченного конуса:

$$z_C = \frac{h}{4}\cdot\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

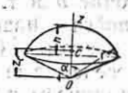


Объем обелиска:

$$z_C = \frac{h}{2}\cdot\frac{ab + ab_1 + a_1b + 3a_1b_1}{2ab + ab_1 + a_1b + 2a_1b_1}.$$

Центр тяжести лежит на прямой, соединяющей центры тяжести площадей оснований.

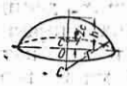
Для клина ($b_1 = 0$) $\quad z_C = \frac{h}{2}\cdot\frac{a + a_1}{2a + a_1}$



Объем шарового сектора:

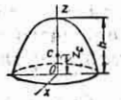
$$z_C = \frac{3}{8}(2r - h) = \frac{3}{8}(1 + \cos\alpha)r = \frac{3}{4}r\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

для полушара ($\alpha° = 90°$) $\quad z_C = \frac{3}{8}r$



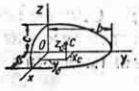
Объем шарового сегмента:

$$z_C = \frac{h}{4}\cdot\frac{4r - h}{3r - h}$$



Объем параболоида вращения:

$$z_C = \frac{1}{3}h$$



Объем эллипсоидального октанта (восьмой части эллипсоида)

$$x_C = \frac{3}{8}a; \quad y_C = \frac{3}{8}b; \quad z_C = \frac{3}{8}c$$

Теорема Паппа — Гульдена.

1. Площадь поверхности, полученной вращением плоской линии около оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равна длине этой линии, умноженной на длину окружности, описываемой ее центром тяжести:

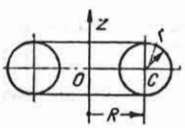
$$F = L \cdot 2\pi r_C. \qquad (18)$$

2. Объем тела, полученного вращением плоской фигуры около оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, описываемой ее центром тяжести:

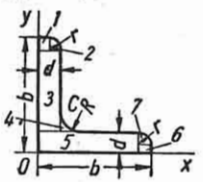
$$V = F \cdot 2\pi r_C. \qquad (19)$$

Пример. Вращением окружности вокруг оси z получается тор (фиг. 25). Вычислить его поверхность и объем.

На основании указанных двух теорем
$F = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr$;
$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2$.



Фиг. 25. Тор.



Фиг. 26. Центр тяжести равнобокого уголка.

Пример. Равнобокий уголок (№10, ОСТ 10014-39, фиг. 26) имеет размеры в *мм*: $b = 100$, $d = 10$, $R = 12$, $r = 4$. Площади отдельных частей (в *мм*²):

$$\Delta F_1 = 24;\quad \Delta F_2 = 12{,}5;\quad \Delta F_3 = 860;\quad \Delta F_4 = 31;$$
$$\Delta F_5 = 960;\quad \Delta F_6 = 24;\quad \Delta F_7 = 12{,}5.$$

Полная площадь $F = 1924$ *мм*². Части *1*, *3*, *5*, *6* — прямоугольники, *2* и *7* — квадранты, *4* — круговой треугольник;

$$x_1 = 3;\quad x_2 = 6 + 1{,}7 = 7{,}7;\quad x_3 = 5;$$
$$x_4 = 10 + 2{,}68 = 12{,}68;\quad x_5 = 48;\quad x_6 = 98;$$
$$x_7 = 96 + 1{,}7 = 97{,}7;$$

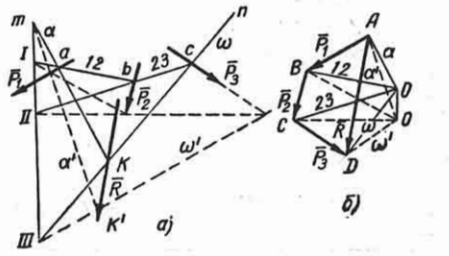
$$x_C = \frac{\sum \Delta F_i x_i}{F} = \frac{54521}{1924} = 28{,}3 \text{ мм};\quad y_C = x_C.$$

Определение координат центров тяжести при помощи интегрального исчисления см. стр. 191. Графический метод определения координат центров тяжести см. стр. 365. Кроме того, существует еще предложенный проф. А.А. Поповым графо-аналитический метод, так называемый метод ортогональных фокусов, который использует специальные шаблоны [25].

ГРАФОСТАТИКА

Веревочный многоугольник

Сложение сил. Дана плоская система сил $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ (фиг. 27, *а*). Начиная из произвольной точки A (фиг. 27, *б*), строят *силовой многоугольник* $ABCD$, определяющий величину и направление (но не *линию действия*) *равнодействующей*, иначе говоря, главный вектор $\bar{R}$.

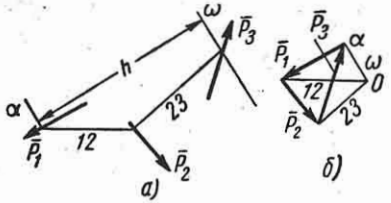


Фиг. 27. Сложение сил с помощью веревочного многоугольника. Общий случай.

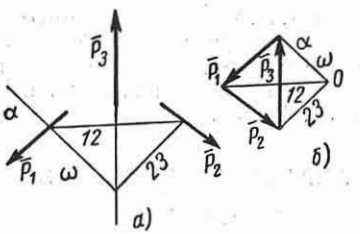
Если из произвольной точки O, называемой *полюсом*, провести к вершинам A, B, C, D лучи OA, OB, OC, OD, получается *силовой план* $OABCD$. Обозначая лучи через α, *12*, *23*, ω, проводим (фиг. 27, *а*), начиная из произвольной точки m, прямые, параллельные соответствующим лучам: α — до пересечения с линией действия $\bar{P}_1$ в некоторой точке *a*, *12* — до пересечения с линией действия $\bar{P}_2$ в точке *b* и т. д. Получаемая фигура *mabcn* называется *веревочным многоугольником*. Продолжая до взаимного пересечения его крайние стороны α и ω, получаем точку K, лежащую на линии действия равнодействующей. Длины лучей представляют величины составляющих данных сил вдоль соответствующих сторон многоугольника *mabcn* (т. е. натяжения участков веревочного многоугольника). Если полюс взять в другой точке O', то стороны нового веревочного многоугольника будут пересекаться с соответственными сторонами прежнего в точках m, I, II, III на прямой, параллельной OO'.

Частные случаи. 1) Силовой многоугольник замкнут, а веревочный разомкнут (фиг. 28, *а* и *б*). Система приводится к паре, составляющие силы которой равны совпавшим лучам α и ω, а плечо h.

2) Силовой и веревочный многоугольники сами собой замыкаются (фиг. 29, *а* и *б*). Система сил находится в равновесии.



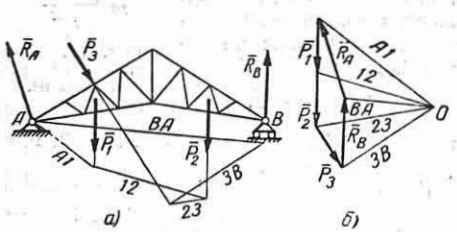
Фиг. 28. Случай пары сил.



Фиг. 29. Случай равновесия.

Применение веревочного многоугольника к определению опорных реакций. Так как реакции совместно с задаваемыми нагрузками дают равновесие, то оба многоугольника замыкаются.

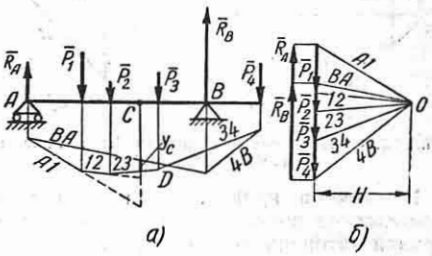
Случай произвольно направленных сил (фиг. 30, *а* и *б*). При построении силового многоугольника (фиг. 30, *б*) заданные силы можно



Фиг. 30. Определение опорных реакций фермы, находящейся под действием произвольно направленных сосредоточенных сил.

обходить в любом порядке, но тот же порядок соблюдать и при построении веревочного многоугольника (фиг. 30, *а*). Его первая сторона *A1* должна быть проведена через неподвижную опору, в которой направление реакции заранее неизвестно. Сторона *3B* доводится до пересечения с линией действия реакции, известной по направлению. Параллельно замыкающей *BA* строится луч, приводящий уже к определению обеих реакций.

Случай параллельных сил (фиг. 31, *а* и *б*). Поскольку в представленном случае направления обеих реакций очевидны, построение веревочного многоугольника можно начинать с любой точки, лежащей на линии действия реакции. Этот многоугольник



Фиг. 31. Определение опорных реакций балки, находящейся под действием сосредоточенных параллельных сил.

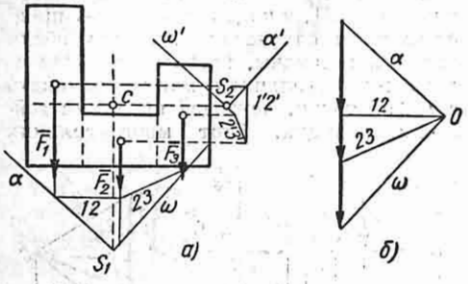
является *многоугольником моментов*, так как отрезки вертикальной прямой, проходящей через какую-либо точку *C* балки (фиг. 31, *а*), заключенные между двумя смежными сторонами веревочного многоугольника (или их продолжениями), будучи умножены на *полюсное расстояние H* силового плана (фиг. 31, *б*) дают моменты соответствующих сил относительно точки *C*. Например, отрезок между сторонами *A1* и *12* определит момент силы P_1. Отрезок y_C между сторонами, называемый *ординатой веревочного многоугольника*, умноженный на *H*, дает сумму моментов сил, лежащих слева от точки *C* относительно этой точки, или *изгибающий момент* в сечении *C*:

$$M_C = y_C H. \qquad (20)$$

Применение веревочного многоугольника к определению центра тяжести плоской фигуры. Делят фигуру на части, центр тяжести каждой из которых известен (хотя бы приближенно). В этих центрах тяжести строят систему параллельных сил (фиг. 32, *а* и *б*), пропорциональных площадям частей.

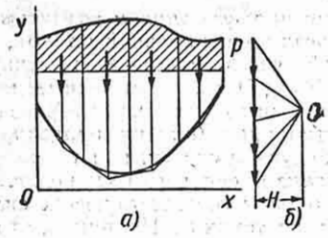
При помощи веревочного многоугольника α — *12*—*23* — ω находят точку S_1, лежащую на линии действия равнодействующей. Далее поворачивают направления сил на 90° и строят веревочный многоугольник $\alpha' - 1'2' - 2'3' - \omega'$, стороны которого перпендикулярны сто-

ронам предыдущего; находят точку S_2. Центр тяжести c лежит на пересечении двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через S_1 и S_2.



Фиг. 32. Определение положения центра тяжести плоской фигуры.

Веревочная кривая. Если дана *распределенная* по некоторому закону нагрузка интенсивностью p (рассчитанной на единицу длины), то заштрихованную на чертеже (фиг. 33, *а*) *грузовую площадь* делят на несколько частей. Центры



Фиг. 33. Веревочная кривая для распределенной нагрузки.

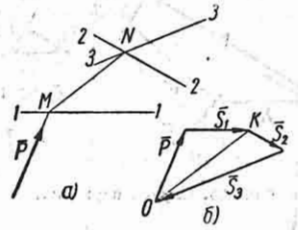
тяжести этих частей, которые, например, можно приближенно принять за трапеции, находят одним из изложенных способов, и строят веревочный многоугольник. При увеличении числа делений новые веревочные многоугольники стремятся к *веревочной кривой*, вписанной во все эти многоугольники. Дифференциальное уравнение веревочной кривой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{H}. \qquad (21)$$

В частности, если $p = \text{const}$, имеем параболу

$$y = \frac{p}{2H}x^2 + C_1x + C_2.$$

Уравновешивание данной силы тремя силами, линии действия которых заданы. Пусть силу $\overline{P}$ требуется уравновесить силами, действующими по прямым *11*, *22*, *33* (фиг. 34, *а*). Находим точку M пересечения силы с одной из прямых и точку N пересечения двух других прямых. Затем (фиг. 34, *б*) из произвольной точки O строим силу $\overline{P}$, прямую $OK \parallel MN$, а далее силовой



Фиг. 34. Уравновешивание данной силы тремя силами.

четырехугольник, построение которого очевидно. Тем самым находим искомые силы S_1, S_2, S_3.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

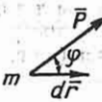
Работа. Мощность

Элементарная работа. Элементарной работой силы $\overline{P}$ на пути ds называется произведение проекции силы на направление пути на величину пути (фиг. 35):

$$d'A = Pds\cos\varphi = P_{ds}ds. \qquad (22)$$

Здесь знак $'$ поставлен вследствие того, что элементарная работа вообще не есть дифференциал. В векторной форме работа выражается скалярным произведением силы на перемещение:

$$d'A = \overline{P}\cdot\overline{dr},$$

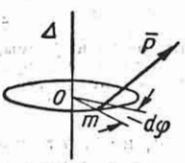


Фиг. 35. Элементарная работа силы.

где $|\overline{dr}| = ds$. При $\varphi < 90°$ $d'A > 0$; при $\varphi > 90°$ $d'A < 0$.

В аналитической форме выражение работы имеет вид

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz, \qquad (23)$$



Фиг. 36. Работа силы при вращательном движении.

где X, Y, Z — проекции силы на оси координат, а x, y, z — координаты точки приложения силы.

Работа при вращательном движении. Элементарная работа силы при вращении тела, на которое сила действует (фиг. 36), равна произ-

ведению момента силы относительно оси вращения на угол поворота:

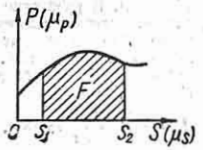
$$d'A = M_{\Delta}(\bar{P})\, d\varphi. \qquad (24)$$

Работа на конечном пути. При движении точки приложения силы по траектории MN (фиг. 37) работа выражается посредством *криволинейного интеграла*, взятого на пути MN:

$$A = \int_{\overset{\frown}{MN}} P_v ds = \int_{\overset{\frown}{MN}} (X dx + Y dy + Z dz), \qquad (25)$$

где P_v — проекция силы $\bar{P}$ на скорость (которая направлена по касательной).

Фиг. 37. Работа силы на конечном пути.



Фиг. 38. Графическое вычисление работы.

Если проекцию силы на касательную (обозначим ее просто P) выразить в функции пути s и представить зависимость графически (фиг. 38), откладывая по оси абсцисс в единице длины μ_s единиц проходимого пути, а по оси ординат в единице длины μ_p единиц силы (масштабные множители), то работа на пути от s_1 до s_2 пропорциональна заштрихованной площади:

$$A = \mu_p \mu_s F.$$

Пример. Пусть $\mu_p = 0{,}5$ *кГ/мм*, $\mu_s = 0{,}2$ *м/мм*, $F = 100$ *мм*^{2}; тогда $A = 10$ *кГм*.

Мощность. Мощностью N в момент времени t называется предел отношения элементарной работы к соответствующему промежутку времени:

$$N = \frac{d'A}{dt}. \qquad (26)$$

Если известна функциональная зависимость совершаемой работы от времени, то мощность является производной работы по времени. Мощность может быть представлена так:

$$N = P_v v \text{ кГм/сек} = \frac{1}{75} P_v v \text{ л. с.} =$$

$$= \frac{1}{102} P_v v \text{ квт}. \qquad (27)$$

Для случая вращательного движения

$$N = M_{\Delta}(\bar{P})\, \omega \text{ кГм/сек} =$$

$$= \frac{1}{75} M_{\Delta}(\bar{P})\, \omega \text{ л. с.} =$$

$$= \frac{M_{\Delta}(\bar{P}) \cdot n}{716{,}2} \text{ л. с.} = \frac{M_{\Delta}(\bar{P}) \cdot n}{974} \text{ квт}, \qquad (28)$$

где ω — угловая скорость в сек$^{-1}$, n — число оборотов в минуту.

Потенциальная энергия

Определения. Если работа силы, приложенной к точке, не зависит от формы траектории, то говорят, что сила имеет *потенциал*. Работа, совершаемая силой при перемещении точки приложения из некоторого *фиксированного нулевого* положения в заданное, называется *силовой функцией силы* U, являющейся функцией координат точки. Работа, совершаемая при перемещении из данного положения в нулевое, называется *потенциалом силы* V, или *потенциальной энергией точки* Π:

$$\Pi = V = -U. \qquad (29)$$

Область действия сил, имеющих потенциал, называется *потенциальным силовым полем*. В таком поле элементарная работа является полным дифференциалом силовой функции, а проекции силы на оси координат — частными производными ее по соответствующим координатам:

$$d'A = dU = -d\Pi;$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (30)$$

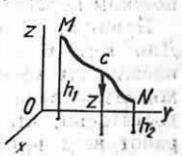
Все сказанное для точки обобщается и на случай системы.

Сила тяжести. Если за нулевое положение принять произвольную горизонтальную плоскость xOy (фиг. 39) и направить ось z вверх, то

$$U = -mgz = -Gz;$$

$$\Pi = Gz,$$

где m — масса тела; G — его вес; z — координата центра тяжести.



Фиг. 39. Работа силы тяжести.

Работа на пути MN

$$A = G(h_1 - h_2). \qquad (31)$$

Обобщенные координаты и силы. Если положение системы можно полностью определить посредством некоторого числа k независимых величин $q_1, q_2, \ldots, q_k$, которыми, в частности, могут быть декартовы координаты, то эти величины называются *обобщенными координатами*, k — числом *степеней свободы*, а коэффициенты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ при дифференциалах координат в выражении элементарной работы

$$d'A = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \ldots + Q_k dq_k \quad (32)$$

называются *обобщенными силами*.

В потенциальном силовом поле

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \ldots$$

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (33)$$

Пример. При вращении тела около неподвижной оси за обобщенную координату принимают угол поворота φ. Так как $d'A = M_\Delta\, d\varphi$, то обобщенной силой является момент силы (или сумма моментов) относительно оси, называемый вращающим моментом.

Принцип возможных перемещений

Определения. *Возможным*, или *виртуальным*, перемещением системы (обозначается символом δ) называется всякое элементарное перемещение ее, допускаемое в данный момент связями. Перемещение, при котором система не покидает связи, называется *неосвобождающим*, в противном случае — *освобождающим*. Связь, не допускающая освобождающих перемещений, называется *удерживающей*, *неосвобождающей*, или *двусторонней*; если же связь допускает освобождающие перемещения, она называется *неудерживающей*, *освобождающей*, или *односторонней*. Связь называется *идеальной*, если сумма работ ее реакций на всяком возможном перемещении равна нулю.

Принцип возможных перемещений. Для того чтобы система, подчиненная идеальным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю:

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\widehat{P_i, \delta s_i}) = 0) \quad (34)$$

или в аналитической форме

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \quad (35)$$

В обобщенных координатах

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_k = 0. \quad (36)$$

В потенциальном силовом поле

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0.$$

Это — условия, необходимые (но еще недостаточные) для экстремума функции Π.

Пример. К рукоятке винтового пресса (фиг. 40) приложена пара с моментом m; шаг винта h. Поступательное перемещение винта δz, угол поворота $\delta\varphi$; $\delta z : h = \delta\varphi : 2\pi$. Если реакция сжимаемого тела равна P, то $m\delta\varphi - P\delta z = 0$, или

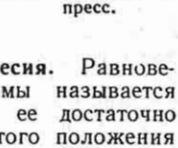
$$\left(m - P\frac{h}{2\pi}\right)\delta\varphi = 0;$$

здесь

$$Q = m - \frac{Ph}{2\pi} = 0,$$

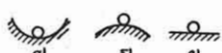
следовательно,

$$P = \frac{2\pi m}{h}.$$



Фиг. 40. Винтовой пресс.

Устойчивость равновесия. Равновесие материальной системы называется *устойчивым*, если при ее достаточно малом отклонении из этого положения она стремится в него возвратиться (фиг. 41, *а*). Если же при отклонении система стремится удалиться от положения равновесия, равновесие называется неустойчивым (фиг. 41, *б*). Если, наконец, система не проявляет тенденции ни к возвращению в положение равновесия, ни к удалению от него, равновесие называется *безразличным* (фиг. 41, *в*).



Фиг. 41. Различные случаи равновесия.

Теорема Лагранжа — Дирихле. Если в данном положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, равновесие устойчиво.

Теорема Ляпунова [17]. Равновесие системы неустойчиво, если:

1) отсутствие минимума потенциальной энергии узнается уже по членам второго порядка (в ее разложении в ряд Тейлора) без необходимости рассмотрения членов высших порядков;

2) потенциальная энергия в рассматриваемом положении равновесия имеет

максимум, определяемый членами наинизшего (но не обязательно второго) порядка в разложении потенциальной энергии.

Если потенциальная энергия Π есть квадратичная форма относительно обобщенных координат

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j c_{ij}q_iq_j,$$

то необходимое и достаточное условие устойчивости заключается в положительности всех главных миноров матрицы:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

где $c_{ij} = c_{ji}$, т. е.

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

это есть так называемый *критерий Сильвестра.*

Теорема Ляпунова предполагает возможность разложения потенциальной энергии системы в окрестности положения равновесия в ряд по степеням обобщенных координат, отсчитываемых от этого положения:

$$\Pi = (\Pi)_0 + \frac{1}{2!}\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 q_iq_j + \\ + \frac{1}{3!}\sum_i\sum_j\sum_l\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial q_i\partial q_j\partial q_l}\right)_0 q_iq_jq_l + \ldots,$$

где нуликами отмечены значения частных производных потенциальной энергии в положении равновесия. Суммирование производится по всем индексам от 1 до k, если k — число степеней свободы. При отсчете потенциальной энергии от положения равновесия (что наиболее часто встречается) член $(\Pi)_0$ исчезает.

Теоремы Лагранжа — Дирихле и Ляпунова относятся к силам, имеющим потенциал. Для силы тяжести иллюстрацией может служить тяжелый шарик на поверхности (фиг. 41). Вообще, если при малом отклонении опертого твердого тела от положения равновесия его центр тяжести повышается, равновесие устойчиво, если понижается — неустойчиво, наконец, если остается на прежнем уровне — безразлично.

Пример. В некоторых задачах на системы с одной степенью свободы потенциальная энергия имеет вид

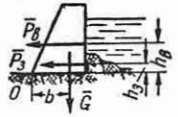
$$\Pi = a_0 + a_2q^2 + a_4q^4 + a_6q^6 + \ldots,$$

где $a_0, a_2, a_4 \ldots$ — постоянные.

Требуется сделать заключение об устойчивости.

Постоянная a_0 не имеет существенного значения. Если $a_2 > 0$, равновесие устойчивое (по теореме Лагранжа — Дирихле); если $a_2 < 0$, равновесие неустойчивое (по теореме Ляпунова); если, наконец, $a_2 = 0$, то аналогично рассматривают a_4. Вообще, если первый, не равный нулю, коэффициент положителен, равновесие устойчиво, если отрицателен, — неустойчиво.

Устойчивость на опрокидывание. Отношение момента *удерживающего* (или момента устойчивости) к моменту *опрокидывающему* называется *коэффициентом устойчивости на опрокидывание* $\varkappa$.



Фиг. 42. Устойчивость плотины.

Пример. Пусть плотина (фиг. 42) подвергается действию давления воды $P_в$ на высоте $h_в$ и земли $P_з$ на высоте $h_з$; вес плотины G действует на расстоянии b от ребра O.

Коэффициент устойчивости на опрокидывание вокруг ребра

$$\varkappa = \frac{Gb}{P_вh_в + P_зh_з}.$$

КИНЕМАТИКА

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

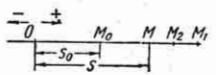
Прямолинейное движение точки

Закон движения. Положение точки M на прямой (фиг. 43) определяется ее *расстоянием* $s = OM$ от некоторой фиксированной точки O — начала отсчета расстояний. Расстояние считается в одну сторону положительным, в другую — отрицательным. Если точка, выйдя в некоторый *начальный* момент времени $t=0$ из *начального* положения M_0, переместилась сначала в положение M_1, а затем в M_2, то расстояние M_0M_2 назы-

вается *перемещением* точки, а арифметическая сумма $M_0M_1 + M_1M_2$ — ее *путем*. Закон движения дается либо уравнением

$$s = f(t), \qquad (37)$$

либо таблицей соответствующих друг другу значений s и t, либо графически.



Фиг. 43. Определение положения точки в прямолинейном движении.

Скорость. Если $s_1 = f(t_1)$, $s_2 = f(t_2)$, то *средней скоростью точки* за промежуток времени $t_2 - t_1$ называется выражение

$$v^* = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Скоростью точки в момент времени t называется

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \qquad (38)$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование по времени (см. стр. 3).

Размерность скорости: $\frac{\text{длина}}{\text{время}}$.

Ускорение. Если скорости v_1 и v_2 соответствуют моментам времени t_1 и t_2, то *средним ускорением точки* за промежуток времени $t_2 - t_1$ называется выражение

$$a^* = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорением точки в момент времени t называется

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}. \qquad (39)$$

Размерность ускорения: $\frac{\text{длина}}{\text{время}^2}$.

Скорость v и ускорение a иногда называются соответственно истинной скоростью и истинным ускорением.

Если знаки $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ одинаковы, то скорость по абсолютной величине возрастает, и движение называется *ускоренным*, в противном случае — *замедленным*. Основные задачи кинематики прямолинейного движения приведены в табл. 3.

Таблица 3

Основные задачи кинематики прямолинейного движения

	Дано	Отыскиваются	Формулы	
1.	$s = s(t)$	v, a	$v = \frac{ds}{dt}$; $a = \frac{d^2s}{dt^2}$	(40)
2.	$v = v(t)$	s, a	$s = s_0 + \int_0^t v\,dt$; $a = \frac{dv}{dt}$	(41)
3.	$v = v(s)$	t, a	$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$; $a = v\frac{dv}{ds}$	(42)
4.	$a = a(t)$	v, s	$v = v_0 + \int_0^t a\,dt$; $s = s_0 + \int_0^t v\,dt$	(43)
5.	$a = a(s)$	v, t	$v = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a\,ds}$; $t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}$	(44)
6.	$a = a(v)$	s, t	$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a}$; $t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a}$	(45)

Пример. Движение поезда в течение нескольких секунд после его отхода от станции выражается уравнением

$$s = mt^3 - nt^5,$$

где m и n — некоторые коэффициенты. Для определенности можно считать, что s выражается в метрах, t — в секундах.

Предполагая, что после достижения скоростью максимума движение поезда стало равномерным, определить эту скорость установившегося движения, время t_1 ее достижения, а также наибольшее ускорение в этот промежуток времени.

По формулам (38) и (39) находим

$$v = \dot{s} = 3mt^2 - 5nt^4; \quad a = \ddot{s} = 6mt - 20nt^3.$$

Для отыскания максимума v полагаем

$$\dot{v} = \ddot{s} = 6mt_1 - 20nt_1^3 = 0,$$

откуда

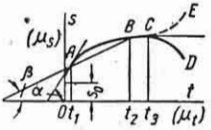
$$t_1 = \sqrt{\frac{3m}{10n}}, \quad v_{\max} = \frac{9m^2}{20n}.$$

Аналогично находим $\dddot{s} = 6m - 60nt_2^2 = 0$;

$$t_2 = \sqrt{\frac{m}{10n}}, \quad a_{max} = 4m\sqrt{\frac{m}{10n}}.$$

Графики движения

1. **График расстояние — время** ($s - t$) (фиг. 44). По оси абсцисс откладывают время t в масштабе μ_t, т. е. в единице длины (например, в 1 *мм*) откладывают μ_t единиц времени (сек.); аналогично по оси ординат в единице длины (1 *мм*) откладывают μ_s единиц расстояния (*м*) от начала отсчета.

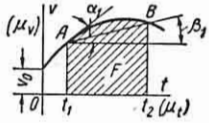


Фиг. 44. График расстояние — время.

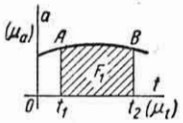
До точки C, где касательная горизонтальна, графики *расстояния и пути* совпадают; после C графиком расстояния служит кривая CD, а графиком пути — ее зеркальное отражение CE. Секущая AB определяет среднюю скорость за время $t_2 - t_1$, а касательная в точке A — истинную скорость в момент t_1:

$$v^* = \frac{\mu_s}{\mu_t}\operatorname{tg}\beta; \qquad v = \frac{\mu_s}{\mu_t}\operatorname{tg}\alpha.$$

2. **График скорость — время** ($v - t$) (фиг. 45). По оси абсцисс откладывают время t в масштабе μ_t, по оси ординат — скорость v в масштабе μ_v, т. е. в единице длины откладывают μ_v единиц



Фиг. 45. График скорость — время.



Фиг. 46. График ускорение — время.

скорости, например *м/сек*. Аналогично предыдущему

$$a^* = \frac{\mu_v}{\mu_t}\operatorname{tg}\beta_1; \quad a = \frac{\mu_v}{\mu_t}\operatorname{tg}\alpha_1.$$

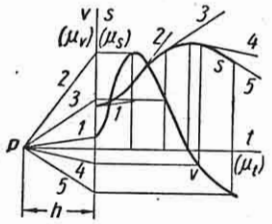
Площадь F определяет с точностью до масштабного множителя перемещение $s - s_0$:

$$s - s_0 = \mu_v\mu_t F.$$

3. **График ускорение — время** ($a - t$) (фиг. 46). По оси абсцисс отложено время t в масштабе μ_t, по оси ординат — ускорение a в масштабе μ_a (т. е. в единице длины отложено μ_a единиц ускорения, например *м/сек*^{2}). Площадь F_1 пропорциональна приращению скорости $v - v_0$:

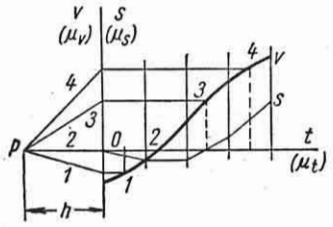
$$v - v_0 = \mu_a\mu_t F_1.$$

4. **Прямая задача кинематики** (фиг. 47). Дан график расстояние — время. Графическим дифференцированием можно получить график скорость — время. Для этого делим промежуток времени на интервалы (обычно равные, но отмечаются также моменты, соответствующие экстремуму кривой и точкам перегиба). Проводим касательные к кривой ($s - t$), затем из некоторой точки P, лежащей на оси абсцисс на расстоянии h от начала, проводим параллельные им лучи до встречи с осью ординат. Из полученных точек проводим прямые, параллельные оси абсцисс, до пересечения с ординатами соответствующих точек. Через полученные точки строим плавную кривую — график ($v - t$). Масштаб $\mu_v = \frac{\mu_s}{h\mu_t}$.



Фиг. 47. Построение графика скорость — время по графику расстояние — время.

Таким же образом по графику ($v - t$) строится график ($a - t$).



Фиг. 48. Построение графика расстояние время — по графику скорость — время.

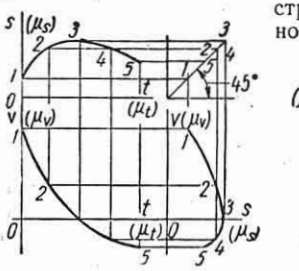
5. **Обратная задача кинематики** (фиг. 48). Дан график $v - t$. Графическим интегрированием можно полу-

чить график $s \rightarrow t$. Промежуток времени делим на интервалы, для каждого из которых проводим среднюю ординату кривой. Полученные точки проектируем на ось ординат, проводим из P (на произвольном расстоянии h от O) лучи, параллельно которым, начиная из O, строим ломаную, являющуюся приближением кривой $s - t$. Масштаб $\mu_s = h\mu_v\mu_t$. Часть кривой, лежащая ниже оси t, указывает на отрицательность s.

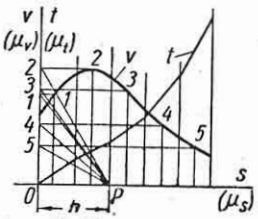
Таким же образом по графику $a - t$ строится график $v - t$.

5. **Комбинированные задачи.**

а) Даны графики $s - t$ и $v - t$ (фиг. 49). Очевидным из чертежа построением можно получить



Фиг. 49. Построение графика скорость — расстояние по графикам расстояние — время и скорость — время.



Фиг. 50. Построение графика время — расстояние по графику скорость — расстояние.

график $v - s$; масштабы μ_s и μ_v сохраняются, μ_t не фигурирует.

б) Дан график $v - s$ (фиг. 50). Для получения графика $t - s$ делим s на интервалы и берем средние ординаты. Из точки P справа от O проводим лучи в проекции точек деления, а затем, начиная из точки O, строим ломаную, стороны которой перпендикулярны соответствующим лучам. Эта ломаная есть приближение кривой $t - s$. Масштаб

$$\mu_t = \frac{\mu_s}{h\mu_v}.$$

Частные случаи

1. **Равномерное движение** ($v = \text{const}$):

$$s = s_0 + vt; \quad a = 0. \qquad (46)$$

2. **Равномерно-переменное движение** ($a = \text{const}$):

$$v = v_0 + at; \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (47)$$

3. **Свободное падение тел в безвоздушном пространстве у поверхности земли:**

$$h = \frac{gt^2}{2}; \quad v = gt = \sqrt{2gh}, \qquad (48)$$

где h — высота падения; g — ускорение силы тяжести (табл. 4).

Таблица 4

Ускорение g для некоторых пунктов

Место	Широта φ	Ускорение g *см/сек²*
Полюс	90°	983,1
Архангельск	64°33′	982,2
Ленинград	59°56′	981,9
Москва	55°45′	981,6
Средняя широта	45°	980,6
Тбилиси	41°43′	980,2
Экватор	0°	978,1

Среднее принимается $g = 9{,}81$ *м/сек²*.

4. **Гармоническое колебательное движение.** Такое название носит движение, происходящее по закону синуса (или косинуса):

$$s = A \sin (kt + \beta), \qquad (49)$$

где A — *амплитуда* колебания; k — *круговая, угловая* или *циклическая частота* колебания; угол $\varphi = kt + \beta$ — *фаза* колебания; β — *начальная фаза* колебания. Наименьший промежуток времени T, через который движение воспроизводится, называется *периодом колебания*, а число колебаний в единицу времени — *частотой колебания* ν:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \qquad (50)$$

Скорость и ускорение:

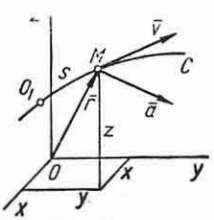
$$v = Ak \cos (kt + \beta);$$

$$a = -Ak^2 \sin (kt + \beta) = -k^2 s.$$

Криволинейное движение точки

Траектория. Закон движения. Кривая C, которую описывает точка M при своем движении (фиг. 51), называется ее *траекторией*. На траектории устанавливается *начало отсчета* O_1, расстояние от которого по кривой в любой момент времени определяется *законом движения по заданной траектории*:

$$s = f(t).$$



Фиг. 51. Определение положения точки в криволинейном движении.

Положение точки M определяется также либо радиусом-вектором $\bar{r}$ относительно некоторой точки O, либо координатами x, y, z по отношению к *системе отсчета* $Oxyz$. Тогда закон движения может быть задан тремя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \\ z = f_3(t); \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

исключив из них время, получаем уравнения траектории.

Пример. $x = lf(t) + a$; $y = mf(t) + b$; $z = nf(t) + c$, где $f(t)$ — произвольная функция времени. Исключая время, имеем

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},$$

т. е. траектория — прямая в пространстве, проходящая через точку (a, b, c) и имеющая направляющие косинусы, пропорциональные числам l, m, n (стр. 250 и 253).

Скорость. Скорость точки M в данный момент времени t выражается в векторной форме

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

и в алгебраической

$$v_s = \frac{ds}{dt}. \qquad (52)$$

Вектор скорости направлен по касательной и траектории. Его проекции на оси координат

$$\left.\begin{aligned} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Величина скорости (модуль)

$$v = |v_s| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (54)$$

Направление определяется косинусами

$$\left.\begin{aligned} \cos(\bar{v}, \widehat{x}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\bar{v}, \widehat{y}) = \frac{v_y}{v}; \\ \cos(\bar{v}, \widehat{z}) = \frac{v_z}{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Ускорение. Ускорение точки M в данный момент времени t выражается в векторной форме:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости к траектории в данной точке и направлен в сторону вогнутости. Его проекции на оси координат

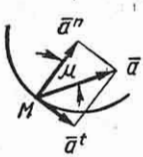
$$\left.\begin{aligned} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Полное ускорение определяется модулем и направляющими косинусами:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \qquad (57)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\bar{a}, \widehat{x}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \widehat{y}) = \frac{a_y}{a}; \\ \cos(\bar{a}, \widehat{z}) = \frac{a_z}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Ускорение может быть разложено на *тангенциальное* a^t (по касательной) и *нормальное* a^n (по главной нормали) ускорения (на фиг. 52 $\bar{a}^t$ и $\bar{a}^n$—тангенциальная и нормальная *составляющие* ускорения). *Проекции* ускорения на касательную и главную нормаль



Фиг. 52. Разложение ускорения на тангенциальное и нормальное.

$$\left.\begin{aligned} a^t = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \\ a^n = \frac{v^2}{\rho}, \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

где ρ — радиус кривизны траектории.

Полное ускорение

$$a = \sqrt{(a^t)^2 + (a^n)^2}. \qquad (60)$$

Его угол с нормалью

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{a^t}{a^n}. \qquad (61)$$

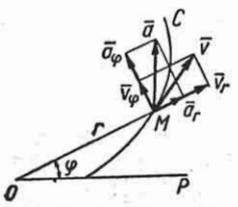
Ускорение $\bar{a}$ образует острый угол со скоростью $\bar{v}$ в ускоренном движении и тупой — в замедленном; оно перпендикулярно v в равномерном движении или в моменты экстремума v_s; a^n исчезает в прямолинейном движении, в точке перегиба траектории, в начальный и конечный моменты криволинейного движения, а также в моменты мгновенной остановки точки.

Здесь могут быть применены все формулы и графики для прямолинейного движения, где только вместо ускорения a следует брать a^t.

Движение точки в плоскости, отнесенное к полярным координатам. Закон движения точки (фиг. 53) определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} r &= f_1(t); \\ \varphi &= f_2(t), \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

где угол φ, называемый полярным углом, принято измерять в радианах.



Фиг. 53. Исследование движения точки в полярных координатах.

Средней угловой скоростью радиуса-вектора точки за промежуток времени $t_2 - t_1$ называется выражение

$$\omega^* = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Угловой скоростью (или также *истинной угловой скоростью*) точки в момент t называется

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (63)$$

Размерность угловой скорости: (время)$^{-1}$.

Средним угловым ускорением радиуса-вектора точки за промежуток времени $t_2 - t_1$ называется выражение

$$\varepsilon^* = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Угловым ускорением (или также *истинным угловым ускорением*) точки в момент t называется

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (64)$$

Размерность углового ускорения: (время)$^{-2}$.

Проекции скорости и ускорения точки на направление радиуса-вектора называются соответственно *радиальными скоростью* v_r и *ускорением* a_r, а на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору, — *трансверсальными скоростью* v_φ и *ускорением* a_φ. Формулы для вычисления скорости:

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \quad v_\varphi = r\omega;$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}. \quad (65)$$

Формулы для вычисления ускорения

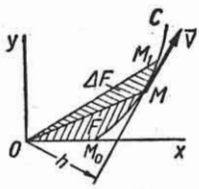
$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2; \quad a_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\omega + r\varepsilon; \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Если через F обозначить площадь (фиг. 54), описываемую радиусом-вектором точки, начиная от какого-либо фиксированного положения OM_0, то выражение

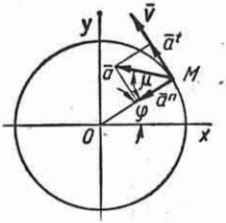
$$\sigma = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta F}{\Delta t}\right) = \frac{dF}{dt} \quad (67)$$

называется *секторной*, или *секториальной*, скоростью точки в момент времени t. Ее размерность: $\frac{\text{длина}^2}{\text{время}}$. Секторная скорость равна половине момента скорости точки относительно неподвижной точки:

$$\sigma = \frac{1}{2}vh = \frac{1}{2}\operatorname{mom}_0(\bar{v}). \quad (68)$$



Фиг. 54. Секторная скорость точки.



Фиг. 55. Круговое движение точки.

В декартовых координатах

$$\sigma = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x). \quad (69)$$

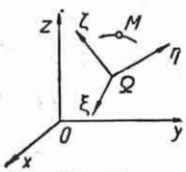
Движение точки по окружности (фиг. 55). В этом случае $r = \rho = R = \text{const}$; $v_r = v = R\omega$; $a^t = a_\varphi = R\varepsilon$; $a^n = -a_r = R\omega^2$. Здесь радиальное направление прямо противоположно нормали, а трансверсальное совпадает с касательной.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Основные определения. Если точка M (фиг. 56) движется по отношению к системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$, которая, в свою очередь, движется по отношению к системе $Oxyz$, принятой за неподвижную; то движение точки M по отношению к системе $\Omega\xi\eta\zeta$ называется *относитель-*

ным, по отношению к системе $Oxyz$ — *абсолютным*, а движение системы $\Omega\xi\eta\zeta$ по отношению к системе $Oxyz$ — *переносным* или *движением влечения*.

Скорость и ускорение точки M по отношению к системе $\Omega\xi\eta\zeta$ называются соответственно *относительной скоростью* $\bar{v}_0$ и *относительным ускорением* $\bar{a}_0$, а по отношению к системе $Oxyz$ — *абсолютной скоростью* $\bar{v}_a$ и *абсолютным ускорением* $\bar{a}_a$.



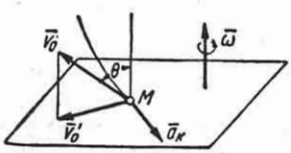
Фиг. 56. Относительное движение точки.

Скорость, а также ускорение точки, неизменно связанной с системой $\Omega\xi\eta\zeta$ и совпадающей в данный момент с движущейся точкой M, по отношению к системе $Oxyz$ называется *переносной скоростью* $\bar{v}_п$, соответственно — *переносным ускорением* $\bar{a}_п$.

Сложение скоростей. Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме скоростей переносной и относительной:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_п + \bar{v}_0. \qquad (70)$$

Сложение ускорений. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: переносного, относительного и *поворотного* (или ускорения Кориолиса):



Фиг. 57. Построение поворотного ускорения.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_п + \bar{a}_0 + \bar{a}_к. \qquad (71)$$

В общем случае переносное и относительное ускорения разлагаются на тангенциальное и нормальное:

$$\bar{a}_п = \bar{a}_п^t + \bar{a}_п^n;$$

$$\bar{a}_0 = \bar{a}_0^t + \bar{a}_0^n.$$

Поворотное ускорение

$$\bar{a}_к = 2\bar{\omega}_п \times \bar{v}_0$$

или

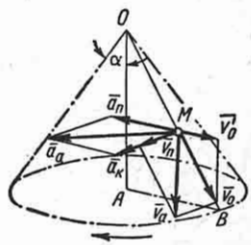
$$a_к = 2\omega_п v_0 \sin(\widehat{\bar{\omega}_п, \bar{v}_0}). \qquad (72)$$

Поворотное ускорение определяется по правилу Жуковского (фиг. 57).

Вектор относительной скорости проектируется на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения, полученная проекция поворачивается на 90° в сторону вращения относительной траектории и умножается на удвоенную угловую скорость.

Поворотное ускорение обращается в нуль в случаях: 1) переносное движение поступательное ($\omega_п = 0$); 2) мгновенная остановка точки в относительном движении ($v_0 = 0$); 3) относительная скорость параллельна оси вращения ($\theta = 0$ или π).

Пример. Стержень OB (фиг. 58) равномерно вращается вокруг оси OA с угловой скоростью $\omega_п = \omega$, образуя с осью постоянный угол α. По стержню равномерно движется ползушка M со скоростью $v_0 = u$. Определить абсолютные скорость и ускорение ползушки M, принимаемой за точку, в функции расстояния $OM = s$.



Фиг. 58. Определение скорости и ускорения в сложном движении.

Переносная скорость

$$v_п = \omega s \sin\alpha; \quad v_a = \sqrt{\omega^2 s^2 \sin^2\alpha + u^2}.$$

Переносное ускорение

$$a_п = \omega^2 s \sin\alpha.$$

Поворотное ускорение

$$a_к = 2\omega u \sin\alpha.$$

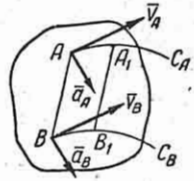
Так как относительное ускорение $a_0 = 0$, то

$$a_a = \omega \sin\alpha \sqrt{\omega^2 s^2 + 4u^2}.$$

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение

Определение. Траектории. Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором всякая прямая, неизменно связанная с телом, перемещается параллельно самой себе (фиг. 59). При поступательном движении тела траектории всех его точек представляют собой конгруентные кривые (C_A и C_B), т. е. кривые, совмещающиеся при наложении.



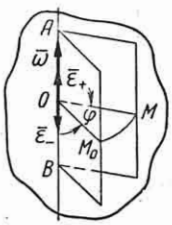
Фиг. 59. Поступательное движение твердого тела.

Скорости. Ускорения. При поступательном движении тела в любой момент времени все его точки имеют геометрически равные скорости ($\bar{v}_A = \bar{v}_B$) и геометрически равные ускорения ($\bar{a}_A = \bar{a}_B$).

Следовательно, при поступательном движении все точки тела движутся одинаковым образом.

Вращение вокруг неподвижной оси

Закон движения. Угловая скорость. Угловое ускорение. Если тело имеет неподвижную ось AB (фиг. 60), то его положение в произвольный момент времени t определяется двугранным углом φ между начальным положением AM_0B некоторой плоскости, проходящей через ось вращения, и ее положением AMB в данный момент.



Фиг. 60. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси (или просто: закон вращения) выражается уравнением

$$\varphi = f(t). \tag{73}$$

Любая точка M описывает круговую траекторию в плоскости M_0OM, перпендикулярной к оси вращения; получается рассмотренный случай кругового движения (см. стр. 374).

Угловая скорость определяется равенством

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{74}$$

и изображается вектором, приложенным в любой точке оси и направленным вдоль нее так, чтобы, смотря из его конца в сторону начала, видеть вращение происходящим против часовой стрелки.

Угловое ускорение определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \tag{75}$$

и изображается вектором, направленным вдоль ω в ту же сторону, если вращение ускоренное ($\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ имеют одинаковые знаки), и противоположно ω, если вращение замедленное ($\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ имеют разные знаки); на фиг. 60 это условно показано обозначениями ε_+, ε_-.

Таблица 5

Основные задачи кинематики вращательного движения

Дано	Отыскиваются	Расчетные формулы
1. $\varphi = \varphi(t)$	ω, ε	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ (78)
2. $\omega = \omega(t)$	φ, ε	$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt$; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ (79)
3. $\omega = \omega(\varphi)$	t, ε	$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega}$; $\varepsilon = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}$ (80)
4. $\varepsilon = \varepsilon(t)$	ω, φ	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt$; $\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt$ (81)
5. $\varepsilon = \varepsilon(\varphi)$	ω, t	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varepsilon d\varphi}$; $t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega}$ (82)
6. $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$	φ, t	$\varphi = \varphi_0 + \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\omega d\omega}{\varepsilon}$; $t = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\varepsilon}$ (83)

Угловая скорость ω сек$^{-1}$ связана с числом оборотов в минуту n зависимостью

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 0{,}10472n; \qquad (76)$$

обратно:

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = 9{,}549\omega. \qquad (77)$$

Основные задачи кинематики вращательного движения даны в табл. 5.

Между зависимостями, связывающими φ, ω, ε, t, и зависимостями, связывающими s, v, a, t для прямолинейного движения, имеется полная аналогия, вследствие чего здесь могут быть использованы приведенные выше графические построения.

Частные случаи

1) Равномерное вращение ($\omega = \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad \varepsilon = 0. \qquad (84)$$

2) Равномерно-переменное вращение ($\varepsilon = \text{const}$)

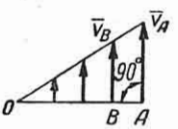
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (85)$$

3) Гармоническое колебание

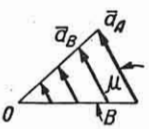
$$\varphi = \alpha \sin(kt + \beta), \qquad (86)$$

где α — *угловая амплитуда колебания*; остальные величины имеют те же наименования, что и в прямолинейном колебании.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Здесь имеют место



Фиг. 61. Диаграмма скоростей.



Фиг. 62. Диаграмма ускорений.

те же формулы, что и для кругового движения точки (см. фиг. 55), а именно:

$$s = \varphi r; \qquad (87)$$

$$v = \omega r = \frac{\pi n r}{30} = \frac{\pi n d}{60}; \qquad (88)$$

$$a^t = \varepsilon r; \quad a^n = \omega^2 r; \qquad (89)$$

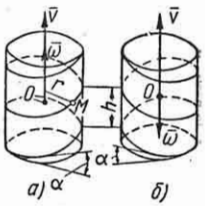
$$a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \qquad (90)$$

где r — расстояние точки от оси вращения; d — диаметр соответствующей окружности.

Скорости и ускорения пропорциональны расстояниям точек от оси вращения; отсюда следуют диаграммы скоростей (фиг. 61) и ускорений (фиг. 62).

Винтовое движение

Определение и свойства. Движение твердого тела, состоящее из вращательного и поступательного, направленного вдоль оси вращения, называется *винтовым* (фиг. 63, *а* и *б*). Различают движения *правовинтовое* (фиг. 63, *а*) и *левовинтовое* (фиг. 63, *б*). Расстояние h, пройденное проекцией какой-либо точки тела на ось винта при одном обороте, называется *шагом винта*. Отношение поступательной скорости v к угловой ω называется *параметром винта* p:



Фиг. 63. Винтовое движение в двух вариантах.

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{h}{2\pi}. \qquad (91)$$

Подъем винтовой линии (траектории произвольной точки M на расстоянии r от оси винта) равен

$$i = \operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{r} = \frac{h}{2\pi r}. \qquad (92)$$

Скорость точки M равна

$$v_M = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}.$$

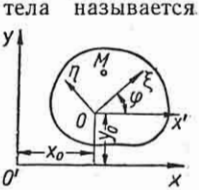
Ускорение при равномерном винтовом движении

$$a_M = r\omega^2;$$

в общем случае определяется по правилу сложения ускорений.

Плоско-параллельное движение

Определения. *Плоско-параллельным движением* твердого тела называется движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Это движение определяется движением плоской фигуры — проекции тела на плоскость, параллельно которой происходит движение (фиг. 64). Положение фигуры определяется координа-



Фиг. 64. Определение положения плоской фигуры.

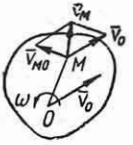
тами x_0, y_0 произвольно выбранной точки — *полюса* — и углом поворота вокруг полюса. Уравнения движения:

$$x_0 = f_1(t);\ y_0 = f_2(t);\ \varphi = f_3(t). \quad (93)$$

Первые два определяют поступательную часть движения, зависящую от выбора полюса, последнее — вращательную часть, от этого выбора не зависящую. Так, угол поворота φ, угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ фигуры относительно любой точки — одни и те же. Если координаты произвольной точки M в подвижной системе ξ, η, а в неподвижной — x, y, то

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi; \\ y &= y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Распределение скоростей. Скорость v_M любой точки фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\bar{v}_O$ и скорости вращения $\bar{v}_{MO}$ вокруг полюса (фиг. 65):

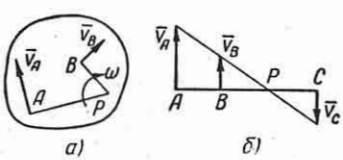


Фиг. 65. Скорость произвольной точки плоской фигуры.

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO}; \quad (95)$$

$$\bar{v}_{MO} = \omega \cdot OM. \quad (96)$$

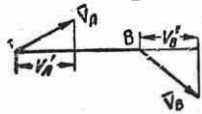
Та точка P фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей*, а совпадающая с ней точка неподвижной плоскости — *мгновенным центром вращения*. Во всякий момент времени скорости точек фигуры распределяются так, как если бы фигура вращалась вокруг мгновенного центра скоростей (фиг. 66, *а* и *б*):



Фиг. 66. Определение положения мгновенного центра скоростей в двух случаях.

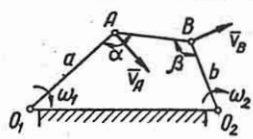
$$v_A = \omega \cdot PA, \quad v_B = \omega \cdot PB.$$

Для нахождения P по v_A и ω находим $AP = \dfrac{v_1}{\omega}$ и откладываем перпендикулярно v_A сообразно знаку φ. Для нахождения P по скоростям двух точек следует восставить перпендикуляры к этим скоростям, а в случае их слияния провести еще прямую через концы скоростей. Точка P может оказаться в бесконечности. Тогда имеет место движение, при котором скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны между собой, т. е. скорости распределяются так, как если бы фигура совершала поступательное движение. Однако ускорения различных точек фигуры вообще не равны друг другу.



Фиг. 67. Проекции скоростей двух точек отрезка на его направление.

Проекции скоростей любых двух точек фигуры на прямую, их соединяющую (фиг. 67), равны между собой: $v'_A = v'_B$.



Фиг. 68. Четырехзвенный механизм.

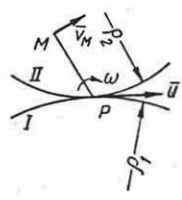
Пример. В четырехзвенном механизме (фиг. 68) с неподвижным звеном O_1O_2

$$v_A \cos(\alpha - 90°) = v_B \cos(\beta - 90°),$$

откуда

$$\omega_1 a \sin\alpha = \omega_2 b \sin\beta.$$

Геометрическое место мгновенных центров вращения (на неподвижной плоскости) (фиг. 69) называется *неподвижной центроидой* (или *полоидой*), а геометрическое место мгновенных центров скоростей (на движущейся фигуре) — *подвижной центроидой* (или *полоидой*). При движении фигуры подвижная центроида II катится по неподвижной I, имея точкой касания мгновенный центр скоростей P. Скорость любой точки фигуры $v_M = \omega \cdot PM$. Скорость перемещения мгновенного центра



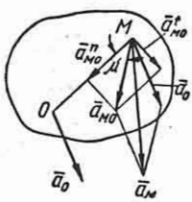
Фиг. 69. Центроиды.

$$u = \omega \frac{\rho \cdot \rho_2}{|\rho_1 \pm \rho_2|}, \quad (97)$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны центроид; плюс берется в случае, когда центроиды обращены выпуклостями друг

к другу, минус — в противоположном случае.

Распределение ускорений. Ускорение $\bar{a}_M$ любой точки фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса $\bar{a}_O$ и ускорения $\bar{a}_{MO}$ во вращательном движении вокруг полюса (фиг. 70):



Фиг. 70. Ускорение произвольной точки плоской фигуры.

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}. \quad (98)$$

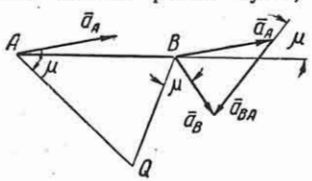
Это ускорение разлагается на тангенциальную составляющую $\bar{a}^t_{MO}$ (*вращательное ускорение*) и нормальную составляющую $\bar{a}^n_{MO}$ (*центростремительное ускорение*):

$$\left.\begin{aligned} a^t_{MO} &= \varepsilon \cdot OM; \\ a^n_{MO} &= \omega^2 \cdot OM. \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Направление $\bar{a}^t_{MO}$ согласно с направлением $\bar{v}_{MO}$, если $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ одинаковых знаков, и противоположно, если разных. Ускорение $\bar{a}_{MO}$ определяется по величине и направлению формулами

$$\left.\begin{aligned} a_{MO} &= OM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ \operatorname{tg}\mu &= \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Точка Q фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю, называется *мгновенным центром ускорений*. Во всякий момент времени ускорения точек фигуры распределяются так, как если бы она вращалась вокруг мгновенного центра ускорений (фиг. 71). Тогда

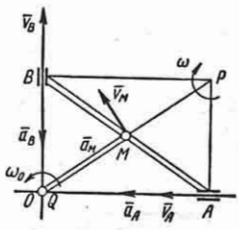


Фиг. 71. Определение положения мгновенного центра ускорений.

$$a_A = QA\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \quad a_B = QB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Для нахождения Q по ускорению одной точки A находим $AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$ и угол $\mu = \operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, который откладываем от $\bar{a}_A$ в сторону вращения, если $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ одного знака, и в противоположную — если разных знаков. Для нахождения Q по ускорениям двух точек следует построить относительное ускорение $\bar{a}_{AB}$, найти его угол μ с отрезком AB и отложить этот угол от $\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$.



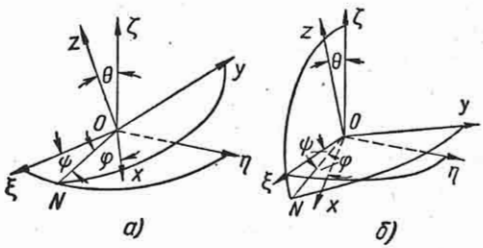
Фиг. 72. Эллипсограф.

Пример. Кривошип $OM = l$ (фиг. 72), вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_0, приводит в движение линейку AB эллипсографа, причем $AM = MB = l$. Здесь мгновенный центр скоростей P находится на перпендикулярах AP и BP к скоростям $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$; $v_M = \omega_0 \cdot OM = \omega \times MP$ (где ω — угловая скорость линейки). Так как $MP = l$, то $\omega = \omega_0 = \text{const}$, следовательно, $\varepsilon = 0$; тогда угол $\mu = 0$; мгновенный центр ускорений линейки находится в O;

$$a_M = \omega_0^2 \cdot l; \quad a_A = \omega_0^2 \cdot OA; \quad a_B = \omega_0^2 \cdot OB.$$

Движение тела около неподвижной точки

Определение положения тела. В случае движения твердого тела около неподвижной точки, называемого также *сферическим движением*, положение тела определяется углами Эйлера (фиг. 73, *а*): углом прецессии ψ, углом нутации θ и углом собственного вращения φ. Эти углы характеризуют положение координатного трехгранника $Oxvz$, связанного с телом, по отношению к неподвижному трехграннику $O\xi\eta\zeta$.



Фиг. 73. Углы Эйлера в двух вариантах.

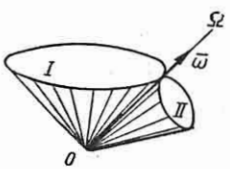
Линия ON пересечения двух координатных плоскостей, принятых за основные, называется *линией узлов*.

Акад. А. Н. Крылов [15] указал на ряд видоизменений выбора углов Эйлера, удобных при изучении движения артиллерийского снаряда, корабля или самолета (см., например, фиг. 73, *б*).

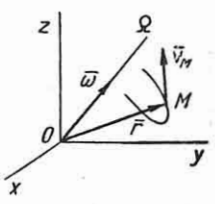
Уравнения движения

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= f_1(t);\\ \psi &= f_2(t);\\ \theta &= f_3(t).\end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Распределение скоростей. Во всякий момент времени существует проходящая через неподвижную точку прямая $O\Omega$



Фиг. 74. Аксоиды.



Фиг. 75. Скорость произвольной точки тела.

(фиг. 74), скорости всех точек которой равны нулю. Это — *мгновенная ось вращения тела*. Геометрическое место мгновенных осей вращения в неподвижном пространстве есть коническая поверхность, называемая *неподвижным аксоидом* (I), а в движущемся теле — *подвижным аксоидом* (II). При движении тела аксоид II катится по аксоиду I (снаружи или внутри), имея общей образующей мгновенную ось.

Проекции угловой скорости ω на оси x, y, z, связанные с телом, выражаются через углы Эйлера (фиг. 73, *а*) формулами (кинематические уравнения Эйлера):

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi;\\ \omega_y &= \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi;\\ \omega_z &= \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi,\end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

где точками обозначены производные по времени. Скорость любой точки M (фиг. 75) равна моменту вектора угловой скорости относительно этой точки. В векторной форме

$$\bar v_M = \bar\omega \times \bar r;$$

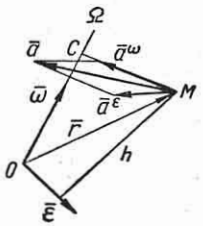
в координатной — через координаты точки (формулы Эйлера):

$$\left.\begin{aligned}v_x &= \omega_y z - \omega_z y;\\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z;\\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x.\end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Распределение ускорений. Угловое ускорение $\bar\varepsilon = \dfrac{d\bar\omega}{dt}$ представляет собой скорость конца вектора $\bar\omega$. Ускорение произвольной точки M (фиг. 76)

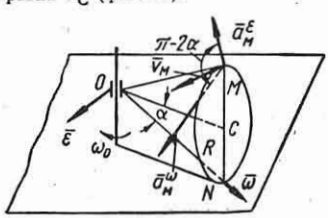
$$\bar a = \bar a^{\omega} + \bar a^{\varepsilon}; \qquad (104)$$

$a^{\omega} = \omega^2 \cdot MC$ есть *центростремительное ускорение*, направленное перпендикулярно мгновенной оси; $a^{\varepsilon} = \varepsilon h$ (где h — перпендикуляр, опущенный на $\bar\varepsilon$) есть *вращательное ускорение*, представляющее собой по величине и направлению момент углового ускорения относительно точки M.



Фиг. 76. Ускорение произвольной точки тела.

Пример. Бегун радиуса R равномерно катится по перпендикулярной к нему плоскости; скорость центра равна v_C (фиг. 77).



Фиг. 77. Кинематическое исследование движения бегуна.

Мгновенная ось ON; угловая скорость

$$\omega = \frac{v_C}{R\cos\alpha};$$

$$\omega_0 = \frac{v_C}{R\operatorname{ctg}\alpha};\quad \varepsilon = \omega_0\omega\cos\alpha = \frac{v_C^2}{R^2}\operatorname{tg}\alpha;$$

$$v_M = \omega \cdot 2R\cos\alpha = 2v_C;$$

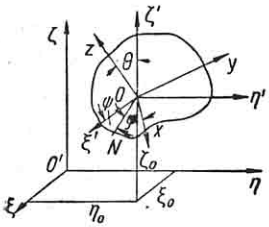
$$a_M^{\omega} = \omega^2 \cdot 2R\cos\alpha = \frac{2v_C^2}{R\cos\alpha};$$

$$a_M^{\varepsilon} = \varepsilon\frac{R}{\sin\alpha} = \frac{v_C^2}{R\cos\alpha};$$

$$a_M=\sqrt{\left(a_M^{\omega}\right)^2+\left(a_M^{\varepsilon}\right)^2+2a_M^{\omega}a_M^{\varepsilon}\cos(\pi-2\alpha)}=$$
$$=\frac{v_C^2}{R\cos\alpha}\sqrt{5-4\cos 2\alpha}.$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение положения тела. Применяются три системы координат (фиг. 78): $O'\xi\eta\zeta$ — неподвижная; $O\xi'\eta'\zeta'$ — имеющая начало, связанное с произвольной точкой тела, и перемещающаяся поступательно; $Oxyz$ — связанная с телом. Получается шесть уравнений движения:



Фиг. 78. Определение положения твердого тела в общем случае.

$$\left.\begin{aligned}\xi_0&=f_1(t);\\ \eta_0&=f_2(t);\\ \zeta_0&=f_3(t);\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\varphi&=f_4(t);\\ \psi&=f_5(t);\\ \theta&=f_6(t).\end{aligned}\right\}\qquad(105)$$

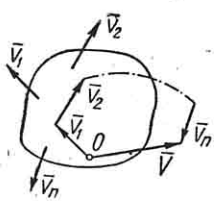
Первые три уравнения определяют поступательную часть движения, остальные — вращательную.

Скорости и ускорения точек находятся, как для сложного движения.

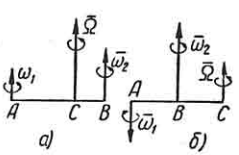
СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сложение поступательных движений. Результирующая скорость $\overline{V}$ (фиг. 79) равна геометрической сумме составляющих скоростей:

$$\overline{V}=\sum\overline{v}_i.\qquad(106)$$



Фиг. 79. Сложение скоростей поступательных движений.

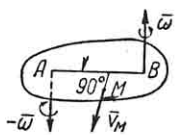


Фиг. 80. Сложение параллельных угловых скоростей в двух случаях.

Сложение вращений вокруг параллельных осей. При сложении двух вращений вокруг параллельных осей (фиг. 80, *а* и *б*) результирующая угловая скорость Ω равна алгебраической сумме составляющих угловых скоростей, и мгновенная ось делит расстояние между осями внутренним или внешним образом обратно пропорционально этим скоростям:

$$\left.\begin{aligned}&\Omega=\omega_1\pm\omega_2;\\ &\frac{AC}{\omega_2}=\frac{CB}{\omega_1}=\frac{AB}{\Omega}.\end{aligned}\right\}\qquad(107)$$

В случае фиг. 80, *б* предполагается, что $\omega_1\neq\omega_2$. Совокупность двух численно равных, но противоположно направленных угловых скоростей называется *парой угловых скоростей* (фиг. 81). Эта пара в смысле распределения линейных скоростей эквивалентна мгновенному поступательному движению со скоростью v_M — *поступательной скоростью*, равной моменту пары: $v_M=\omega\cdot AB$. Обратно, всякую поступательную скорость можно представить как пару угловых скоростей.

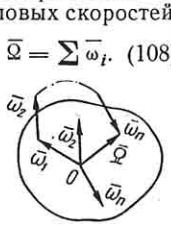


Фиг. 81. Пара угловых скоростей.

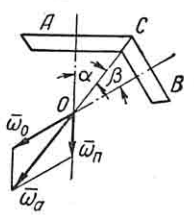
В случае произвольного числа вращений вокруг параллельных осей их угловые скорости складывают последовательно.

Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Результирующая мгновенная угловая скорость $\overline{\Omega}$ (фиг. 82) равна геометрической сумме составляющих угловых скоростей:

$$\overline{\Omega}=\sum\overline{\omega}_i.\qquad(108)$$



Фиг. 82. Многоугольник угловых скоростей.

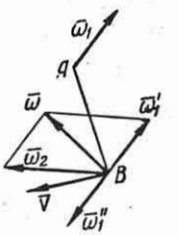


Фиг. 83. Угловая скорость конических зубчатых колес.

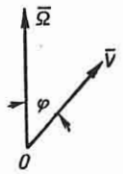
Пример. По неподвижному коническому зубчатому колесу A катится шестеренка B (фиг. 83). Мгновенная ось OC. Переносная угловая скорость $\omega_п$ (угловая скорость оси шестеренки), относительная ω_o и абсолютная ω_a удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\omega_п}{\sin\beta}=\frac{\omega_o}{\sin\alpha}=\frac{\omega_a}{\sin(\alpha+\beta)};\\ &\omega_a=\sqrt{\omega_п^2+\omega_o^2+2\omega_п\omega_o\cos(\alpha+\beta)}.\end{aligned}\right\}\qquad(109)$$

Сложение вращений вокруг скрещивающихся осей. Параллельным переносом $\bar{\omega}_1$ в точку приложения ω_2 (фиг. 84) с присоединением пары, эквивалентной поступательной скорости v, задача сводится к сложению поступательного и вращательного движений.



Фиг. 84. Сложение вращений вокруг скрещивающихся осей.



Фиг. 85. Мотор скоростей.

Сложение поступательного и вращательного движений. В результате приведения поступательных и угловых скоростей в данный момент времени к данному центру O (фиг. 85) получается *мотор скоростей*, т. е. совокупность $\bar{V}$ и $\bar{\Omega}$.

Различные случаи приведения:

1) $V = 0$; $\Omega = 0$ — покой или мгновенная остановка;

2) $V \neq 0$; $\Omega = 0$ — мгновенное поступательное движение (только по отношению к скорости);

3) $V = 0$; $\Omega \neq 0$ — вращение вокруг мгновенной оси;

4) $V \neq 0$; $\Omega \neq 0$; $\varphi = 90°$ — мгновенное плоско-параллельное движение;

5) $V \neq 0$; $\Omega \neq 0$; $\varphi = 0$ или $180°$ — мгновенное винтовое движение (*кинематический винт*);

6) $V \neq 0$; $\Omega \neq 0$; φ — произвольный угол — переменой центра приводится к предыдущему.

Таким образом, наиболее общий случай движения твердого тела приводится к кинематическому винту, подобно тому как наиболее общий случай системы сил приводится к динамическому винту. Общая теория винтов разработана русским ученым, геометром и механиком А. П. Котельниковым [12].

ДИНАМИКА

МЕХАНИЧЕСКИЕ ЕДИНИЦЫ

Измерение механических величин

В основе измерения всех механических величин лежат три единицы, называемые *основными*, через которые могут быть выражены все прочие единицы, называемые *производными*. По роду и величине основных единиц различаются следующие системы * (согласно ГОСТ 7664-55):

Система МКС (метр — килограмм — секунда)

Система СГС (сантиметр — грамм — секунда)

Система МКГСС (метр—килограмм—сила — секунда)

В первых двух системах величинами, соответствующими основным единицам, являются:

Длина L, масса M, время T.

В третьей системе величинами, соответствующими основным единицам, являются:

Длина L, сила K, время T.

* См. также „Справочник машиностроителя", т. 2. гл. XII, „Электротехника", табл. 1.

Каждая единица в любой системе имеет свой *размер*, под которым разумеется формула, выражающая данную единицу через основные единицы (табл. 6).

Способ получения производной единицы $[Q]$ из основных единиц для измерения некоторой величины Q записывается в виде формулы, называемой *формулой размерности*. Формула размерности имеет вид:

а) в системе МКС и СГС

$$[Q]=L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \qquad (110)$$

б) в системе МКГСС

$$[Q]=L^{\lambda} K^{\mu} T^{\nu}. \qquad (111)$$

Показатели степени $\alpha, \beta \ldots \nu$ называются *размерностями* измеряемой величины.

Какие бы величины ни входили в уравнение, выражающее какой-либо механический процесс, все члены этого уравнения должны быть однородны относительно каждой из трех основных единиц.

Таблица 6

Системы единиц

Название величины	Наименование системы				
	Метр-килограмм-секунда МКС		Сантиметр-грамм-секунда СГС	Метр-килограмм-сила-секунда МКГСС	
	Единица и ее размер	Размерность* величины	Единица и ее размер	Размерность величины	Единица и ее размер
Длина	Метр (*м*)	L^1	Сантиметр (*см*)	L^1	Метр (*м*)
Масса	Килограмм (*кг*)	M^1	Грамм (*г*)	$L^{-1}K^1T^2$	*кГ.сек²/м* или *кГ. сек²/м*
Время	Секунда (*сек*)	T^1	Секунда (*сек*)	T^1	Секунда (*сек*)
Сила	Ньютон (*н*)=1 *кг. м/сек²*	$L^1M^1T^{-2}$	Дина (*дин*)=1 $\frac{г \cdot см}{сек^2}$.	K^1	Килограмм-сила (*кгс* или *кГ*)
Скорость	*м/сек*	L^1T^{-1}	*см/сек*	L^1T^{-1}	*м/сек*
Ускорение	*м/сек²*	L^1T^{-2}	*см/сек²*	L^1T^{-2}	*м/сек²*
Частота	Герц (*гц*)=1 *1/сек*	T^{-1}	Герц (*гц*)=1 *1/сек*	T^{-1}	Герц (*гц*)=1 *1/сек*
Угловая скорость	*рад/сек*	T^{-1}	*рад/сек*	T^{-1}	*рад/сек*
Угловое ускорение	*рад/сек²*	T^{-2}	*рад/сек²*	T^{-2}	*рад/сек*
Работа и энергия	Джоуль (*дж*)=1 *н. м.*	$L^2M^1T^{-2}$	*эрг* (*эрг*)=1 *дин·см*	L^1K^1	*кГ. м* или *кГ. м*
Мощность	ватт (*вт*)=1 *дж/сек*	$L^2M^1T^{-3}$	*эрг/сек*	$L^1K^1T^{-1}$	*кГ. м/сек.* или *кГ·м/сек*
Давление	*н/м²*	$L^{-1}M^1T^{-2}$	*дин/см²*	$L^{-2}K^1$	*кГ/м²* или *кГ/м²*

* Относится к системам МКС и СГС.

Внесистемные единицы и главнейшие соотношения между единицами различных систем (на основании ГОСТ 7664-55).

Масса. 1 тонна (*тн*) $= 10^3$ *кг* $= 10^6$ *г* $=$ $= 101{,}972$ *кГ·сек²/м*; 1 *кГ·сек²/м* $=$ $=9{,}80665$ *кг*$=9806{,}65$ *г*.

Сила. 1 тонна—сила (*тс*) $= 10^3$ *кГ* $=$ $= 9{,}80665 \cdot 10^3$ *н*; 1 *н* $= 0{,}101972$ *кГ*.

Работа. 1 *дж* $= 10^7$ *эрг* $=$ $= 0{,}101972$ *кГ·м*; 1 ватт. час (*вт. ч*) $=$ $=3{,}6 \cdot 10^3$ *дж*; 1 *кГ. м* $= 9{,}80665$ *дж*.

Мощность. 1 лошадиная сила (*л. с.*)$=75$ *кГ. м/сек* $= 735.499$ *вт*; 1 *вт* $= 0{,}101972$ *кГ·м/сек*.

Давление. 1 миллиметр ртутного столба (*мм рт·ст*) $= 133{,}322$ *н/м²*; 1 миллиметр водяного столба (*мм вод. ст.*)$=9{,}80665$ *н/м²*; 1 техническая атмосфера (*ат* или *кГ/см²*) $=$ $= 9{,}80665 \cdot 10^4$ *н/м²*.

Примечание. При расчетах с точностью не свыше 0,1% вместо чисел 0,101972 и 0,980665, умноженных на степени 10, берут соответственно 0,102 и 0,98.

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Основные законы

Закон инерции. *При отсутствии сил материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно* (1-й закон Ньютона). Системы отсчета, в которых этот закон выполняется, называются *инерциальными*. С достаточной в большинстве случаев степенью точности такой системой является система, связанная с Землей.

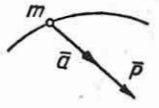
Закон об ускорении и силе. Основное уравнение динамики. *Ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и направлено в сторону силы* (2-й закон Ньютона). Математически это выражается в форме *основного уравнения динамики*

$$m\bar{a} = \bar{P}, \qquad (112)$$

где m — масса точки; $\bar{a}$ — ее ускорение; $\bar{P}$ — приложенная сила (фиг. 86).

Если вес тела G, ускорение силы тяжести g, то

$$m = \frac{G}{g}. \qquad (113)$$



Фиг. 86. Сила и ускорение

Для средней широты $g=9{,}80665$ *м/сек²*; округляя, имеем $g=9{,}8$ *м/сек²*, $\frac{1}{g} = 0{,}102$ *сек²/м* (см. стр. 372, в частности, табл. 4).

Закон действия и противодействия. *Силы взаимодействия двух материальных точек всегда равны друг другу по величине и противоположны по направлению* (3-й закон Ньютона).

Этот закон имеет место не только при относительном покое частиц или тел, но и при их движении.

Закон независимости действия сил. *Под действием нескольких сил материальная точка получает ускорение, равное геометрической сумме ускорений, получаемых при действии каждой силы в отдельности.*

Закон всемирного тяготения. *Две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:*

$$P = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (114)$$

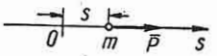
где f — *гравитационная постоянная.*

В системе CGS

$$f = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ см^3\cdot г^{-1}\cdot сек^{-2}.$$

Прямолинейное движение точки

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки. Если отнести точку с массой m, находящуюся под действием силы P, к координате s (фиг. 87), дифференциальное уравнение движения имеет вид



Фиг. 87. Прямолинейное движение точки.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P. \qquad (115)$$

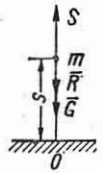
При задании закона движения $s = f(t)$ (прямая или первая задача динамики) сила находится двукратным дифференцированием. При задании силы $P = P(t, s, \dot{s})$ (обратная или вторая задача динамики) закон движения находится интегрированием дифференциального уравнения движения. Две постоянные интеграции C_1 и C_2 определяются из начальных условий: при $t = t_0$, $s = s_0$, $\dot{s} = v_0$. Когда P зависит только от одной переменной (t, s или $\dot{s}$), задача решается так, как указано выше в разделе «Основные задачи кинематики точки» (случаи 4—6).

Пример. Из зенитного орудия выпущен снаряд в вертикальном направлении с начальной скоростью v_0 (фиг. 88). Сила сопротивления воздуха предполагается пропорциональной квадрату скорости ($R = bv^2$; $G = mg$).

Уравнение движения $m\ddot{s} = -mg - bv^2$. Вводим $k^2 = \frac{b}{mg}$. Тогда $\ddot{s} = -g(1 + k^2v^2)$. При $t = 0$, $s = 0$, $\dot{s} = v_0$; при $t = T$ (время взлета) $s_{max} = H$ (высота), $\dot{s} = 0$;

$$H = -\int_{v_0}^{0}\frac{v\,dv}{g(1+k^2v^2)} = \frac{1}{2k^2g}\ln\left(1 + k^2v_0^2\right);$$

$$T = -\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{g(1+k^2v^2)} = \frac{1}{kg}\operatorname{arctg} kv_0.$$



Фиг. 88. Восходящее движение снаряда.

Здесь постоянные C_1 и C_2 не вводились, так как интегралы взяты определенные.

Криволинейное движение точки

Дифференциальные уравнения криволинейного движения. В декартовых координатах уравнения движения свободной материальной точки имеют вид

$$m\ddot{x} = X;\quad m\ddot{y} = Y;\quad m\ddot{z} = Z, \qquad (116)$$

где m — масса точки; x, y, z — ее координаты; X, Y, Z — проекции действующей силы, являющиеся вообще функциями от $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Шесть постоянных интеграции определяются по начальным условиям: при $t = t_0$ (обычно $t_0 = 0$) $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$; $\dot{y} = \dot{y}_0$; $\dot{z} = \dot{z}_0$.

В случае несвободной точки к X, Y, Z добавляются реакции связи N_x, N_y, N_z.

В естественной форме (т. е. в проекциях на касательную, главную нормаль и бинормаль) уравнения движения свободной материальной точки имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = P_t;\quad m\frac{v^2}{\rho} = P_n;\quad 0 = P_b, \qquad (117)$$

где ρ — радиус кривизны траектории; P_t, P_n, P_b — проекции действующей силы.

Если точка несвободна, то добавляются реакции N_t ($N_t = 0$ при идеальной связи), N_n, N_b.

Пример. Движение тела (принимаемого за точку), брошенного наклонно к горизонту в пустоте (фиг. 89); начальная скорость v_0, угол бросания α. Здесь $P = mg$; $X = 0$; $Y = -mg$; $Z = 0$. $m\ddot{x} = 0$; $m\ddot{y} = -mg$; z не рассматриваем, так как очевидно, что движение происходит в плоскости xOy.

Первые интегралы

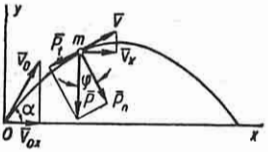
$$\dot{x} = C_1;\quad \dot{y} = -gt + C_2.$$

Вторые интегралы

$$x = C_1 t + C_2;\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4.$$

Начальные условия: $t = 0;\ x = y = 0;\ \dot{x} = v_0 \cos\alpha;\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha;$

$C_1 = v_0 \cos\alpha;\ C_2 = v_0 \sin\alpha;\ C_3 = C_4 = 0.$



Фиг. 89. Движение тяжелой точки, брошенной наклонно к горизонту.

Уравнения движения:

$$x = v_0 t \cos\alpha;\quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Траектория — парабола:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Наибольшая высота подъема

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

Дальность полета

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Радиус кривизны траектории можно определить из второго уравнения в естественной форме:

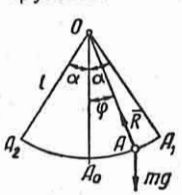
$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos\varphi;\ \rho = \frac{v^2}{g\cos\varphi} = \frac{v^3}{g v_0 \cos\alpha},$$

так как

$$v \cos\varphi = v_0 \cos\alpha;$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 g t \sin\alpha + g^2 t^2}.$$

Математический маятник. Плоским круговым математическим маятником называется материальная точка, движущаяся по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (фиг. 90).



Фиг. 90. Математический маятник

Уравнение движения

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi, \quad (118)$$

где l — длина маятника; φ — угол отклонения от вертикали.

Период колебания (полного)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right], \quad (119)$$

где α — амплитуда колебания.

Функция $f(\alpha)$, стоящая в скобках, имеет значения, приведенные в табл. 7 [2].

Таблица 7

Функции угла α

α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$	α	$f(\alpha)$
0°	1,00000	15°	1,00430	90°	1,1800
2°	1,00005	30°	1,01741	120°	1,3753
5°	1,00048	45°	1,0400	150°	1,7600
10°	1,00194	60°	1,0732	180°	∞

Хорошее приближение дает формула

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right), \quad (120)$$

где угол α выражен в радианах. Для малых углов

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (121)$$

При $\alpha \leqslant 8°$ погрешность этой формулы $\leqslant 0{,}1\%$, при $\alpha \leqslant 22°$ погрешность $\leqslant 1\%$.

Движение точки переменной массы

Точка переменной массы. Точкой переменной массы называется тело, некоторая часть которого в процессе решения данной задачи исключается из рассмотрения или, наоборот, к массе которого присоединяются новые массы, ранее не включенные в рассмотрение; при этом предполагается, что, во-первых, можно пренебречь относительным перемещением центра инерции по отношению к телу вследствие изменения массы, а во-вторых, можно пренебречь кинематическими элементами вращательного движения по сравнению с кинематическими элементами поступательного движения ([3], [10], [16]).

Предполагается также, что масса может быть выражена в виде непрерывной функции от времени

$$m = m(t).$$

Уравнение Мещерского, или основное уравнение динамики точки переменной массы,

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{P}^{реакт}, \qquad (122)$$

где m — масса точки в данный момент времени; a — ее ускорение (точнее — ускорение центра инерции); P — приложенная сила; $\bar{P}^{реакт}$ — реактивная сила, равная

$$\bar{P}^{реакт} = \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}). \qquad (123)$$

Здесь v — абсолютная скорость массы точки $m(t)$ в данный момент времени; u — абсолютная скорость массы, присоединяющейся ($dm > 0$) или отделяющейся ($dm < 0$).

В координатной форме

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + X^{реакт} = \\ &= X + \dot{m}(u_x - \dot{x}); \\ m\ddot{y} &= Y + Y^{реакт} = \\ &= Y + \dot{m}(u_y - \dot{y}); \\ m\ddot{z} &= Z + Z^{реакт} = \\ &= Z + \dot{m}(u_z - \dot{z}). \end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

Частные случаи

1. *Абсолютная скорость присоединяющейся или отделяющейся массы равна нулю* ($u = 0$):

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{P}. \qquad (125)$$

Это есть 2-й закон Ньютона в его первоначальной формулировке: производная по времени количества движения материальной точки геометрически равна приложенной силе.

При постоянной массе получается основное уравнение динамики (112).

2. *Относительная скорость присоединяющейся или отделяющейся массы равна нулю* ($\bar{u} - \bar{v} = 0$):

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P}, \qquad (126)$$

где m — не постоянная, а зависящая от времени величина.

Пример. Подъем ракеты в поле силы тяжести. Предполагается: $m = m_0 e^{-\alpha t}$; $g = \text{const}$, $v_0 = u - v = \text{const}$; сопротивлением пренебрегаем; Из уравнения (124), где

$$Z = -mg, \quad Z^{реакт} = -\dot{m}v_0,$$

имеем

$$m_0 e^{-\alpha t}\ddot{z} = -m_0 e^{-\alpha t} g + \alpha m_0 e^{-\alpha t} v_0$$

или

$$\ddot{z} = -g + \alpha v_0,$$

откуда

$$z = \frac{1}{2}(\alpha v_0 - g)t^2 + v_0 t.$$

Общие теоремы динамики точки

Количество движения. Импульс силы. Теорема количеств движения. *Количеством движения* материальной точки называется вектор

$$\bar{K} = m\bar{v} \qquad (127)$$

с проекциями mv_x, mv_y, mv_z.

Импульсом силы за промежуток времени t называется вектор

$$\bar{I} = \int_0^t \bar{P}\,dt \qquad (128)$$

с проекциями $\int_0^t X\,dt$, $\int_0^t Y\,dt$, $\int_0^t Z\,dt$.

Размерность I и K — одинаковая, равная в абсолютной системе единиц $L^1M^1T^{-1}$, в технической K^1T^1.

Теорема количеств движения. Геометрическое приращение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток времени:

$$m\bar{v}_t - m\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{P}\,dt,$$

где v_t и v_0 — скорости точки соответственно в конечный и в начальный моменты времени. В проекциях на оси

$$\left.\begin{aligned} mv_{tx} - mv_{0x} &= \int_0^t X\,dt = I_x; \\ mv_{ty} - mv_{0y} &= \int_0^t Y\,dt = I_y; \\ mv_{tz} - mv_{0z} &= \int_0^t Z\,dt = I_z. \end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

Момент количества движения точки. Теорема моментов количеств движения. *Момент количества движения* материальной точки относительно центра

и оси определяется совершенно так же, как момент силы. Момент количества движения точки относительно начала координат есть векторное произведение радиуса-вектора точки на ее количество движения:

$$\overline{G}_0 = \overline{r} \times m\overline{v}.$$

Моменты количества движения точки относительно осей координат:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= m(yv_z - zv_y) = 2m\sigma_{yz};\\ G_y &= m(zv_x - xv_z) = 2m\sigma_{zx};\\ G_z &= m(xv_y - yv_x) = 2m\sigma_{xy}, \end{aligned}\right\} \quad (130)$$

где σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{xy} — секторные скорости проекции точки на соответствующие плоскости.

Теорема моментов количества движения. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту приложенной силы относительно этого центра:

$$\frac{d\overline{G}_0}{dt} = \overline{M}_0(\overline{P}).$$

В координатной форме.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} &= M_x(\overline{P}); \quad \frac{dG_y}{dt} = M_y(\overline{P});\\ \frac{dG_z}{dt} &= M_z(\overline{P}). \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Если момент силы относительно какой-либо оси равен нулю, соответствующая секторная скорость постоянна. Например, если $M_x(\overline{P})=0$, то $\sigma_{yz} = \text{const}$.

Если $\overline{M}_0(\overline{P}) = 0$ — *сила центральная*, тогда имеет место *теорема площадей*: при действии центральной силы точка описывает плоскую кривую с постоянной секторной скоростью.

Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. *Кинетической энергией* или *живой силой материальной точки* называется половина произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (132)$$

Теорема кинетической энергии. Приращение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении (элементарном или конечном) равно работе приложенных сил на этом перемещении:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (133)$$

где A есть работа всех сил или работа равнодействующей. T имеет размерность работы.

Если силы имеют потенциал, то имеет место закон сохранения механической энергии:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad (134)$$

где Π — потенциальная энергия.

В случае несвободной точки, подчиненной идеальным связям, не зависящим от времени, формулировка теоремы живых сил не изменяется. Если же связи не идеальные или зависят от времени (подвижная поверхность), к работе активных сил добавляется работа реакций связей.

Кинетостатика точки. Относительное движение

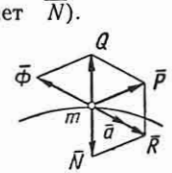
Сила инерции. *Силой инерции* $\overline{\Phi}$ материальной точки называется сила, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}. \quad (135)$$

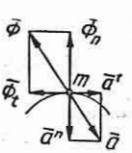
Принцип Даламбера. Если к материальной точке приложить силу инерции то активная сила $\overline{P}$ (точнее, равнодействующая всех активных сил), реакция связи $\overline{N}$ и сила инерции $\overline{\Phi}$ будут в равновесии (фиг. 91):

$$\overline{P} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0. \quad (136)$$

На фиг. 91 $\overline{R} = m\overline{a}$ — *деятельная сила*, $\overline{Q}$ — *потерянная сила* (уравновешивает $\overline{N}$).



Фиг. 91. Принцип Даламбера.



Фиг. 92. Разложение силы инерции.

Разложение силы инерции. В общем случае (фиг. 92) $\overline{\Phi}$ разлагается на *тангенциальную* или *касательную* силу

инерции Φ_t и *нормальную* или *центробежную* силу инерции Φ_n:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_t &= m\frac{dv}{dt};\\ \Phi_n &= m\frac{v^2}{\rho},\end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

где ρ — радиус кривизны траектории. В случае кругового движения (радиус окружности r)

$$\Phi_t = m\varepsilon r; \quad \Phi_n = m\omega^2 r. \qquad (138)$$

Пример. Ручка центробежного регулятора длиной l с грузом G на конце равномерно вращается вокруг вертикали с угловой скоростью ω. Пренебрегая весом ручки, найти угол α и усилие $\overline{N}$ в ручке (фиг. 93).

Фиг 93. Отклонение от вертикали ручки центробежного регулятора.

Здесь $\Phi_t = 0$;

$$\Phi_n = \frac{G}{g}\omega^2 l \sin\alpha.$$

Для системы сходящихся сил составляем уравнения равновесия:

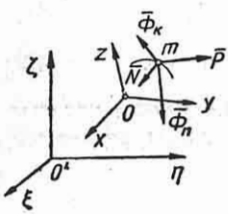
$$\sum X = \frac{G}{g}\omega^2 l \sin\alpha - N\sin\alpha = 0;$$

$$\sum Y = N\cos\alpha - G = 0;$$

отсюда

$$N = \frac{G}{g}\omega^2 l; \quad \alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}.$$

Относительное движение точки. Система $O'\xi\eta\zeta$ — *инерциальная*, $Oxyz$ — неинерциальная, т. е. *движущаяся* по отношению к первой вообще *неравномерно* и *непрямолинейно* (фиг.94). Чтобы составить уравнения движения точки массы m в этой подвижной системе, следует к заданным силам и реакциям связи прибавить *силы инерции переносную* $\overline{\Phi}_п$ и *кориолисову* $\overline{\Phi}_к$:



Фиг. 94.

Динамика относительного движения.

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N} + \overline{\Phi}_п + \overline{\Phi}_к,$$

где $\overline{\Phi}_п = -m\overline{a}_п$; $\overline{\Phi}_к = -m\overline{a}_к$ ($a_п$ — переносное ускорение точки m, $a_к$ — поворотное).

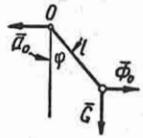
В координатной форме:

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x} &= P_x + N_x + \Phi_{пx} + \Phi_{кx};\\ m\ddot{y} &= P_y + N_y + \Phi_{пy} + \Phi_{кy};\\ m\ddot{z} &= P_z + N_z + \Phi_{пz} + \Phi_{кz}.\end{aligned}\right\} \qquad (139)$$

Теорема кинетической энергии сохраняется, но добавляется работа переносной силы инерции.

Пример. Акселерометр для определения ускорения вагона a_0 представляет собой маятник длиной l (фиг. 95).

Для составления уравнения движения маятника добавляем силу инерции Φ_0:



Фиг. 95. Акселерометр.

$$m\frac{dv}{dt} = P_t = \Phi_0\cos\varphi - G\sin\varphi,$$

но

$$\Phi_0 = ma_0; \quad G = mg; \quad v = l\dot{\varphi};$$

следовательно,

$$\ddot{\varphi} = \frac{a_0}{l}\cos\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi.$$

При относительном равновесии $\varphi = \varphi_0$, $\ddot{\varphi} = 0$

$$a_0 = g\operatorname{tg}\varphi_0.$$

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Общие теоремы динамики системы

Количество движения. Теорема количеств движения. *Количеством движения системы* или, точнее, *главным вектором количеств движения системы* называется геометрическая сумма количеств движения всех точек системы

$$\overline{K} = \sum m_i\overline{v}_i. \qquad (140)$$

В проекциях:

$$\left.\begin{aligned}K_x &= \sum m_i v_{ix}; \quad K_y = \sum m_i v_{iy};\\ K_z &= \sum m_i v_{iz}.\end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

Если M — полная масса системы, $\overline{v}_c$ — скорость центра масс (или центра инерции), то

$$\overline{K} = M\overline{v}_c. \qquad (142)$$

Теорема количеств движения (в дифференциальной форме). Производная по времени от главного вектора количеств движения системы равна главному вектору *внешних сил*:

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R} = \sum\overline{P}_i. \qquad (143)$$

В координатной форме:

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x; \quad \frac{dK_y}{dt} = R_y; \quad \frac{dK_z}{dt} = R_z. \quad (144)$$

Теорема импульсов (теорема количеств движения в конечной форме). Геометрическое приращение главного вектора количеств движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех внешних сил за тот же промежуток:

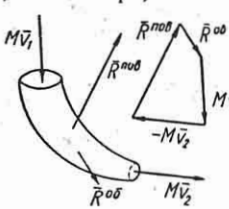
$$\overline{K} - \overline{K}_0 = \sum \overline{I}_i. \quad (145)$$

В координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} K_x - K_{x0} &= \sum I_{ix}; \\ K_y - K_{y0} &= \sum I_{iy}; \\ K_z - K_{z0} &= \sum I_{iz}. \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

В случае уравновешивания внешних сил $\overline{K} = \overline{K}_0 = \text{const}$.

Теорема количеств движения для жидкости (теорема Эйлера). Главные векторы объемных и поверхностных сил и векторы количеств движения массы жидкости, протекающей в единицу времени (фиг. 96) через входное сечение трубы и с обратным знаком через выходное, образуют замкнутый многоугольник:



Фиг. 96. Теорема Эйлера.

$$M\bar{v}_1 - M\bar{v}_2 + \bar{R}^{об} + \bar{R}^{пов} = 0, \quad (147)$$

где $M = \frac{Q}{g}$, а Q — весовой расход жидкости.

Теорема о движении центра масс (также центра инерции, центра тяжести). Центр масс системы движется, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

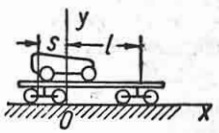
Если x_c, y_c, z_c — координаты центра масс, a_c — его ускорение, M — масса системы, R — главный вектор внешних сил, то

$$M\bar{a}_c = \bar{R}. \quad (148)$$

В координатной форме дифференциальные уравнения движения центра масс

$$M\ddot{x}_c = R_x; \quad M\ddot{y}_c = R_y; \quad M\ddot{z}_c = R_z. \quad (149)$$

Пример. Автомобиль весом G_1 перемещается на расстояние l вдоль железнодорожной платформы весом G_2 со скоростью u по отношению к платформе (фиг. 97). Пренебрегая сопротивлениями, найти перемещение s и скорость v платформы, если в начальный момент $v = 0$.



Фиг. 97. Перемещение автомобиля на платформе.

Здесь $\sum X = R_x = 0$, а поэтому $K_x = K_{x0} = 0$, т. е.

$$\frac{G_1}{g}(u - v) + \frac{G_2}{g}(-v) = 0, \quad v = \frac{G_1 u}{G_1 + G_2}.$$

Из уравнения движения центра инерции $M\ddot{x}_c = R_x$ находим:

$$\dot{x}_c = C_1 = 0; \quad x_c = C_2 = x_{c0};$$

$$\frac{G_1(x_{10} + l - s) + G_2(x_{20} - s)}{G_1 + G_2} =$$

$$= \frac{G_1 x_{10} + G_2 x_{20}}{G_1 + G_2}; \quad s = \frac{G_1 l}{G_1 + G_2}.$$

Кинетический момент. Теорема моментов количеств движения. *Главным моментом количеств движения системы* или *кинетическим моментом системы* относительно некоторого центра (например, начала координат) называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\overline{G}_0 = \sum \overline{mom}_0 (m_i\bar{v}_i) = \sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i. \quad (150)$$

Проекции $\overline{G}_0$ на оси координат, проходящие через O, называются *главными моментами количеств движения системы* (или кинетическими моментами) *относительно осей*; они равны соответственным алгебраическим суммам моментов относительно этих осей:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= \sum mom_x (m_i\bar{v}_i) = \\ &= \sum m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}); \\ G_y &= \sum mom_y (m_i\bar{v}_i) = \\ &= \sum m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}); \\ G_z &= \sum mom_z (m_i\bar{v}_i) = \\ &= \sum m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}). \end{aligned}\right\} \quad (151)$$

Кинетический момент системы относительно некоторого неподвижного

центра равен геометрической сумме момента количеств движения центра масс системы, в котором сосредоточена вся ее масса, относительно данного центра и кинетического момента системы относительно центра масс в относительном движении по отношению к осям, проходящим через центр масс и движущимся поступательно:

$$\overline{G}_0 = \overline{mom}_0 (M\overline{v}_c) + \overline{G}'_c = \overline{r}_c \times M\overline{v}_c + \overline{G}'_c, \qquad (152)$$

где штрих означает, что надо брать относительные скорости.

Теорема моментов количеств движения или теорема о кинетическом моменте. Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра (неподвижного или же относительно центра масс) равна главному моменту внешних сил относительно того же центра:

$$\frac{d\overline{G}_0}{dt} = \overline{L}_0 = \sum \overline{M}_0 (\overline{P}_i). \qquad (153)$$

В координатной форме:

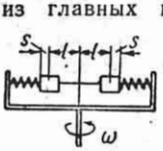
$$\frac{dG_x}{dt} = L_x; \quad \frac{dG_y}{dt} = L_y; \quad \frac{dG_z}{dt} = L_z. \qquad (154)$$

Если $\overline{L}_0 = 0$, то $\overline{G}_0 = \text{const}$ по величине и направлению. G_x, G_y, G_z выражаются через секторные скорости σ_i отдельных точек:

$$G_x = 2\sum m_i \sigma_{iyz}; \quad G_y = 2\sum m_i \sigma_{izx}; \quad G_z = 2\sum m_i \sigma_{ixy}.$$

В случае обращения в нуль одного из главных моментов сил, например $L_x = 0$, имеет место интеграл площадей

$$\sum m_i \sigma_{iyz} = \text{const}.$$



Фиг. 98. Пружинный регулятор.

Аналогичные выражения получаются в случаях $L_x = 0$ или $L_z = 0$.

Пример. При изменении угловой скорости от ω_0 до ω грузы пружинного регулятора (фиг. 98), бывшие на расстоянии l от оси, перемещаются на расстояние s. Массой всех частей механизма, кроме грузов, пренебрегаем. Определить ω.

Решение. $\frac{dG_z}{dt} = L_z = 0$; $G_z = 2m\sigma_{xy} = \text{const}$; $l^2\omega_0 = (l+s)^2\omega$, отсюда $\omega = \frac{l^2}{(l+s)^2}\omega_0$.

Кинетическая энергия системы. Теорема кинетической энергии. *Кинетической энергией* или *живой силой системы* называется сумма произведений масс всех ее точек на квадраты их скоростей:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (155)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, в котором сосредоточена вся ее масса, и кинетической энергии в относительном движении системы по отношению к осям, проходящим через центр масс и движущимся поступательно:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + T', \qquad (156)$$

где штрих означает, что надо брать относительные скорости.

Теорема кинетической энергии для системы. Приращение кинетической энергии системы на некотором перемещении (элементарном или конечном) равно сумме работ всех приложенных сил как внешних, так и внутренних:

$$T - T_0 = \sum A^{внеш} + \sum A^{внут}. \qquad (157)$$

Если система неизменяемая, то

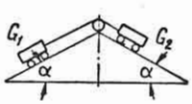
$$\sum A^{внут} = 0.$$

Роль наложенных связей та же, что в случае точки. При движении в потенциальном поле имеет место закон сохранения механической энергии:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}, \qquad (158)$$

где Π — потенциальная энергия системы. В этом случае система называется *консервативной*.

Пример. По наклонным плоскостям с углом α движутся вагонетки весом G_1 и G_2 ($G_2 > G_1$). Определить скорость вагонеток, когда они из состояния покоя пройдут путь s (фиг. 99). Трением пренебречь.



Фиг. 99. Движение вагонеток по наклонным плоскостям.

Здесь: $T_0 = 0$; $T = \frac{G_1 + G_2}{2g} v^2$; $\Pi_0 - \Pi = (G_2 - G_1) s \sin\alpha$;

$$v = \sqrt{\frac{2g(G_2 - G_1) s \sin\alpha}{G_1 + G_2}}.$$

Общие принципы динамики системы

Принцип Даламбера. Если ко всем точкам системы приложить силы инерции, то активные силы, реакции связей и силы инерции будут уравновешиваться.

Уравнения равновесия составляются таким же образом, как в статике, и носят название *уравнений кинетостатики* (см. стр. 387).

Общее уравнение кинетостатики. Объединение принципа возможных перемещений и принципа Даламбера гласит: сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к материальной системе, подчиненной идеальным неосвобождающим связям, и сил инерции на всяком возможном перемещении равна нулю, т. е.

$$\sum\{(X_i - m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i + (Y_i - m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i + (Z_i - m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i\} = 0, \qquad (159)$$

где X_i, Y_i, Z_i — проекции активных сил; x_i, y_i, z_i — координаты точек их приложения.

Пример. Центробежный регулятор состоит из двух шаров весом $G_1 = G_2 = G$, муфты весом G_0 и четырех стержней, весами которых можно пренебречь (фиг. 100). Размеры указаны. Определить угол φ, если $\omega = \text{const}$.

Фиг. 100. Центробежный регулятор.

Если силы инерции шаров обозначить через $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, то общее уравнение кинетостатики примет вид

$$G_0\delta y_0 + 2G\delta y + 2\Phi\delta x = 0,$$

где

$$y_0 = 2a\cos\varphi; \quad y_1 = y_2 = y = l\cos\varphi;$$

$$x_1 = -x_2 = x = l\sin\varphi;$$

тогда

$$\left(-2aG_0\sin\varphi - 2lG\sin\varphi + 2\frac{G}{g}\omega^2 l^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\delta\varphi = 0.$$

По конструктивным соображениям $\varphi \neq 0$, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(G_0 a + Gl)\,g}{G\omega^2 l^2}.$$

Уравнения Лагранжа 1-го рода. В случае несвободной системы координаты ее точек должны удовлетворять уравнениям связей

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0; \\ &j = 1, 2, \ldots, s. \end{aligned}\right\} \qquad (160)$$

Уравнения движения в форме Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= X_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}; \\ m_i\ddot{y}_i &= Y_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}; \\ m_i\ddot{z}_i &= Z_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_i}; \\ i &= 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \qquad (161)$$

Из этих уравнений и уравнений связей определяются все $3n + s$ неизвестных: $3n$ координат и s *множителей связи* λ_j.

Пример. Движение точки по гладкой поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

$$m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Эти уравнения интегрируются совместно с уравнением поверхности. Вторые члены правых частей являются проекциями нормальной реакции поверхности; величина реакции

$$N = |\lambda|\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода. При отнесении движения системы к обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_k$ уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (162)$$

$$j = 1, 2, \ldots, k,$$

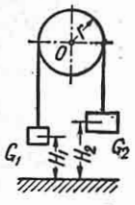
где T — кинетическая энергия системы; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ — обобщенные скорости; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ — обобщенные силы.

В потенциальном поле

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j},$$

где U — силовая функция; V — потенциал; Π — потенциальная энергия.

Пример. Блок весом G_0, радиуса r с массой, распределенной по ободу (фиг. 101), приводится во вращение канатом (весом пренебрегаем), несущим грузы G_1 и G_2 ($G_2 > G_1$). Определить угловое ускорение барабана.



Фиг. 101. Движение блока под действием грузов.

Здесь $q=\varphi$ (угол поворота):

$$T = \frac{1}{2g}(G_0 + G_1 + G_2)\, r^2\dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = G_1 H_1 + G_2 H_2,$$

где $H_1 = h_1 + r\varphi$; $H_2 = h_2 - r\varphi$ (h_1, h_2 — начальные высоты грузов над произвольной горизонтальной плоскостью);

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{g}(G_0 + G_1 + G_2)\, r^2\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (G_1 - G_2)\, r;$$

$$\frac{(G_0 + G_1 + G_2)\, r^2}{g}\ddot{\varphi} + (G_1 - G_2)\, r = 0;$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{G_2 - G_1}{G_0 + G_1 + G_2} \cdot \frac{g}{r}.$$

Принцип Остроградского — Гамильтона. Если сравнить действительное движение консервативной системы («прямой путь») с любым кинематически возможным, бесконечно близким к нему («окольный путь»), происходящим в течение одного и того же промежутка времени и между одними и теми же положениями («конфигурациями»), то вариация «действия» при переходе с прямого пути к окольному равна нулю:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\, dt = 0, \qquad (163)$$

где интеграл представляет собой *действие*.

Устойчивость движения. Если движение системы, определяемое решением дифференциальных уравнений при некоторых определенных начальных условиях, принять за *основное* или *невозмущенное*, например в обобщенных координатах

$$q_1 = f_1(t); \quad q_2 = f_2(t), \ldots,$$

$$q_\kappa = f_\kappa(t),$$

то движение, определяемое измененными начальными условиями (координатами и скоростями), называется *возмущенным*, а величины изменений начальных условий — *возмущениями*.

Пусть поведение системы в возмущенном движении по сравнению с ее поведением в невозмущенном движении определяется совокупностью величин $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_n(t)$, могущих быть разностями координат (в основном и возмущенном движении), скоростей или их функциями.

Невозмущенное движение системы называется *устойчивым по Ляпунову*, если при всяком наперед заданном положительном числе ε можно указать такое положительное число δ, зависящее от ε, что при начальном возмущении $|s_i(0)| < \delta$ в последующем возмущенном движении системы будут справедливы в любой момент времени неравенства $|s_i(t)| < \varepsilon$.

Если, кроме того, все $s_i \to 0$ при $t \to \infty$, то невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*.

В случае равновесия системы $q_1 = q_1^0, \ldots, q_\kappa = q_\kappa^0$ являются также частными решениями дифференциальных уравнений движения, вследствие чего совершенно так же определяется *устойчивость равновесия по Ляпунову*.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Основные определения и соотношения

Моментом инерции J тела относительно точки, оси или плоскости называется сумма произведений элементов массы тела на квадраты их расстояний до точки, оси или плоскости:

$$J = \int r^2 dm. \qquad (164)$$

Размерность момента инерции: в абсолютной системе L^2M^1 ($г \cdot см^2$ или $т \cdot м^2$); в технической системе $L^1K^1T^2$ ($кГ \cdot м \cdot сек^2$).

Если M — полная масса тела, G — его вес, i_Δ — *радиус инерции тела* относительно оси Δ, то момент инерции относительно оси Δ

$$J_\Delta = Mi_\Delta^2 = \frac{G}{g} i_\Delta^2 =$$

$$= 0{,}102 G i_\Delta^2 \ кГ \cdot м \cdot сек^2. \qquad (165)$$

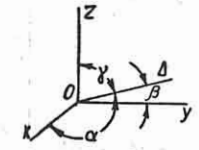
Маховой момент тела относительно оси есть произведение его веса на квадрат *диаметра инерции* ($D_\Delta = 2i_\Delta$):

$$K_\Delta = GD_\Delta^2 = 4Gi_\Delta^2 = 39{,}2 J_\Delta \ кГм^2. \qquad (166)$$

Теорема о параллельных осях. Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной первой и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_C + Mh^2. \qquad (167)$$

Момент инерции тела относительно оси Δ, проходящей через начало координат и образующей углы α, β, γ с осями (фиг. 102), равен



Фиг. 102. Определение направления оси тремя углами.

$$J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta, \qquad (168)$$

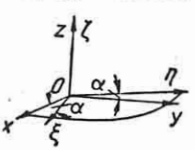
где J_x, J_y, J_z — моменты инерции *относительно осей координат*, а J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} — *центробежные моменты инерции*, или *произведения инерции*:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm; \\ J_y &= \int (z^2 + x^2)\, dm; \\ J_z &= \int (x^2 + y^2)\, dm; \\ J_{yz} &= \int yz\, dm; \\ J_{zx} &= \int zx\, dm; \\ J_{xy} &= \int xy\, dm. \end{aligned}\right\} \qquad (169)$$

Если оси ξ, η, ζ параллельны осям x, y, z и проходят через центр тяжести тела, то

$$J_{yz} = My_C z_C + J_{\eta\zeta} \qquad (170)$$

и т. д.



Фиг. 103. Поворот координатного трехгранника вокруг одной из осей координат.

Ось z называется *главной осью инерции*, если $J_{yz} = J_{zx} = 0$.

Если тело симметрично относительно оси, то эта ось главная. Если тело симметрично относительно плоскости, то всякая прямая, перпендикулярная к этой плоскости, есть главная ось.

Поворот осей координат вокруг одной из осей (фиг. 103). В этом случае

$$J_{\eta\zeta}^2 + J_{\zeta\xi}^2 = J_{yz}^2 + J_{zx}^2; \qquad (171)$$

$$J_{\xi\eta} = J_{xy}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha. \qquad (172)$$

Моменты инерции относительно начала (J_0) **и плоскостей координат** (J_{yOz}, J_{zOx}, J_{xOy}):

$$J_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z),$$

$$J_{yOz} = \int x^2 dm; \quad J_{zOx} = \int y^2 dm;$$

$$J_{xOy} = \int z^2 dm;$$

$$J_x = J_{zOx} + J_{xOy}$$

и т. д.

Для плоских фигур ($z = 0$)

$$J_x = J_O = J_x + J_y.$$

Моменты инерции однородных тел

1) Объемное распределение масс плотности ρ:

$$J_\Delta = \rho J_\Delta^{(V)}; \quad J_\Delta^{(V)} = \int r^2 dV; \qquad (173)$$

$J_\Delta^{(V)}$ — момент инерции объема.

2) Поверхностное распределение масс плотности σ:

$$J_\Delta = \sigma J_\Delta^{(F)}; \quad J_\Delta^{(F)} = \int r^2 dF; \qquad (174)$$

$J_\Delta^{(F)}$ — момент инерции поверхности (в частности, площади фигуры).

3) Линейное распределение масс плотности λ:

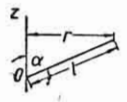
$$J_\Delta = \lambda J_\Delta^{(L)}; \quad J_\Delta^{(L)} = \int r^2 dL; \qquad (175)$$

$J_\Delta^{(L)}$ — момент инерции длины.

Моменты инерции однородных тел приведены в табл. 8.

Таблица 8

Моменты инерции однородных тел

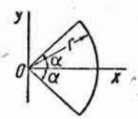


Идеально тонкий стержень:

$$J_z = \frac{Mr^2}{3} = \frac{1}{3} Ml^2 \sin^2 \alpha.$$

При $\alpha = 90°$

$$J_z = \frac{Ml^2}{3}$$



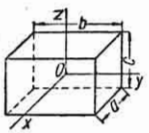
Материальная дуга окружности:

$$J_x = \frac{Mr^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right); \quad J_y = \frac{Mr^2}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

(α — угол в радианах)

Полная окружность ($\alpha = \pi$):

$$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{2}$$



Прямоугольный параллелепипед (оси x, y, z проходят через центр тяжести и параллельны соответственно сторонам a, b, c):

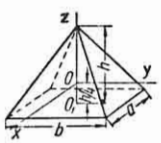
$$J_x = \frac{M}{12}(b^2 + c^2); \; J_y = \frac{M}{12}(c^2 + a^2);$$

$$J_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

При $c \to 0$ получаем прямоугольную пластинку.

Куб со стороной a:

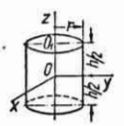
$$J_x = J_y = J_z = \frac{Ma^2}{6}$$



Четырехугольная пирамида с прямоугольным основанием, O — центр тяжести:

$$J_x = \frac{M}{80}(4b^2 + 3h^2); \; J_y = \frac{M}{80}(4a^2 + 3h^2);$$

$$J_z = \frac{M}{20}(a^2 + b^2)$$



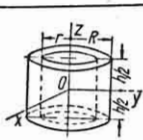
Прямой круглый цилиндр, O — центр тяжести:

$$J_x = J_y = \frac{M}{12}(3r^2 + h^2); \quad J_z = \frac{Mr^2}{2}.$$

При $h \to 0$ получаем диск.

Для боковой поверхности цилиндра

$$J_x = J_y = \frac{M}{12}(6r^2 + h^2); \quad J_z = Mr^2.$$

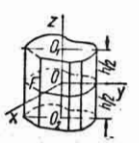


Полый цилиндр, O — центр тяжести:

$$J_x = J_y = \frac{M}{12}(3R^2 + 3r^2 + h^2);$$

$$J_z = \frac{M}{2}(R^2 + r^2).$$

При $h \to 0$ получаем круговое кольцо



Прямая призма или цилиндр, O — центр тяжести, ось z параллельна ребрам или образующим:

$$J_x = \rho\left(F\frac{h^2}{12} + hJ_x^F\right); \; J_y = \rho\left(F\frac{h^2}{12} + hJ_y^F\right); \quad J_z = \rho h J_z^F,$$

где ρ — плотность; F — площадь нормального сечения; J_x^F, J_y^F, J_z^F — моменты инерции площади F среднего сечения относительно осей x, y, z

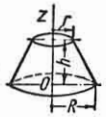
Продолжение табл. 8

Прямой круглый конус, O — центр тяжести:

$$J_x = J_y = \frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right); \quad J_z = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Для боковой поверхности конуса

$$J_z = \frac{1}{2} Mr^2$$

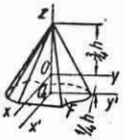


Прямой усеченный круглый конус:

$$J_z = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Для боковой поверхности усеченного конуса

$$J_z = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$$

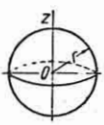


Прямая пирамида или конус, O_1 — центр тяжести основания, ось z перпендикулярна основанию:

$$J_x = \rho \left(F \frac{h^3}{80} + \frac{h}{5} J_{x'}^F \right); \; J_y = \rho \left(F \frac{h^3}{80} + \frac{h}{5} J_{y'}^F \right);$$

$$J_z = \frac{1}{5} \rho h J_z^F,$$

где ρ — плотность; F — площадь основания; $J_{x'}^F$, $J_{y'}^F$, J_z^F — моменты инерции площади основания относительно осей x', y', z

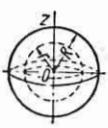


Шар:

$$J_z = \frac{2}{5} Mr^2.$$

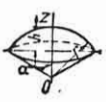
Для поверхности шара

$$J_z = \frac{2}{3} Mr^2$$



Полый шар:

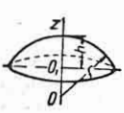
$$J_z = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$



Шаровой сектор:

$$J_z = \frac{Mh}{5} (3r - h) = \frac{Mr^2}{5} (1 - \cos \alpha) (2 + \cos \alpha).$$

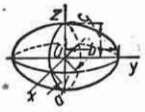
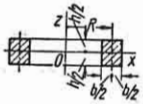
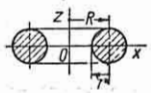
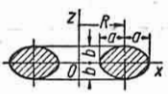
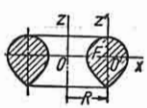
В случае полушара $\alpha = 90°$, $J_z = \frac{2}{5} Mr^2$



Шаровой сегмент:

$$J_z = \frac{Mh}{10} \cdot \frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r - h}$$

Продолжение табл. 8

	Эллипсоид: $J_x = \frac{M}{5}(b^2+c^2)$; $J_y = \frac{M}{5}(c^2+a^2)$; $J_z = \frac{M}{5}(a^2+b^2)$
	Параболоид вращения $J_z = \frac{1}{3}Mr^2$
	Кольцо прямоугольного сечения $J_z = M\left(R^2+\frac{1}{4}b^2\right)$; $J_x = \frac{M}{12}\left(6R^2+\frac{3}{2}b^2+h^2\right)$
	Кольцо круглого сечения (тор): $J_z = M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$; $J_x = M\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{5}{8}r^2\right)$
	Кольцо эллиптического сечения: $J_z = M\left(R^2+\frac{3}{4}a^2\right)$; $J_x = M\left(\frac{1}{2}R^2+\frac{3}{8}a^2+\frac{1}{4}b^2\right)$
	Кольцо с сечением, симметричным относительно оси z', параллельной оси вращения z. Ось x — любая ось, перпендикулярная к оси z (вообще не проходящая через центр тяжести сечения): $J_z = \rho \cdot 2\pi R\,(FR^2+3J^F_{x'})$; $J_x = \rho \cdot \pi R\,(FR^2+3J^F_{z'}+2J^F_x)$, где J^F_x, $J^F_{z'}$ — моменты инерции площади F относительно осей x, z'; ρ — плотность

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращение тела вокруг неподвижной оси

В дальнейшем за ось вращения принята ось z; вращающий момент (сумма моментов всех сил относительно оси вращения) обозначен через M_z; остальные обозначения уже применялись.

Кинетический момент относительно оси вращения

$$G_z = J_z\omega. \qquad (176)$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2. \qquad (177)$$

Дифференциальное уравнение вращения

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z, \qquad (178)$$

что записывается еще так:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z \text{ или } J_z\varepsilon = M_z.$$

Прямая задача [дано $\varphi = f(t)$, требуется определить M_z] решается дифференцированием, обратная (отыскание φ по M_z) — интегрированием дифференциального уравнения. M_z вообще зависит от t, φ, $\dot{\varphi}$. Если M_z зависит только

от одной из этих величин, задача решается так, как указано на стр. 376, «Основные задачи кинематики вращательного движения» (случаи 4—6).

Уравнение кинетической энергии

$$\frac{J_z\omega^2}{2} - \frac{J_z\omega_0^2}{2} = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi; \qquad (179)$$

это уравнение дает непосредственно *интеграл*, если $M_z = M_z(\varphi)$ или $M_z = \text{const}$.

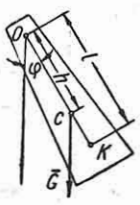
Уравнение кинетического момента

$$J_z\omega - J_z\omega_0 = \int_0^{t} M_z dt; \qquad (180)$$

это уравнение дает непосредственно *интеграл*, если $M_z = M_z(t)$ или $M_z = \text{const}$.

О мощности см. стр. 366, «Аналитическая статика».

Физический маятник. Физическим маятником называется твердое тело, колеблющееся около неподвижной оси (обычно горизонтальной) под действием силы тяжести (фиг. 104).



Фиг. 104. Физический маятник.

Точка пересечения оси подвеса с плоскостью, ей перпендикулярной и проходящей через центр тяжести, называется *точкой подвеса*.

Дифференциальное уравнение колебаний маятника

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgh}{J_0}\sin\varphi, \qquad (181)$$

где m — масса маятника; h — расстояние его центра тяжести от точки подвеса; J_0 — момент инерции относительно оси подвеса.

Это уравнение тождественно с уравнением колебаний математического маятника, имеющего длину

$$l = \frac{J_0}{mh}, \qquad (182)$$

называемую *приведенной длиной* физического маятника. Конец K отрезка l (фиг. 104) называется *центром качания* маятника. Если центр качания сделать точкой подвеса, прежняя точка подвеса станет центром качания, и период колебаний маятника не изменится.

Приближенная формула для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Gh}} \qquad (183)$$

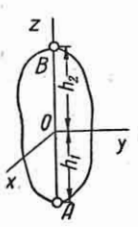
(см. стр. 385, «Математический маятник»).

Опытное определение момента инерции при помощи качаний. Известны G, h, T; тогда

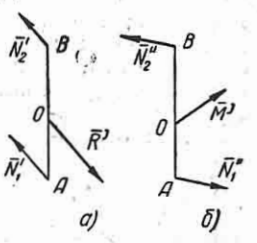
$$J_c = Gh\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{h}{g}\right), \qquad (184)$$

где J_c — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси подвеса.

Давление вращающегося тела на опоры. A, B — точки опоры (подшипники или подпятники); O — произвольная точка на оси вращения (фиг. 105). Полные реакции опор слагаются из *статических*, определяемых по правилам статики, и *добавочных динамических*, перпендикулярных к оси, вращающихся вокруг нее вместе с телом.



Фиг. 105. Давление вращающегося тела на опоры.



Фиг. 106. Реакции, обусловленные главным вектором (*а*) и главным моментом (*б*) сил инерции.

Последние, в свою очередь, распадаются на реакции N_1', N_2', обусловленные главным вектором $\bar{R}^J$ сил инерции, и N_1'', N_2'', обусловленные главным моментом $\bar{M}^J$ сил инерции (фиг. 106, *а* и *б*) ([16], [23]):

$$\left.\begin{aligned} R^J &= mr_c\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}; \\ M^J &= \sqrt{J_{yz}^2 + J_{zx}^2}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

где m — полная масса тела; r_c — расстояние центра тяжести от оси вращения. В практических случаях одна из осей x или z есть главная; тогда один из центробежных моментов инер-

ции обращается в нуль, а другой вычисляется с помощью формулы (172). О наиболее общем случае см. [16], [23].

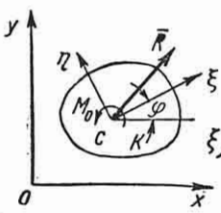
Тогда, если $h = h_1 + h_2$,

$$\left.\begin{aligned} N_1' &= R^J \frac{h_2}{h}; \quad N_2' = R^J \frac{h_1}{h}; \\ N_1'' &= N_2'' = \frac{1}{h} M^J. \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

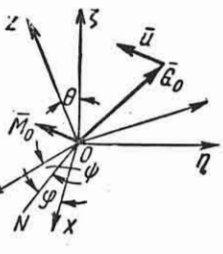
Условия свободной оси (добавочные давления отсутствуют): ось вращения должна быть главной ($J_{yz} = J_{zx} = 0$) и центральной ($x_c = y_c = 0$) осью инерции. В этом случае имеет место *динамическая уравновешенность*; если же выполняется только второе условие ($x_c = y_c = 0$), уравновешенность называется *статической*.

Плоско-параллельное движение

Пусть K — сечение тела неподвижной плоскостью, проходящей через центр тяжести c; $\bar{R}$ — главный вектор всех сил; M_c — их главный момент относительно оси, проходящей через c, перпендикулярной плоскости (фиг. 107); J_c — момент инерции тела относительно этой оси. Дифференциальные уравнения плоско-параллельного движения:



Фиг. 107. Динамика плоско-параллельного движения тела.



Фиг. 108. Динамика движения около неподвижной точки

$$m\ddot{x}_c = R_x; \quad m\ddot{y}_c = R_y; \quad J_c\ddot{\varphi} = M_c. \qquad (187)$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}. \qquad (188)$$

Пример. Кинетическая энергия катящегося однородного цилиндра весом G равна

$$T = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Gr^2}{2g} \cdot \frac{v_c^2}{r^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Gv_c^2}{g}.$$

Движение около неподвижной точки

Положение осей x, y, z, связанных с телом, по отношению к неподвижным осям ξ, η, ζ определяется углами Эйлера φ, ψ, θ (фиг. 108). За оси x, y, z принимаются главные оси инерции тела.

Скорость $\bar{u}$ конца кинетического момента $\bar{G}_0$ относительно неподвижной точки O равна главному моменту $\bar{M}_0$ всех приложенных сил (теорема Резаля).

Проекции $\bar{G}_0$ на оси x, y, z (или кинетические моменты относительно осей):

$$\left.\begin{aligned} G_x = J_x\omega_x; \quad G_y = J_y\omega_y; \\ G_z = J_z\omega_z. \end{aligned}\right\} \qquad (189)$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right). \qquad (190)$$

Уравнения движения тела, отнесенные к осям x, y, z (динамические уравнения Эйлера):

$$\left.\begin{aligned} J_x\frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z = M_x; \\ J_y\frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x = M_y; \\ J_z\frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y = M_z. \end{aligned}\right\} \qquad (191)$$

где M_x, M_y, M_z — главные моменты сил относительно осей x, y, z. Эти уравнения интегрируются совместно с кинематическими уравнениями Эйлера (см. стр. 380).

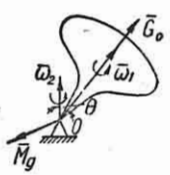
Гироскоп

Гироскопом (или *жироскопом*) называется симметричное абсолютно твердое тело вращения, быстро вращающееся вокруг своей оси материальной симметрии (фиг. 109).

Если угловая скорость собственного вращения ω_1 много больше угловой скорости ω_2 оси гироскопа, то принимается, что кинетический момент гироскопа G_0, называемый *собственным моментом*, направлен вдоль ω_1 и равен

$$G_0 = J_z\omega_1, \qquad (192)$$

где J_z — момент инерции относительно оси симметрии.



Фиг. 109. Гироскоп.

Сумма моментов всех сил инерции гироскопа относительно неподвижной точки называется *гироскопическим моментом*; в векторной форме он приближенно равен

$$\bar{M}_g = J_z \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2,$$

в алгебраической

$$M_g = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta. \qquad (193)$$

Действие гироскопического момента на связи называется *гироскопическим эффектом*.

Правило Жуковского—Грюэ. При повороте оси быстро вращающегося гироскопа возникает пара сил с моментом M_g, стремящаяся привести к совпадению вектор угловой скорости ω_1 собственного вращения с вектором ω_2 наложенного вращения.

Гироскопический момент M_g равен и противоположен моменту M_0 активных сил и реакций.

Вращение оси гироскопа с угловой скоростью ω_2 при $\theta = \text{const}$ называется *регулярной прецессией*. Момент внешних сил, обеспечивающий регулярную прецессию при любых ω_1 и ω_2, равен

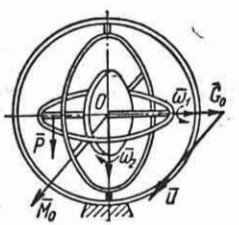
$$M_0 = J_z \omega_1 \omega_2 \left(1 + \frac{J_z - J_x}{J_z} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos\theta\right), \qquad (194)$$

где J_x — момент инерции гироскопа относительно оси, проходящей через неподвижную точку и перпендикулярную к оси гироскопа z.

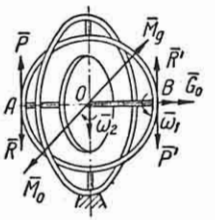
Эта точная формула совпадает с приближенной при $\theta = 90°$ и может быть заменена приближенной при $\omega_1 \gg \omega_2$.

Примеры:

1. К оси уравновешенного гироскопа с тремя степенями свободы (фиг. 110) в карданове подвесе приложена сила P на расстоянии h



Фиг. 110. Гироскоп с тремя степенями свободы.



Фиг. 111. Гироскоп с двумя степенями свободы.

от O (например, добавочный грузик). По теореме Резаля скорость конца G_0

$$u = G_0\omega_2 = J_z\omega_1\omega_2 = M_0 = Ph.$$

Отсюда угловая скорость прецессии $\omega_2 = \dfrac{Ph}{J_z\omega_1}$.

2. Оси гироскопа с двумя степенями свободы (фиг. 111) сообщено принужденное вращение с угловой скоростью ω_2; $OA = OB = h$.

Здесь M_0 есть момент реактивной пары ($\bar{R}$, $\bar{R}'$), приложенной к оси гироскопа, а M_g — момент пары давлений ($\bar{P}$, $\bar{P}'$), приложенной к подшипникам, стремящейся повернуть всю установку в согласии с правилом Жуковского — Грюэ. Очевидно,

$$P = R = \frac{J_z\omega_1\omega_2}{2h}.$$

Общий случай движения твердого тела

Составляются три уравнения движения центра инерции, три динамических и три кинематических уравнения Эйлера для движения тела относительно поступательно движущихся осей координат, имеющих начало в центре инерции.

ДИНАМИКА ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Тело переменной массы. *Телом переменной массы* называется тело, масса которого изменяется вследствие процесса присоединения к нему или отделения от него элементарных частиц, т. е. частицы, изменяющие массу, не возникают и не исчезают, а лишь вводятся в рассмотрение или исключаются из него ([3], [10], [16]).

Теорема количеств движения. Производная по времени от главного вектора количеств движения тела переменной массы, вычисленная в предположении постоянства масс, равна сумме главного вектора внешних сил и главного вектора реактивных сил:

$$\frac{d^*\bar{K}}{dt} = \bar{R} + \bar{R}^{реакт}, \qquad (195)$$

где

$$\frac{d^*\bar{K}}{dt} = \sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{d\bar{K}}{dt} - \sum \frac{dm_i}{dt}\bar{v}_i;$$

$$\bar{R}^{реакт} = \sum \dot{m}_i (\bar{u}_i - \bar{v}_i); \qquad (196)$$

$\bar{v}_i$ — абсолютная скорость точки массы $m_i(t)$; $\bar{u}_i$ — абсолютная скорость присоединяющейся ($dm_i > 0$) или отделяющейся ($dm_i < 0$) массы.

В координатной форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^*K_x}{dt} &= R_x + R_x^{реакт};\\ \frac{d^*K_y}{dt} &= R_y + R_y^{реакт};\\ \frac{d^*K_z}{dt} &= R_z + R_z^{реакт}.\end{aligned}\right\} \quad (197)$$

Теорема о движении центра инерции. Точка тела переменной массы, совпадающая в данный момент с его центром инерции, имеет ускорение, какое имела бы материальная точка, обладающая массой тела в рассматриваемый момент, под действием всех внешних и реактивных сил:

$$M(t)\bar{a}_c^* = \bar{R} + \bar{R}^{реакт}. \quad (198)$$

Здесь $\bar{a}_c^*$ есть ускорение точки тела, совпадающей с центром инерции, иначе говоря, ускорение центра инерции тела при постоянной его массе, равной массе в данный момент (т. е. без учета перемещения центра инерции внутри тела вследствие изменения массы)

$$\bar{a}_c^* = \frac{d^*\bar{v}_c^*}{dt},$$

где $\bar{v}_c^*$ есть скорость центра инерции при постоянной массе, причем

$$M(t)\,\bar{v}_c^* = \bar{K},$$

где $\bar{K}$ есть главный вектор количеств движения тела в данный момент времени без учета присоединения или отделения частиц.

Уравнения движения центра инерции в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned}Ma_{cx}^* &= R_x + R_x^{реакт};\\ Ma_{cy}^* &= R_y + R_y^{реакт};\\ Ma_{cz}^* &= R_z + R_z^{реакт},\end{aligned}\right\} \quad (199)$$

где $M = M(t)$.

Теорема моментов количеств движения. Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра (неподвижного или же относительно центра зафиксированных масс), вычисленная в предположении постоянства масс, равна сумме главного момента внешних сил и главного момента реактивных сил относительно того же центра:

$$\frac{d^*\bar{G}_0}{dt} = \bar{L}_0 + \bar{L}_0^{реакт}, \quad (200)$$

где

$$\frac{d^*\bar{G}_0}{dt} = \sum m_i\left(\bar{r}_i \times \frac{d\bar{v}_i}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d\bar{G}_0}{dt} - \sum \frac{dm_i}{dt}(\bar{r}_i \times \bar{v}_i);$$

$$\bar{L}_0^{реакт} = \sum \overline{mom}_0\{\dot{m}_i(\bar{u}_i - \bar{v}_i)\} =$$

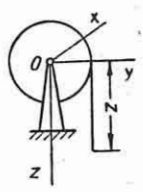
$$= \sum\{\bar{r}_i \times \dot{m}_i(\bar{u}_i - \bar{v}_i)\}; \quad (201)$$

$\bar{v}_i$ — абсолютная скорость точки массы $m_i(t)$; $\bar{u}_i$ — абсолютная скорость присоединяющейся ($dm_i > 0$) или отделяющейся ($dm_i < 0$) массы.

В координатной форме:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^*G_x}{dt} &= L_x + L_x^{реакт};\\ \frac{d^*G_y}{dt} &= L_y + L_y^{реакт};\\ \frac{d^*G_z}{dt} &= L_z + L_z^{реакт}.\end{aligned}\right\} \quad (202)$$

Пример. На барабан, имеющий горизонтальную ось, намотан трос длиной l и весом p на единицу длины. Радиус барабана r, его момент инерции J_0. Пренебрегая сопротивлениями, определить скорость троса в тот момент, когда он весь сойдет с барабана (фиг. 112).



Фиг. 112. Движение барабана под влиянием троса.

Пусть ось x направлена по оси барабана за чертеж, ось y—горизонтально вправо, а ось z — вертикально вниз. Разрезая трос в месте его схода с барабана и вводя силу натяжения N, рассматриваем отдельно барабан с убывающей массой и свешивающуюся часть троса с возрастающей массой. Тогда для барабана

$$\frac{d^*G_x}{dt} = L_x + L_x^{реакт};$$

для троса

$$\frac{d^*K_z}{dt} = R_z + R_z^{реакт}.$$

Так как скорость сходящих с барабана элементов троса равна окружной скорости барабана, то относительная скорость их равна нулю, а поэтому

главный момент реактивных сил масс, отделяющихся от барабана, и главный вектор реактивных сил масс, присоединяющихся к свешивающейся части троса, равны нулю, т. е.

$$L_x^{реакт} = 0; \qquad R_x^{реакт} = 0.$$

Далее:

$$L_x = Nr; \quad R_z = pz - N;$$

$$G_x = J_x\omega = \left[J_0 + \frac{p}{g}(l-z)\,r^2\right]\omega;$$

$$K_z = \frac{p}{g}\,zv_z;$$

$$\frac{d^*G_x}{dt} = \left[J_0 + \frac{p}{g}(l-z)\,r^2\right]\frac{d\omega}{dt};$$

$$\frac{d^*K_z}{dt} = \frac{p}{g}\,z\,\frac{dv_z}{dt}.$$

Подставляя в исходные уравнения и принимая во внимание, что $v_z = \dot{z} = \omega r$, имеем

$$\left[J_0 + \frac{p}{g}(l-z)\,r^2\right]\frac{\ddot{z}}{r} = Nr;$$

$$\frac{p}{g}\,z\,\ddot{z} = pz - N.$$

Исключаем N:

$$(J_0 g + plr^2)\,\ddot{z} = pgr^2 z.$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{pgr^2}{J_0 g + plr^2}.$$

Тогда

$$\ddot{z} = k^2 z,$$

или

$$v_z\frac{dv_z}{dz} = k^2 z.$$

Так как здесь

$$v = v_z,$$

то, интегрируя, имеем

$$v^2 = k^2 z^2 + C.$$

При $t = 0$, $z = l_0$, $v = 0$, т. е. $C = -k^2 l_0^2$. В момент схода $z = l$. Окончательно

$$v = k\sqrt{l^2 - l_0^2}.$$

Теорема кинетической энергии. Дифференциал кинетической энергии тела переменной массы равен сумме элементарных работ всех внешних, внутренних и реактивных сил, приложенных к данному телу, и кинетической энергии присоединяющихся ($dm_i > 0$) или отделяющихся ($dm_i < 0$) масс за соответствующий элементарный промежуток времени, обусловленный их переносным движением:

$$dT = d\sum\frac{m_i v_i^2}{2} =$$

$$= \sum(d'A^{внеш} + d'A^{внут} +$$

$$+ d'A^{реакт}) + \frac{1}{2}\sum dm_i v_i^2, \quad (203)$$

где штрихи показывают, что соответствующие элементарные величины вообще не являются дифференциалами, а

$$d'A^{реакт} = \frac{dm_i}{dt}(\bar{u}_i - \bar{v}_i)\,d\bar{r}_i =$$

$$= \dot{m}_i\{(u_{ix} - v_{ix})\,dx_i +$$

$$+ (u_{iy} - v_{iy})\,dy_i + (u_{iz} - v_{iz})\,dz_i\}, \quad (204)$$

причем $\bar{u}_i$ — абсолютная скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц; $\bar{v}_i$ — абсолютная скорость частиц, остающихся связанными с телом.

Если ввести дифференциал кинетической энергии в предположении неизменяемости массы за данный элементарный промежуток времени, то

$$d^*T = \sum(d'A^{внеш} + d'A^{внут} +$$

$$+ d'A^{реакт}), \quad (205)$$

где

$$d^*T = d\sum\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum dm_i v_i^2.$$

Уравнения движения твердого тела около неподвижной точки:

$$\left.\begin{aligned} J_x\frac{d^*\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\,\omega_y\omega_z &= \\ = M_x + M_x^{реакт};& \\ J_y\frac{d^*\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\,\omega_z\omega_x &= \\ = M_y + M_y^{реакт};& \\ J_z\frac{d^*\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\,\omega_x\omega_y &= \\ = M_z + M_z^{реакт}.& \end{aligned}\right\} \quad (206)$$

Эти уравнения относятся также к случаю движения свободного твердого тела около центра инерции.

Здесь x, y, z — главные оси инерции в неподвижной точке (или в центре инерции), вообще непрерывно меняющие свое положение в теле вследствие присоединения или отделения масс. Производные от ω_x, ω_y, ω_z вычислены в предположении неизменного положения осей координат в теле соответственно распределению масс в данный момент времени; J_x, J_y, J_z — мгновенные значения главных моментов инерции относительно этих осей; M_x, M_y, M_z — главные моменты приложенных к телу сил (вращающие моменты); $M_x^{реакт}$, $M_y^{реакт}$, $M_z^{реакт}$ — главные моменты реактивных сил.

УДАР

Основные положения. *Ударом* называется явление, происходящее в механической системе, характеризуемое резким изменением скоростей ее точек за весьма малый промежуток времени и обусловленное кратковременным действием весьма больших сил. Этими силами, называемыми *мгновенными*, могут быть как силы активные, так и реакции мгновенно налагаемых связей. В последнем случае удар называется *неупругим*, если наложенные связи сохраняются при дальнейшем движении системы; удар называется *упругим* (вполне или не вполне), если за мгновенным наложением связей следует мгновенное снятие связей. Действие мгновенной силы $\overline{P}$ измеряется ее импульсом:

$$\overline{I} = \int_0^{\tau} \overline{P}\, dt \qquad (207)$$

или в проекциях

$$I_x = \int_0^{\tau} X\, dt;\ I_y = \int_0^{\tau} Y\, dt;$$

$$I_z = \int_0^{\tau} Z\, dt, \qquad (208)$$

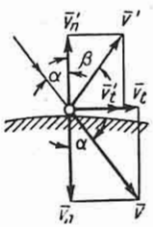
где X, Y, Z — проекции силы $\overline{P}$ на оси координат; τ — время удара. Импульс $\overline{I}$ называется *ударным импульсом* или просто *ударом*. Импульсами *конечных* сил (неударных) при ударе пренебрегают.

Удар точки о поверхность. *Скорость падения* (до удара) $\overline{v}$ и *скорость отражения* $\overline{v}'$ (после удара) разлагаются на нормальные и тангенциальные составляющие:

$$v_n = v\cos\alpha;\ v_t = v\sin\alpha;$$

$$v_n' = v'\cos\beta;\ v_t' = v'\sin\beta,$$

где α и β — углы падения и отражения (фиг. 113).



Фиг. 113. Удар точки о поверхность.

Для проекций скоростей имеют место соотношения [16]

$$\frac{|v_n'|}{|v_n|} = k;$$

$$\frac{v_t'}{v_t} = 1 - \lambda, \qquad (209)$$

где k — *коэффициент восстановления*; λ — *коэффициент мгновенного трения*. Эти физические константы определяются экспериментально для каждой пары соударяющихся тел (здесь — частица и поверхность). Предельные случаи:

$k = 0$ — тела абсолютно неупруги;
$k = 1$ » » упруги;
$\lambda = 0$ » » гладки;
$\lambda = 1$ » » шероховаты.

Вообще $0 < k < 1$, $0 < \lambda < 1$; при этом по большей части полагают $\lambda = 0$. В общем случае

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = \frac{k}{1-\lambda}.$$

Пример. Шарик падает с высоты h_0 на горизонтальную плиту, от которой отражается, достигая высоты h.

Здесь $v_t' = v_t = 0$.

Коэффициент восстановления

$$k = \left|\frac{v_n'}{v_n}\right| = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h}{h_0}}.$$

Общие теоремы динамики системы в применении к удару

Теорема количеств движения. Приращение главного вектора количеств движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов:

$$\Delta\overline{K} = \sum \overline{I}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta K_x = \sum I_{ix}; \\ \Delta K_y = \sum I_{iy}; \\ \Delta K_z = \sum I_{iz}. \end{array} \right. \qquad (210)$$

Теорема о движении центра инерции. Приращение количества движения центра инерции в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы, за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов:

$$M\Delta\bar{v}_c = \sum \bar{I}_i \left\{ \begin{array}{l} M\Delta v_{cx} = \sum I_{ix}; \\ M\Delta v_{cy} = \sum I_{iy}; \\ M\Delta v_{cz} = \sum I_{iz}. \end{array} \right\} \quad (211)$$

Теорема моментов количеств движения. Приращение кинетического момента системы относительно некоторой неподвижной точки за время удара равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов относительно этой точки:

$$\bar{\Delta}G_0 = \sum \overline{mom}_0(\bar{I}_i) \left\{ \begin{array}{c} \Delta G_x = \\ = \sum mom_x(\bar{I}_i); \\ \Delta G_y = \\ = \sum mom_y(\bar{I}_i); \\ \Delta G_z = \\ = \sum mom_z(\bar{I}_i). \end{array} \right\} \quad (212)$$

Принцип возможных перемещений для удара. Этот принцип выражается уравнением Остроградского

$$\sum [(I_{ix} - m_i\Delta v_{ix})\,\delta x_i + (I_{iy} - m_i\Delta v_{iy})\,\delta y_i + (I_{iz} - m_i\Delta v_{iz})\,\delta z_i] = 0 \quad (213)$$

и может быть высказан так: потерянные количества движения системы при ударе уравновешиваются ударными импульсами (на потери указывают знаки минус перед $m_i\Delta v_{ix}$ и т. д.).

Теорема о потере кинетической энергии (теорема Карно — Остроградского). При мгновенном наложении связей потерянная кинетическая энергия системы равна кинетической энергии потерянных скоростей:

$$T_0 - T = \sum \frac{m_i}{2} \left[(v_{ix} - v'_{ix})^2 + (v_{iy} - v'_{iy})^2 + (v_{iz} - v'_{iz})^2 \right]. \quad (214)$$

Удар двух тел

Определения. Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел при ударе, направленная параллельно относительной скорости их центров тяжести в начале удара, называется *линией удара*. Удар называется *центральным*, если линия удара проходит через центры тяжести тел, в противном случае — *эксцентричным* или *внецентренным*. Удар называется *прямым*, если линия удара перпендикулярна элементарной площадке соприкасания тел при ударе, в противном случае он называется *косым*.

Время удара τ делится на *два периода* ($\tau = \tau_1 + \tau_2$): 1-й период — от момента соприкасания до момента наибольшего сближения; 2-й период — от момента наибольшего сближения до момента разъединения.

Формулы для k и λ принимают вид

$$k = \frac{v'_{n2} - v'_{n1}}{v_{n1} - v_{n2}}; \quad 1 - \lambda = \frac{v'_{t2} - v'_{t1}}{v_{t2} - v_{t1}}, \quad (215)$$

т. е. сюда входят *относительные* скорости.

Прямой центральный удар. Пусть m_1 и m_2 — массы тел; v_1 и v_2 — скорости до удара (берутся со знаком плюс или минус в зависимости от их направления вдоль линии удара); v'_1 и v'_2 — скорости после удара; v — общая скорость тел в момент наибольшего сближения. Тогда

$$m_1v'_1 + m_2v'_2 = (m_1 + m_2)\,v = m_1v_1 + m_2v_2; \quad (216)$$

$$v'_2 - v'_1 = k\,(v_1 - v_2);$$

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$\left. \begin{array}{l} v'_1 = v + k\,(v_2 - v_1)\,\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}; \\ v'_2 = v + k\,(v_1 - v_2)\,\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}. \end{array} \right\} \quad (217)$$

Импульсы взаимодействия в 1-й и 2-й периоды удара (считая $v_1 > v_2$)

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{m_1m_2\,(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \\ I_2 = \dfrac{m_1m_2k\,(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \end{array} \right\} \quad (218)$$

Полный импульс за все время удара

$$I = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)(1 + k)}{m_1 + m_2}. \quad (219)$$

Потерянная кинетическая энергия

$$T_0 - T = \frac{1 - k}{1 + k} T^* =$$

$$= \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)}{2 (m_1 + m_2)}, \quad (220)$$

где T^* — кинетическая энергия потерянных скоростей;

$$T^* = \frac{m_1}{2}\left(v_1 - v_1'\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(v_2 - v_2'\right)^2 =$$

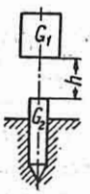
$$= \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 (1 + k)^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (221)$$

Частные случаи:

1) $k = 0$; $T_0 - T = T^*$;

2) $k = 1$; $T_0 - T = 0$.

Пример. Баба копра весом G_1 *кГ* падает с высоты h *см* на сваю весом G_2 *кГ* и забивает ее в грунт (фиг. 114). Найти среднее сопротивление R грунта, если за n ударов свая углубилась на s *см*. Удар можно считать неупругим ($k = 0$).



Фиг. 114. Забивка сваи.

Здесь $v_1 = \sqrt{2gH}$, $v_2 = 0$, $H = h + \frac{s}{2}$ — средняя высота падения бабы за n ударов;

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = G_1 H;$$

$$T_0 - T = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)} = \frac{G_1 G_2 H}{G_1 + G_2};$$

$$T = T_0 - (T_0 - T) = \frac{G_1^2 H}{G_1 + G_2}.$$

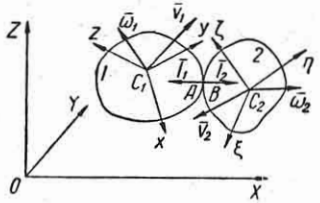
По теореме кинетической энергии

$$T = R \frac{s}{n},$$

откуда

$$R = \frac{n G_1^2}{(G_1 + G_2) s}\left(h + \frac{s}{2}\right).$$

Общий случай удара двух тел. Общие уравнения удара. Ось X неподвижной системы $OXYZ$ направлена параллельно нормали к общей элементарной площадке в точке соприкосновения тел при ударе (нормали удара); C_1, C_2 — центры масс 1-го и 2-го тел (фиг. 115); x, y, z — главные оси инерции 1-го тела; ξ, η, ζ — главные оси инерции 2-го тела; m_1, m_2 — массы тел; J_{1x}, J_{1y}, J_{1z}, $J_{2\xi}$, $J_{2\eta}$, $J_{2\zeta}$ — их моменты инерции; обозначения линейных и угловых скоростей — обычные, причем скорости после удара отмечены штрихом сверху. Скорости центров масс обозначены просто $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, а скорости точек A и B соударения тел $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$. 12 кинематических величин являются известными: v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, $v_{2\xi}$, $v_{2\eta}$, $v_{2\zeta}$, ω_{1x}, ω_{1y}, ω_{1z}, $\omega_{2\xi}$, $\omega_{2\eta}$, $\omega_{2\zeta}$, 12 — искомыми: v_{1x}', v_{1y}', v_{1z}', $v_{2\xi}'$, $v_{2\eta}'$, $v_{2\zeta}'$, ω_{1x}', ω_{1y}', ω_{1z}', $\omega_{2\xi}'$, $\omega_{2\eta}'$, $\omega_{2\zeta}'$.



Фиг. 115. Общий случай удара двух тел.

Скорости точек A и B могут быть по кинематическим формулам выражены соответственно через v_1, ω_1, v_2, ω_2 и координаты точек A и B.

В общем случае должно быть всего 12 уравнений, семь из которых не зависят от физической природы тел, именно [18]:

$$\left.\begin{aligned}
J_{1x}\left(\omega_{1x}' - \omega_{1x}\right) - m_1\left[y_A\left(v_{1z}' - v_{1z}\right) - z_A\left(v_{1y}' - v_{1y}\right)\right] &= 0;\\
J_{1y}\left(\omega_{1y}' - \omega_{1y}\right) - m_1\left[z_A\left(v_{1x}' - v_{1x}\right) - x_A\left(v_{1z}' - v_{1z}\right)\right] &= 0;\\
J_{1z}\left(\omega_{1z}' - \omega_{1z}\right) - m_1\left[x_A\left(v_{1y}' - v_{1y}\right) - y_A\left(v_{1x}' - v_{1x}\right)\right] &= 0;\\
J_{2\xi}\left(\omega_{2\xi}' - \omega_{2\xi}\right) - m_2\left[\eta_B\left(v_{2\zeta}' - v_{2\zeta}\right) - \zeta_B\left(v_{2\eta}' - v_{2\eta}\right)\right] &= 0;\\
J_{2\eta}\left(\omega_{2\eta}' - \omega_{2\eta}\right) - m_2\left[\zeta_B\left(v_{2\xi}' - v_{2\xi}\right) - \xi_B\left(v_{2\zeta}' - v_{2\zeta}\right)\right] &= 0;\\
J_{2\zeta}\left(\omega_{2\zeta}' - \omega_{2\zeta}\right) - m_2\left[\xi_B\left(v_{2\eta}' - v_{2\eta}\right) - \eta_B\left(v_{2\xi}' - v_{2\xi}\right)\right] &= 0;
\end{aligned}\right\} \quad (222)$$

$$m_1v'_{1X} + m_2v'_{2X} = m_1v_{1X} + m_2v_{2X}. \quad (223)$$

Восьмое уравнение зависит от коэффициента восстановления:

$$v'_{BX} - v'_{AX} = k(v_{AX} - v_{BX}). \quad (224)$$

В развернутой форме уравнение (224) имеет вид

$$\begin{aligned}&\left[v'_{2X} + \left(\omega'_\eta\zeta_B - \omega'_\zeta\eta_B\right)\cos(\xi, X) + \right.\\ &+ \left(\omega'_\zeta\xi_B - \omega'_\xi\zeta_B\right)\cos(\eta, X) +\\ &\left.+ \left(\omega'_\xi\eta_B - \omega'_\eta\xi_B\right)\cos(\zeta, X)\right] -\\ &- \left[v'_{1X} + \left(\omega'_y z_A - \omega'_z y_A\right)\cos(x, X) + \right.\\ &+ \left(\omega'_z x_A - \omega'_x z_A\right)\cos(y, X) +\\ &\left.+ \left(\omega'_x y_A - \omega'_y x_A\right)\cos(z, X)\right] =\\ &= k\{[v_{1X} + (\omega_y z_A - \omega_z y_A)\cos(x, X) +\\ &+ (\omega_z x_A - \omega_x z_A)\cos(y, X) +\\ &+ (\omega_x y_A - \omega_y x_A)\cos(z, X)] - [v_{2X} +\\ &+ (\omega_\eta\zeta_B - \omega_\zeta\eta_B)\cos(\xi, X) +\\ &+ (\omega_\zeta\xi_B - \omega_\xi\zeta_B)\cos(\eta, X) +\\ &+ (\omega_\xi\eta_B - \omega_\eta\xi_B)\cos(\zeta, X)]\}.\end{aligned}$$

Остальные четыре уравнения зависят от шероховатости тел.

Случай абсолютно гладких тел ($\lambda = 0$). Ударный импульс $\overline{I}_1 = -\overline{I}_2$ перпендикулярен плоскости YOZ:

$$\left.\begin{aligned}&v'_{1Y} - v_{1Y} = 0; \quad v'_{1Z} - v_{1Z} = 0;\\ &v'_{2Y} - v_{2Y} = 0; \quad v'_{2Z} - v_{2Z} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (225)$$

Случай абсолютно шероховатых тел ($\lambda = 1$). В месте соприкосновения тел скольжение отсутствует:

$$v'_{AY} = v'_{BY}; \quad v'_{AZ} = v'_{BZ}. \quad (226)$$

В развернутой форме:

$$\left.\begin{aligned}&v'_{1Y} + \left(\omega'_y z_A - \omega'_z y_A\right)\cos(x, Y) + \left(\omega'_z x_A - \omega'_x z_A\right)\cos(y, Y) +\\ &+ \left(\omega'_x y_A - \omega'_y x_A\right)\cos(z, Y) = v'_{2Y} + \left(\omega'_\eta\zeta_B - \omega'_\zeta\eta_B\right)\cos(\xi, Y) +\\ &+ \left(\omega'_\zeta\xi_B - \omega'_\xi\zeta_B\right)\cos(\eta, Y) + \left(\omega'_\xi\eta_B - \omega'_\eta\xi_B\right)\cos(\zeta, Y);\\ &v'_{1Z} + \left(\omega'_y z_A - \omega'_z y_A\right)\cos(x, Z) + \left(\omega'_z x_A - \omega'_x z_A\right)\cos(y, Z) +\\ &+ \left(\omega'_x y_A - \omega'_y x_A\right)\cos(z, Z) = v'_{2Z} + \left(\omega'_\eta\zeta_B - \omega'_\zeta\eta_B\right)\cos(\xi, Z) +\\ &+ \left(\omega'_\zeta\xi_B - \omega'_\xi\zeta_B\right)\cos(\eta, Z) + \left(\omega'_\xi\eta_B - \omega'_\eta\xi_B\right)\cos(\zeta, Z).\end{aligned}\right\} \quad (227)$$

Сюда добавляются еще два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&m_1v'_{1Y} + m_2v'_{2Y} = m_1v_{1Y} + m_2v_{2Y};\\ &m_1v'_{1Z} + m_2v'_{2Z} = m_1v_{1Z} + m_2v_{2Z}.\end{aligned}\right\} \quad (228)$$

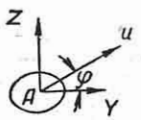
Промежуточный случай ($0 < \lambda < 1$). Последние два уравнения сохраняются; недостающие два уравнения находятся путем исключения нормального импульса I взаимодействия тел из системы:

$$m_1\left(v'_{1X} - v_{1X}\right) = -I;$$

$$m_1\left(v'_{1Y} - v_{1Y}\right) = -fI\cos\varphi;$$

$$m_1\left(v'_{1Z} - v_{1Z}\right) = -fI\sin\varphi,$$

где f—коэффициент трения скольжения тел в месте соударения; φ — угол между осью Y и осью u, по которой происходит скольжение поверхности 1-го тела по поверхности 2-го (фиг. 116).



Фиг. 116. Взаимное проскальзывание тел в месте контакта при ударе.

Уравнения для определения v'_{1Y} и v'_{1Z}:

$$\left.\begin{aligned}&v'_{1Y} - v_{1Y} = f\left(v'_{1X} - v_{1X}\right)\cos\varphi;\\ &v'_{1Z} - v_{1Z} = f\left(v'_{1X} - v_{1X}\right)\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (229)$$

Зная v'_{1Y} и v'_{1Z}, можно из уравнений (228) найти v'_{2Y} и v'_{2Z}.

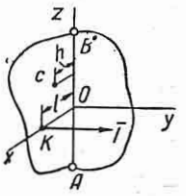
В частных случаях, с которыми обычно приходится иметь дело, число неизвестных бывает меньше 12, и тогда достаточно использовать только часть указанных уравнений, структура которых в этих практических случаях также оказывается более простой.

Действие удара на вращающееся твердое тело

Для твердого тела, вращающегося вокруг оси z и подвергающегося действию ударов, имеет место уравнение

$$J_z\Delta\omega = \sum mom_z(\overline{I}_i),$$

где $\Delta\omega = \omega' - \omega$ есть изменение угловой скорости за время τ действия импульсов I_1, I_2,... Ниже приводятся условия, при которых ось вращения AB тела (фиг. 117) не испытывает действия удара I, приложенного в точке K тела (ось z — ось вращения, ось x проходит через точку K):



Фиг. 117. Действие удара на вращающееся тело.

1) удар I должен быть направлен перпендикулярно оси вращения;

2) удар должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и центр тяжести c (следовательно, точки K и c должны лежать в одной плоскости с осью z);

3) ось вращения должна быть главной осью инерции в точке пересечения ее с плоскостью xOy, проходящей через $K (J_{zx} = J_{yz} = 0)$;

4) точки c и K должны лежать по одну сторону оси вращения, причем должно иметь место равенство

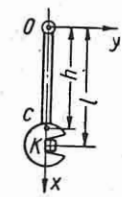
$$h \cdot l = i_z^2, \qquad (230)$$

где i_z — радиус инерции тела относительно оси z. Это — формула, определяющая приведенную длину l физического маятника. Точка K в этом случае называется *центром удара*.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии, перпендикулярную к оси вращения (например, плоскость xOy), то точки K и c лежат в этой плоскости.

Пример. Маятниковый копер Шарпи для испытания материалов ударом (фиг. 118) имеет плоскость симметрии (xOy). В таком случае центр удара K и центр тяжести c лежат на осевой линии маятника (ось Ox); при этом

$$l = \frac{i_z^2}{h}.$$



Фиг. 118. Маятниковый копер.

Легко видеть, что все четыре условия удовлетворены, и ось вращения (Oz) не испытывает действия удара.

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ

1. Ананов Г. Д., Метод ортогональных проекций в задачах механики, Гостехиздат, 1948.
2. Астафьев А. Ф., Инженерная справочная книга, т. 1, Машгиз, 1937.
3. Бутенин Н. В., Лазеев С. И., Попов Е. П., Курс теоретической механики, ч. I и II, ЛКВВИА, 1948—1950.
4. Волохов А. Н., Опытное определение моментов инерции, „Труды ЦАГИ", вып. 285, 1936.
5. Воронков И. М., Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1940.
6. Добровольский В. В., Теория механизмов, Машгиз, 1951.
7. Жуковский Н. Е., Полное собрание сочинений, лекции, вып. 3—6, НКАП СССР ГИОП, 1939.
8. Кирпичев В. Л., Основания графической статики, ГТТИ, 1933.
9. Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, Учпедгиз, 1949.
10. Космодемьянский А. А., Механика тела переменной массы, изд. ВВИА им. Жуковского, 1947.
11. Космодемьянский А. А., Очерки по истории теоретической механики в России, „Ученые записки МГУ", вып. 122, т. II, изд. МГУ, 1948.
12. Котельников А. П., Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и механике, „Ученые записки Казанского университета", Казань 1895.
13. Котельников А. П., Точки Бурместра, их свойства и построение, „Математический сборник", т. 34, вып. 3—4, 1927.
14. Котельников А. П., Заметки по графической динамике, „Труды Московского механико-машиностроительного института им. Баумана", вып. 29—30, 1937.
15. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А., Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, АН СССР, 1932.
16. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, ч. I и II, Гостехиздат, 1948.
17. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
18. Энциклопедический справочник, „Машиностроение", т. 1, кн. 2, Машгиз, 1947.
19. Мещерский И. В., Курс теоретической механики, ч. I и II, Гостехиздат, 1930.
20. Некрасов А. И., Курс теоретической механики, Гостехиздат, ч. I, 1950, ч. II, 1953.
21. Николаи Е. Л., Теоретическая механика, ч. I и II, Гостехиздат, 1950.
22. Обморшев А. Н., О видоизменении способа Риттера расчета ферм, „Труды Московского механико-машиностроительного института им. Баумана", вып. 31, 1935.
23. Обморшев А. Н., Вычисление опорных реакций вращающегося твердого тела, „Труды кафедры теоретической механики МВТУ им. Баумана", изд. МВТУ, 1949.
24. Остроградский М. В., Собр. соч., АН СССР, 1946.
25. Попов А. А., Новый метод интегрирования с помощью ортогональных фокусов, Гостехиздат, 1947.
26. Седов Л. И., Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1951.
27. Сена Л. А., Единицы измерения физических величин, Гостехиздат, 1949.
28. Смирнов Л. П., Кинематика механизмов и машин, Госиздат, 1926.
29. Справочник по технической механике под ред. акад. А. Н. Динника, Гостехиздат, 1949.
30. Суслов Г. К., Аналитическая механика, Гостехиздат, 1944.
31. Техническая энциклопедия, т. 13, Гостехиздат, 1941.
32. Уманский А. А., Пространственные системы, Стройиздат, 1948.

ГЛАВА XIX

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

СТРУКТУРА И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

Основные понятия

Деталь — отдельная неделимая часть машины, состоящая из монолитного материала или из нескольких кусков, соединенных сваркой или другими подобными способами.

Звено — одна или несколько неподвижно скрепленных деталей. Твердые звенья принимаются за абсолютно жесткие по отношению к любым деформациям, гибкие звенья — за абсолютно жесткие по отношению к некоторым деформациям (нерастяжимые нити и т. п.).

Кинематическая пара — подвижное соединение двух твердых звеньев, накладывающее ограничения на их относительное движение.

Элемент кинематической пары — поверхность или совокупность поверхностей каждого звена, входящих в соприкосновение при образовании кинематической пары. Таким образом, кинематическая пара имеет два элемента.

Кинематическая цепь — ряд звеньев, связанных между собой кинематическими парами.

Механизм — кинематическая цепь с одним неподвижно закрепленным звеном (стойкой), в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) все остальные звенья (ведомые) получают вполне определенные движения. *Ведущим* звеном называется звено, закон движения которого задан. Не следует смешивать ведущее звено с *движущим*, к которому прикладывается движущая механизм сила. Например, у поршневых двигателя и компрессора ведущими являются кривошипы, а их движущие звенья — разные: у двигателя — поршень, у компрессора — тот же кривошип.

Структура и классификация кинематических пар

Степени свободы и условия связи. Отдельно взятое звено (твердое тело) имеет в пространстве шесть степеней свободы. Если два звена связаны между собой кинематической парой, то на движение одного из них относительно другого налагаются ограничения, выражающиеся *условиями связи* — зависимостями между значениями координат относительного положения звеньев или равенством некоторых координат постоянным величинам. Оставшееся в относительном движении звеньев число степеней свободы

$$W = 6 - S,$$

где S — число условий связи кинематической пары, для которой оно является основной структурной характеристикой.

По числу условий связи кинематические пары разделяются на пять классов (табл. 1). При $S = 6$ кинематическая пара вырождается в неподвижное соединение [1].

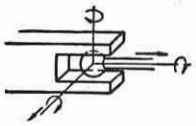
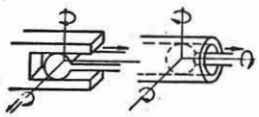
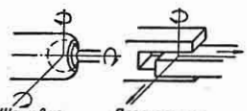
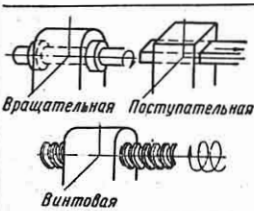
По характеру соприкосновения элементов кинематические пары разделяются на низшие, высшие и смешанные. Низшие пары имеют соприкосновение элементов по поверхностям, высшие — по линиям или в точках.

Низшие пары применяются в практике шести типов: шаровая и плоскостная (III класс), цилиндрическая (IV класс), вращательная, поступательная и винтовая (V класс).

Во всех низших парах, кроме винтовой, условия связи исключают возможность определенного числа движений относительно соответственно выбранных осей прямоугольной системы координат, в винтовой же паре четыре условия связи исключают возможность четырех из указанных движений, а пятое условие

Таблица 1

Классификация кинематических пар

Низшие пары и примеры высших пар (стрелками показаны возможные движения)	
	Класс I[1] Число условий связи 1. Число степеней свободы 5
	Класс II[2] Число условий связи 2. Число степеней свободы 4
	Класс III[3] Число условий связи 3. Число степеней свободы 3
	Класс IV[3] Число условий связи 4. Число степеней свободы 2
	Класс V[3] Число условий связи 5. Число степеней свободы 1

[1]) Возможны только высшие пары с точечным контактом.
[2]) Возможны только высшие пары.
[3]) Возможны как высшие, так и низшие пары (показаны все типы низших пар).

устанавливает зависимость между оставшимися двумя движениями (h_x и φ_x):

$$h_x = \frac{t}{2\pi}\varphi_x,$$

где h_x — линейное перемещение звена вдоль оси x; φ_x — угловое перемещение звена вокруг оси x в радианах; t — постоянный шаг резьбы, равный перемещению звена вдоль оси x за один оборот.

Элементы шаровой, плоскостной и цилиндрической пары могут состоять соответственно из концентрических шаровых поверхностей, параллельных плоскостей, соосно расположенных круглых цилиндрических поверхностей. В шаровых и цилиндрических парах каждый элемент обычно состоит из одной поверхности, в плоскостной паре — из одной или двух поверхностей.

Элементы вращательной пары могут состоять из любых поверхностей вращения, но практическое применение находят простые по форме и легко обрабатываемые частные виды этих поверхностей — плоскости, цилиндрические, конические и шаровые поверхности.

На расположение поверхностей в элементе вращательной пары накладываются следующие условия: плоскости должны быть перпендикулярны геометрической оси элемента, оси цилиндрических и конических поверхностей должны совпадать с осью элемента, а центры шаровых поверхностей должны лежать на этой оси.

Элементы поступательной пары образуются из любых цилиндрических поверхностей. Применение имеют простейшие по форме частные виды этих поверхностей — плоскости и круглые цилиндрические поверхности, а также некоторые частные виды некруглых цилиндрических поверхностей — эвольвентного профиля и др.

На расположение поверхностей в элементе поступательной пары накладывается следующее условие: образующие всех цилиндрических поверхностей и все плоскости должны быть параллельны направлению относительного движения звеньев, связываемых парой.

Элементы винтовых пар получаются из соосно расположенных винтовых поверхностей одинакового шага и направления. Применение в элементах винтовой пары наряду с винтовыми поверхностями также круглой цилиндрической поверхности облегчает получение точного центрирования и направления звеньев.

Высшие пары возможны всех пяти классов и неограниченного числа типов — со всевозможными сочетаниями условий связи.

Особенно большое распространение на практике получили высшие пары: а) кулачкового типа, позволяющие осу-

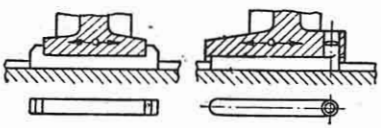
ществлять движение ведомого звена, вообще говоря, по любому наперед заданному закону; б) зубчатые, обычно используемые для передачи вращательного движения или преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное с постоянными отношениями скоростей.

Кинематические пары могут быть *геометрически замкнутыми* или *геометрически незамкнутыми*. В первом случае постоянное соприкосновение элементов пары обеспечивается их формой (все пары в табл. 1), во втором — какой-либо силой — веса, упругости пружин, магнитного притяжения (силовое замыкание) — или ограничениями, налагаемыми на относительное движение связываемых звеньев другими звеньями механизма (замыкание через кинематическую цепь).

Примеры выполнения кинематических пар

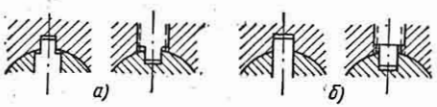
Подвижные скользящие соединения вала с сопряженными деталями выполняются при помощи шпонок или с применением некруглых профилей.

Шпонка прикрепляется винтами к охватываемой или охватывающей детали или удерживается от осевого смещения посредством выступов или хвоста (фиг. 1). Иногда шпонка выполняется



Фиг. 1. Примеры крепления скользящих шпонок.

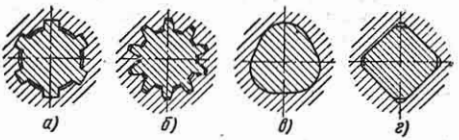
за одно целое с валом. При малых нагрузках шпонка может быть заменена штифтом или винтом с лысками на конце



Фиг. 2. Применение штифтов и винтов в подвижных соединениях.

(фиг. 2, *а*), при очень малых нагрузках — штифтом или винтом без лысок (фиг. 2, *б*).

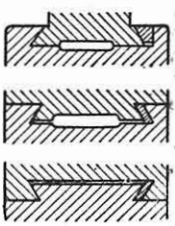
Характерными примерами некруглых профилей подвижных соединений являются прямоугольный (прямобочный) шлицевый (фиг. 3, *а*), эвольвентный шлицевый (фиг. 3, *б*), фасонный (фиг. 3, *в*) и профиль в виде правильного многоугольника (фиг. 3, *г*). Профили по фиг. 3, *а* выполняются с числом



Фиг. 3. Примеры некруглых профилей для подвижных соединений.

шлицев (зубьев) от 3 до 20. Наибольшее распространение имеет шестишлицевый профиль. Для лучшего центрирования обычно предусматривается касание не только по боковым граням шлицев, но и по наружному или внутреннему диаметру вала. Сопряженные поверхности соединения по фиг. 3, *в* легко обрабатываются на обеих деталях шлифовальным кругом. Однако, несмотря на простоту обработки, указанное соединение не нашло широкого применения вследствие некоторых эксплуатационных недостатков.

Направляющие для прямолинейного движения ползунов и салазок особенно широко применяются в металлорежущих станках, прессах и других рабочих машинах.



Фиг. 4. Направляющие в форме ласточкина хвоста.

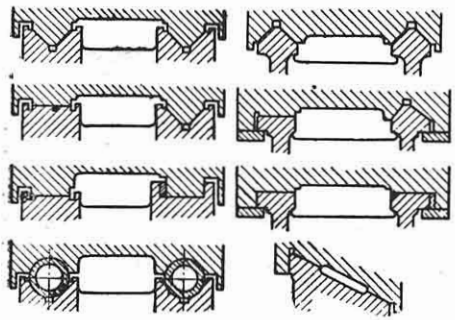
Направляющие в форме ласточкина хвоста (фиг. 4) образуют геометрически замкнутую пару. Их преимущества: малая высота, малое число клиньев для подтягивания. Недостаток — невыгодное восприятие отрывающих усилий. Направляющие по первому варианту фиг. 4 хорошо удерживают смазку и пригодны для бо́льших скоростей, чем направляющие по двум другим вариантам той же фигуры.

V-образные, прямоугольные и круглые направляющие (фиг. 5), имеющие на нижней детали углубления в виде желобов, хорошо удерживают смазку, но подвержены загрязнению.

Применяются для больших скоростей при наличии хорошей защиты от стружки.

При широких столах применяется сочетание из одной V-образной и двух плоских направляющих. Круглые направляющие позволяют удобно осуществить выгодную фрикционную пару: закаленная сталь — чугун.

Направляющие, имеющие на нижней детали выступы (фиг. 6) с горизонтальными и особенно с вертикальными и наклонными плоскостями, не препятствуют свободному удалению стружки



Фиг. 5. Профили направляющих, хорошо удерживающих смазку.

Фиг. 6. Профили направляющих, не препятствующих свободному удалению стружки и грязи.

и грязи, но плохо удерживают смазку. Поэтому эти направляющие применяются при малых скоростях и таком выполнении пары, при котором поверхности скольжения на нижней детали обнажаются во время работы.

Удерживание ползуна или стола от горизонтальных смещений одной направляющей (принцип узкого направления) дает более надежное направление и почти не препятствует тепловым деформациям звеньев.

Для получения геометрически замкнутых пар у направляющих предусматривают планки (фиг. 6).

Регулирование зазора в направляющих осуществляется:

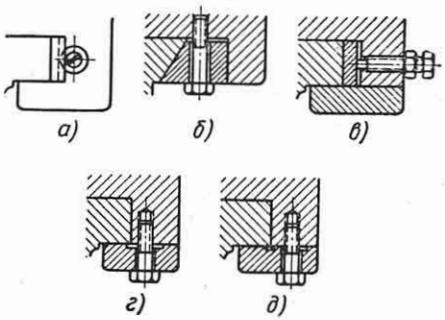
а) клиньями с продольным (фиг. 7, *а*) или поперечным (фиг. 7, *б*) перемещением;

б) закладными поджимными планками (фиг. 7, *в*);

в) накладными поджимными (фиг. 7, *г*) или пригоняемыми (фиг. 7, *д*) планками.

Направляющие в виде двух, трех или четырех круглых стержней применяются при нагрузках, не вызывающих сильного изгиба стержней.

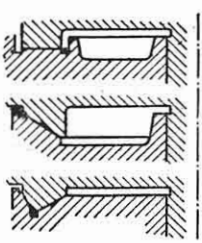
Сочетание одной круглой направляющей в виде стержня и одной плоской обеспечивает возможность временного использования пары в качестве вращательной или цилиндрической.



Фиг. 7. Типы регулировочных клиньев и планок.

Направляющие кругового движения применяются для обеспечения жесткости круглых горизонтальных столов, главным образом в металлорежущих станках. Такие направляющие обычно выполняют в виде желобообразного углубления на нижней детали, что обеспечивает хорошее удерживание смазки. Защита направляющих кругового движения от загрязнения трудности не представляет.

Для кругового движения применяются V-образная, коническая или плоская направляющие в сочетании с центрирующим пальцем или осью (фиг. 8), а для столов большого диаметра (несколько метров) — большей частью сочетание V-образной направляющей с центрирующей осью; для кольцевых столов обычно сочетание V-образной и плоской направляющей без оси.



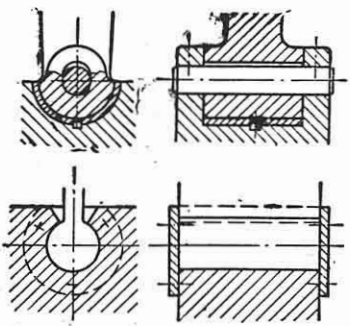
Фиг. 8. Профили направляющих для кругового движения.

Наиболее простой в изготовлении является плоская направляющая, несколько сложнее — коническая, значительно сложнее — V-образная. Плоская направляющая плохо воспринимает радиальные нагрузки и применяется при их небольшой величине; плоская и коническая допускают свободные тепловые

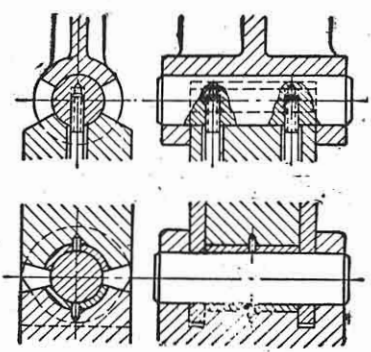
деформации стола; V-образная хорошо воспринимает осевые и радиальные усилия и отчасти опрокидывающие моменты; применяется в ответственных случаях.

Направляющие скольжения сильно нагруженных и тяжелых столов, вращающихся под нагрузкой, частично разгружаются от вертикальной силы регулируемым по высоте подпятником качения или посредством гидравлического поджима. Направляющие скольжения делительных столов, поворачивающихся без нагрузки, разгружаются полностью на время поворота поднимающимся подпятником качения или частично — гидравлическим поджимом.

Пара качательного движения часто служит для передачи больших усилий



Фиг. 9. Пары качательного движения для передачи больших усилий в одном направлении.

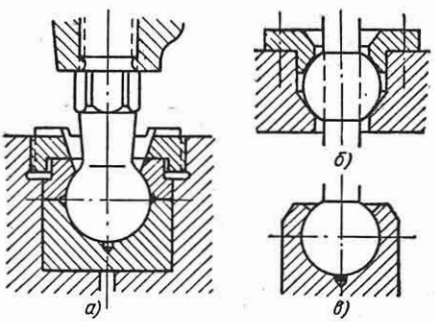


Фиг. 10. Пары качательного движения для передачи больших усилий в одном направлении.

в одном направлении и малых — в другом. Такие требования предъявляются, например, к шарнирам рычажных и кривошипно-шатунных механизмов прессов и поршневых машин.

Конструкция пар должна обеспечить достаточно большую площадь опорных поверхностей и отсутствие или по крайней мере уменьшение изгибания оси шарнира при передаче усилия в одном направлении. Это обычно достигается использованием для передачи усилия внешней цилиндрической поверхности одного звена (фиг. 9) или почти всей длины оси шарнира (фиг. 10).

Шаровые пары, применяемые, например, в соединении шатуна с ползуном кривошипного пресса (фиг. 11, *а*), по-

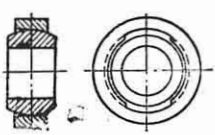


Фиг. 11. Примеры исполнения шаровых пар.

зволяют просто решать вопрос регулирования длины шатуна и дают возможность иметь меньшее, чем при вращательной паре, число пассивных связей в механизмах.

В малонагруженных парах при достаточно твердых поверхностях охватываемого элемента охватывающий элемент может быть изготовлен с коническими поверхностями, на которых пояски шаровой поверхности образуются в результате смятия (фиг. 11, *б*). Геометрическое замыкание неответственных шаровых пар может быть достигнуто путем завальцовки (фиг. 11, *в*).

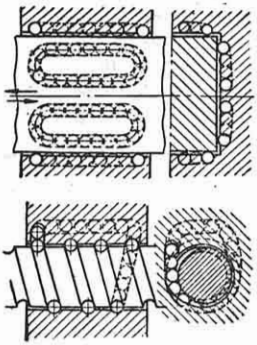
Отдельные шаровые пары скольжения (шарнирные подшипники, фиг. 12) представляют собой два кольца с особыми выемками, позволяющими вводить их одно в другое при нерабочем относительном положении.



Фиг. 12. Шаровой шарнирный подшипник.

Кинематические пары (условные) с промежуточными телами качения характеризуются малыми потерями на трение и малым износом. Между элементами пары закладываются шарики или ролики.

Примерами вращательных и шаровых пар являются радиальные и сферические подшипники качения. Примеры поступательных и винтовых пар представлены на фиг. 13.



Фиг. 13. Примеры пар качения.

Элементы поступательной пары имеют продольные канавки для тел качения или выполняются в форме направляющих (см. выше). Тела качения движутся свободно по рабочим и возвратным канавкам, помещаются в поступательно движущийся сепаратор (при небольшом ходе) или включаются в роликовую цепь типа Галля (при большом ходе).

В винтовой паре возвратная канавка выполняется в гайке.

При свободном движении тел качения для уменьшения потерь на трение рекомендуется чередовать рабочие шарики или ролики с промежуточными, имеющими несколько меньший диаметр.

Кинематические пары (условные) с промежуточными деформируемыми телами характеризуются отсутствием относительных смещений звеньев за счет зазоров.

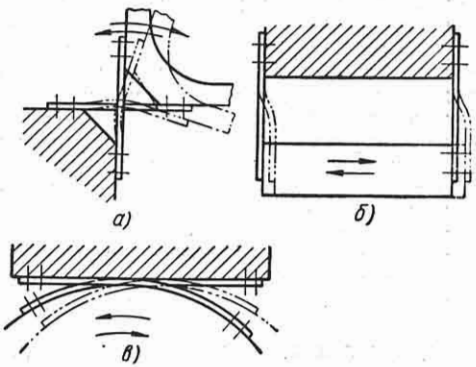
Вращательная пара для малых угловых смещений (фиг. 14, *а*) применяется в измерительных приборах типа миниметров и др.

Особенности—отсутствие мертвого хода, легкость поворота подвижного звена.

Поступательная пара для очень малых относительных перемещений звеньев (фиг. 14, *б*) применяется в приборах, например в индуктивном датчике.

Особенности — простота конструкции, отсутствие мертвого хода и легкость перемещения подвижного звена из-за отсутствия сил трения.

Пара обкатывания (фиг. 14, *в*) широко применяется в приборах и станках для получения точного качения одного звена по другому без проскальзывания и мертвого хода.



Фиг. 14. Примеры пар с упруго деформируемыми деталями.

Структура механизмов

Структура механизма определяется числом звеньев, числом и типами кинематических пар, порядком соединения звеньев между собой посредством пар, общими условиями на взаимное расположение кинематических пар в механизме.

Число степеней свободы W механизма равно числу независимо изменяемых координат положений ведущих звеньев или, иначе, числу обобщенных координат, определяющих положение всех звеньев механизма. Структурный анализ и синтез ставят своей основной задачей определение W механизма или составление структурной схемы механизма с заданным W.

Структурная формула определяет W в зависимости от числа подвижных звеньев (n) и числа пар различных классов (p_1, p_2 . . .).

Структурная схема определяет число звеньев, порядок их соединения в механизме и типы применяемых для этого кинематических пар; размеры звеньев в структурной схеме не учитываются.

Кинематические пары в механизме накладывают определенные условия связи, стесняющие движения звеньев. Каждая связь (точнее, условие связи) может быть выражена одним уравнением, которое устанавливает какую-либо зависимость между координатами, характеризующими положения звеньев.

Если уравнение является следствием уже имеющихся, то новая связь никакого дополнительного условия на движение звеньев не накладывает, на число степеней свободы механизма не влияет и поэтому называется *пассивной*.

Классификация механизмов

Структурная классификация, основанная на учете общих условий связи, разработана советскими учеными [10].

Общие условия связи исключают возможность некоторых движений одинаково для всех звеньев механизма. Некоторые из общих условий связи могут быть пассивными.

Индивидуальными условиями связи называются такие, которые не удовлетворяют определению общих. Они также могут быть активными и пассивными.

Влияние индивидуальных условий связи на W механизма учитывается структурной формулой, определяющей W механизма как разность между числом степеней свободы, оставшимся после наложения на звенья общих условий связи, и числом индивидуальных условий связи.

Структурная формула для общего случая пространственных механизмов:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1; \quad (1)$$

для пространственных механизмов с поступательным движением звеньев, для общего случая плоских механизмов и для сферических механизмов:

$$W = 3n - 2p_2 - p_1; \quad (2)$$

для плоских механизмов с поступательным движением звеньев и для винтовых механизмов с соосным расположением пар:

$$W = 2n - p_1. \quad (3)$$

В приведенных формулах: n — число подвижных звеньев (стойка не учитывается); p_1, p_2, . . ., p_5 — число кинематических пар, налагающих соответственно одно, два, . . ., пять индивидуальных условий связи (в формуле для общего случая пространственных механизмов индекс при p соответствует классу кинематической пары).

Индивидуальные пассивные условия связи разделяются на *структурные*, пассивный характер которых определяется структурными признаками механизма, и *размерные*, которые могут стать пассивными только при определенных соотношениях между основными размерами механизма. Структурные пассивные связи учитываются дополнительным членом структурной формулы.

Например, в формуле для плоских механизмов с одними низшими парами

$$W = 3n - 2p_2 + \gamma,$$

где γ — число структурных пассивных связей или число в схеме замкнутых контуров из звеньев, связанных одними поступательными парами.

Размерные пассивные связи могут быть обнаружены только по кинематической схеме механизма, учитывающей основные размеры звеньев.

Наибольшее распространение в современном машиностроении имеют плоские механизмы.

Пространственные механизмы применяются главным образом в машинах со сложным движением рабочих органов, например в сельскохозяйственных машинах.

Основоположником теории пространственных механизмов является Н. И. Мерцалов.

КИНЕМАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Кинематическая схема

Кинематическая схема механизма, кроме структурных характеристик, учитывает его основные размеры, т. е. размеры звеньев, влияющие на кинематику механизма (радиус кривошипа и длина шатуна в центральном кривошипно-шатунном механизме и т. п.).

В схемах, служащих для пояснения устройства механизма или машины (инструкции по эксплуатации, паспорта машин), не всегда соблюдается правильное соотношение между основными размерами; в такие схемы обычно включаются некоторые сведения по устройству машины (типы подшипников, электродвигатели и т. п.).

Условные обозначения для кинематических схем механизмов и машин предусмотрены ГОСТ 3462-52.

Задачи и методы кинематического анализа механизмов

В задачу кинематического анализа входит:

1) определение положений всех звеньев механизма по заданным положениям ведущих звеньев;

2) определение линейных скоростей и ускорений характерных точек механизма, а также угловых скоростей и ускорений звеньев.

Результаты кинематического анализа: а) позволяют судить о степени соответствия кинематических свойств механизма требуемым; б) используются при динамическом анализе механизма.

Кинематическое исследование механизма может быть произведено: а) аналитически; б) графически или графоаналитически по кинематической схеме; в) экспериментально по имеющемуся образцу или специально изготовленной модели.

Аналитический способ, не требуя точно вычерченной кинематической схемы, может обеспечить любую наперед заданную степень точности. Его удобно применять для исследования движения ведомых звеньев в механизмах распространенных схем, для которых имеются готовые формулы. Для сложных механизмов аналитический способ мало пригоден.

Графический способ дает меньшую точность результата, но характеризуется наглядностью.

Планы скоростей и ускорений (см. стр. 455) графически дают векторы скоростей и ускорений характерных точек *всех* звеньев в одном или нескольких положениях механизма.

Кинематические диаграммы $s = f_1(t)$, $v = f_2(t)$ и $a = f_3(t)$ (см. стр. 515) графически дают законы изменения пройденного пути s, скорости v и ускорения a в движении *одного* звена непрерывно за весь цикл работы механизма.

Кинематические диаграммы находят применение главным образом для звеньев с вращательным или прямолинейно-поступательным движением: а) при анализе и синтезе кулачковых механизмов, б) реже при анализе механизмов с низшими парами, например, механизма качающейся кулисы поперечно-строгального станка.

Диаграммы могут быть построены на основании аналитических расчетов или по изображениям механизма в последовательных положениях и по планам скоростей и ускорений.

Более простым, но значительно менее точным является построение по одной имеющейся диаграмме двух других способами графического дифференцирования и интегрирования (см. стр. 516). При анализе обычно легко получить диаграмму $s = f_1(t)$ элементарными построениями на чертеже механизма; тогда две остальные диаграммы строятся путем двукратного графического дифференцирования. При синтезе кулачковых механизмов часто задается закон изменения ускорения $a = f_8(t)$, двукратным графическим интегрированием которого получают диаграммы $v = f_2(t)$ и $s = f_1(t)$. Последняя используется для профилирования кулачка.

Для кулачковых механизмов применяется также построение диаграммы пути или ускорения на основании аналитических подсчетов с последующим ее графическим интегрированием или дифференцированием.

Более точные результаты получаются, если вместо графического интегрирования и дифференцирования пользоваться способами численного интегрирования и дифференцирования.

Экспериментальные методы исследования

Исследование упрощенной *модели механизма* обычно позволяет проверить зависимость движения звеньев от основных размеров.

Исследование *образца механизма* позволяет выявить фактические характеристики движения звеньев при нормальных или искусственно созданных условиях работы механизма. При этом учитываются факторы, влияние которых трудно поддается предварительной количественной оценке (жесткость звеньев, вибрация, влияние загрязнения, проскальзывание в парах трения, тепловые деформации, характеристика приводного двигателя и т. п.).

Цель исследования при нормальных условиях работы — проверка точности и устойчивости работы механизма в целом, выявление отклонений от расчетных данных и их причин. Цель исследования при искусственно созданных условиях работы — выявление работоспособности механизма на различных режимах, проверка отдельных частей ме-

ханизма, изыскание способов улучшения механизма.

Испытательная аппаратура. Вследствие дифференциальной зависимости между перемещением, скоростью и ускорением каждая из указанных величин может измеряться непосредственно или при помощи другой величины с последующим автоматическим дифференцированием или интегрированием в соответствующей аппаратуре. При отсутствии прибора для автоматического дифференцирования и интегрирования последующая обработка результатов измерения производится графическими или приближенными аналитическими способами.

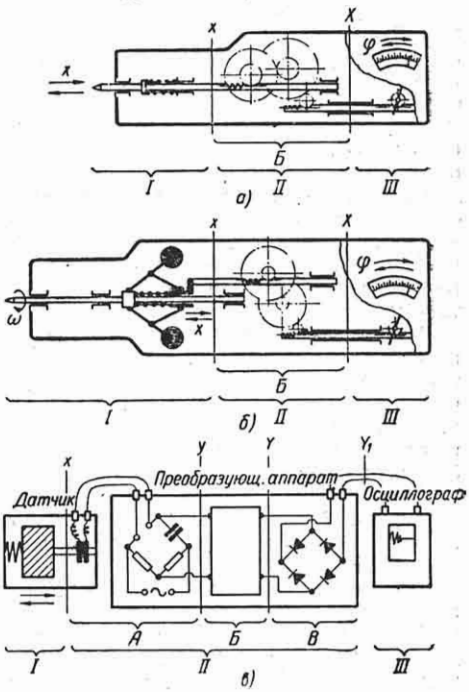
При измерении переменных величин может потребоваться определение мгновенных или средних их значений, отнесенных к определенному промежутку времени.

В случае измерения быстро изменяющихся величин их мгновенные значения могут быть уловлены только при помощи регистрирующих устройств, записывающих кривую изменения исследуемой величины в зависимости от другой — обычно от времени или пути, проходимого другим звеном.

Всякая установка для измерения механических величин в общем случае состоит из трех функционально различных устройств: приемного, передаточного и отмечающего [30].

Приемное устройство (*I* на фиг. 15) воспринимает измеряемую величину — перемещение x (фиг. 15, *а*), угловую скорость ω (фиг. 15, *б*), ускорение a (фиг. 15, *в*) — чувствительным органом и в случае надобности преобразует ее в первичное перемещение x (фиг. 15, *б*).

Передаточное устройство (*II* на фиг. 15) передает первичное перемещение от приемного в отмечающее устройство. При этом первичное перемещение x может: а) передаваться без изменений; б) увеличиваться в механических передачах, т. е. в каскаде усиления *Б* (фиг. 15, *а* и *б*) до величины X; в) преобразовываться в процессе передачи в удобное для передачи и регистрации перемещение жидкости, газа, луча света или изменения электрического тока (гидравлические, пневматические, оптические и электрические передаточные устройства); г) преобразовываться и усиливаться в процессе передачи, например проходя через каскад основного преобразования *А*, преобразующий первичное перемещение x в электрический сигнал y, каскад усиления *Б*, усиливающий сигнал y в сигнал Y, и каскад вспомогательного преобразования *В*, преобразующий сигнал Y в удобный для регистрации сигнал Y_1 (фиг. 15, *в*).



Фиг. 15. Схемы установок для измерения механических величин.

Отмечающее устройство (*III* на фиг. 15) регистрирует измеряемую величину, поступающую в виде перемещений X, электрических сигналов Y и т. п., посредством указателя и шкалы (устройства указывающего типа — фиг. 15, *а* и *б*) или путем записи ее в виде кривой (устройство записывающего типа — фиг. 15, *в*).

Указанные устройства и их элементы могут быть оформлены в виде одного прибора (фиг. 15, *а* и *б*) или в виде нескольких приборов и аппаратов (фиг. 15, *в*)

Приемное устройство и преобразующий элемент передаточного устройства, выделенные из общей системы в виде отдельного прибора, носят название *датчика* (фиг. 15, *в*).

Большее распространение имеют механические и электрические передаточные устройства, меньшее — оптические, пневматические и гидравлические.

Электрические датчики делятся на три основные группы:

1) *параметрические*, в которых первичное перемещение преобразуется в соответствующее изменение одного из параметров электрического контура — индуктивного сопротивления, емкости, омического сопротивления;

2) *генераторные*, характеризующиеся тем, что первичное перемещение вызывает в них появление электродвижущей силы, величина которой соответствует этому перемещению (пьезоэлектрические и фотоэлектрические элементы) или его скорости (электродинамические постоянного и переменного тока);

3) *импульсные*, в которых первичное перемещение, например, вызывает попеременное замыкание контактов, обеспечивающее сначала зарядку, а затем разрядку конденсатора; сила тока на выходе изменяется в зависимости от скорости разрядки, а следовательно, и от скорости первичного перемещения.

В табл. 2 приведены основные типы электрических параметрических датчиков [30].

Включение датчиков обычно производится по схеме мостика Уитстона. При использовании принципа частотной модуляции наименьшая величина, измеряемая емкостным датчиком, уменьшается до $2 \cdot 10^{-6}$ *см*, и диапазон измеряемых частот расширяется до предела 0—20 000 *гц*. Такое же расширение диапазона дает включение датчика проволочного сопротивления в потенциометрическую схему.

Измерение перемещений. Измерение полной длины перемещения производится теми же способами, что и линейных размеров.

Измерение перемещений в промежуточных положениях движущегося звена производится в функции времени или перемещения другого подвижного звена.

Для записи больших перемещений во времени поступательно движущегося или поворачивающегося на неполный оборот звена применима простейшая установка, которая состоит из неподвижного отметчика времени, производящего запись на прикрепленной к подвижному звену ленте, или из подвижного отметчика и неподвижной ленты. Недостаток — вынужденный масштаб записи, ограничивающий ее точность.

В качестве механического отметчика времени может быть использован небольшой электродвигатель переменного тока (лучше синхронный) с отмечающим усом на валу. Чтобы избежать усталостного разрушения уса, последний рекомендуется делать из материала органического происхождения — щетины, стержня гусиного пера, дерева и т. п.

Лента или линейка для механической записи (желательно с миллиметровыми делениями) на нужном участке покрывается слоем легко снимаемой краски или копоти.

Для записи перемещений во времени посредством осциллографа пользуются электрическими датчиками. Для измерения угловых перемещений вращающегося звена обычно употребляют индуктивный датчик, сердечник которого замыкается и размыкается вырезами и выступами стального диска, вращающегося вместе с исследуемым звеном. Роль диска может выполнять также зубчатое колесо, а при использовании этого способа для прямолинейно-поступательного движения — невращающийся ходовой винт с подходящей по размеру резьбой.

Колебания тока, вызванные изменением индуктивного сопротивления датчика, записываются осциллографом одновременно с записью 50-периодного тока для масштаба времени.

Кроме индуктивных датчиков, для указанной цели могут быть использованы также датчики других типов, включая электроконтактные, в виде коллекторного кольца и щетки по образцу применяемых в электрических машинах.

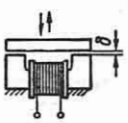
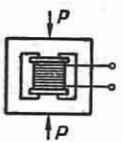
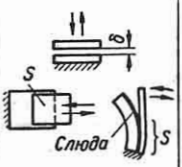
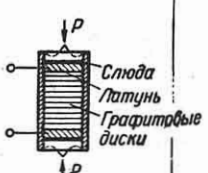
Применение двух датчиков — на ведущем и ведомом валах — с одновременной записью их показаний позволяет: а) весьма точно определять передаточное отношение передач (например, фрикционных) при различных нагрузках; б) исследовать процессы неустановившегося движения при включении муфт и т. п.

Недостаток рассматриваемого способа — невозможность иметь очень малый шаг на диске датчика, что ограничивает точность измерений. Положительная особенность — независимость результатов от силы электрических сигна-

Таблица 2

Основные типы электрических параметрических датчиков

(преобразующий элемент)

Тип датчика, принцип его работы, наименьшая измеряемая величина и измеряемая частота f при мостиковой схеме	Эскиз датчика	Основная зависимость	Рекомендуемые параметры и режим питания
Индуктивный. Меняется коэффициент самоиндукции (L *гн*) при изменении воздушного зазора (δ *см*) или перекрытия (Q *см*²) между якорем и сердечником: $\min \Delta\delta = 0{,}001$ *см* $f \leqslant 1500$ *гц*		$L = \dfrac{0{,}4\pi Q_{ж} w^2}{\dfrac{l_{ж}}{\mu} + \delta} 10^{-8}$ *гн*, где $Q_{ж}$ — сечение железа в *см*²; $l_{ж}$ — длина магнитопровода в *см*; w — число витков; μ — магнитная проницаемость	$L = 0{,}01 \div 0{,}1$ *гн*; $Q_{ж} = 0{,}3 \div 0{,}5$ *см*²; $\delta = 0{,}01 \div 0{,}05$ *см*; $\Delta\delta = (0{,}1 \div 0{,}3)\,\delta$. Плотность тока 2,5 *а/мм*²: $I = 0{,}03$ *а*; $V = 10$ *в*; $f = 5000$ *гц*
Магнитострикционный. Меняется коэффициент самоиндукции (L *гн*) за счет изменения магнитной проницаемости μ при изменении нагрузки на сердечник (P *кГ*) и его относительной деформации $\left(\lambda = \dfrac{\Delta l}{l}\right)$: $\min \Delta\lambda = 10^{-5}$ $f \leqslant 1500$ *гц*		$L = \dfrac{0{,}4\pi Q_{ж} w^2 \cdot \mu}{l_{ж}} 10^{-8}$ *гн* (обозначения см. выше)	$L = 0{,}01 \div 0{,}015$ *гн*. Материал сердечника — пермаллой; $\sigma_{max} = 6 \div 8$ *кГ/см*². Плотность тока 2,5 *а/мм*²
Емкостный. Меняется емкость конденсатора (C *см*) при изменении зазора между пластинами (δ *см*) или рабочей площади пластин (S *см*²); $\min \Delta\delta = 0{,}0001$ *см*; $f \leqslant 1500$ *гц*		$C = \dfrac{S \cdot \varepsilon}{4\pi\delta} = \dfrac{0{,}08\,S\varepsilon}{\delta}$, где ε — диэлектрическая постоянная прокладки (для воздуха $\varepsilon = 1$, для слюды $\varepsilon = 5 \div 8$)	$C = 50 \div 250$ *см*; $\delta = 0{,}01 \div 0{,}03$ *см*; $\Delta\delta \leqslant (0{,}2 \div 0{,}5)\,\delta$; $\Delta S = (0{,}2 \div 0{,}8)\,S$. Для тангенциального датчика (со слюдой) $C = 5 \div 30$ *см*; $\delta = 0{,}005 \div 0{,}02$ *см*
Угольного сопротивления. Меняется сопротивление угольного столба (R *ом*) при изменении нагрузки (P *кГ*): $\min \dfrac{\Delta R}{R} = 10^{-6}$; $f \leqslant 10\,000$ *гц*		$R \approx \dfrac{k}{p}$, где k — коэффициент пропорциональности; p — удельное давление	Диск: $d = 10$ *мм*; $h = 0{,}5$ *мм*. Число дисков в элементе 10—12. Материал дисков — графит с наполнителями. $I \leqslant 0{,}2$ *а*; $P < 60$ *кГ*
Проволочного сопротивления. Меняется сопротивление датчика (R *ом*) при изменении его относительной деформации $\left(\lambda = \dfrac{\Delta l}{l}\right)$: $\min \lambda = 10^{-6}$. $f \leqslant 500$ *гц*		$\dfrac{\Delta R}{R} = k\lambda$, где ΔR — приращение сопротивления; R — начальное сопротивление; k — чувствительность материала проволоки (для константана $k = 2$)	Диаметр проволоки 0,03 *мм*. Толщина бумаги 0,02÷0,03 *мм*. Длина датчика 10÷25 *мм*. Ширина датчика 4÷15 *мм*. Число петель 4—10; $R = 100 \div 1500$ *ом*; $\lambda < 10^{-3}$ Клей—целлулоид в ацетоне. При $R = 100$ *ом* и стальных деталях: $I \leqslant 0{,}025 \div 0{,}08$ *а*

лов, что повышает надежность измерений.

Для записи средних и малых перемещений во времени применяются: а) при длине хода до 100 *мм* — емкостные датчики с изменением активной площади пластин; б) при длине хода до 1 *мм* — емкостные датчики с изменением расстояния между пластинами, индуктивные и другие типы электрических датчиков; в) механические самописцы; г) оптические записывающие приборы. Точность измерений малых перемещений может быть доведена до 0,01—0,001 *мм*.

Для точного измерения больших и средних перемещений во времени или в зависимости от перемещения другого звена пользуются эталонным устройством, точно воспроизводящим такое же движение (обычно равномерное), какое должно иметь исследуемое звено. При измерении перемещений в зависимости от движения другого звена эталонное устройство приводится от последнего, при записи перемещений во времени — от синхронного электродвигателя (применяется реже). Контролю подвергается отклонение в положении исследуемого звена относительно эталона; ввиду малых значений этих отклонений их можно измерить весьма точно измерительными приборами типа индикатора-миниметра или записать посредством установки с электрическими датчиками.

Измерение скоростей. Для непосредственного измерения скорости механическим путем используются: а) изменение нормальных ускорений и сил инерции при вращательном движении — центробежные тахометры; б) изменение сопротивления среды — крыльчатые тахометры, велосиметры для больших скоростей. Для непосредственного измерения скорости электрическим путем используется зависимость от нее индуктируемой электродвижущей силы — таходинамо.

Для определения среднего числа оборотов в минуту за определенный промежуток времени используется счетчик оборотов, соединенный в один прибор с секундомером.

Измерение ускорений. Для непосредственного измерения ускорений, как прямолинейно-поступательных, так и вращательных движений, используется зависимость силы инерции или инерционного момента от ускорений.

Некоторая масса может перемещаться внутри корпуса прибора или датчика за счет деформации пружины. Величина деформаций пропорциональна силе инерции, а следовательно, и ускорению движения корпуса прибора. Для получения достаточной точности измерений необходимо иметь настолько малые смещения массы относительно корпуса, чтобы они не давали существенной разницы между абсолютными движениями корпуса и массы.

Перемещение массы относительно корпуса может фиксироваться при помощи механического самописца или осциллографа. В последнем случае применяются емкостные, индуктивные и др. датчики.

Возможна также постановка электрического датчика, реагирующего на усилие. В этом случае пружина не требуется.

КИНЕТОСТАТИКА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

В кинетостатике задача динамики об определении сил, возникающих в механизме при его заданном движении, приводится на основе принципов Даламбера к статической задаче равновесия под действием внешних сил, сил инерции и реакций в кинематических парах.

Задачи кинетостатики:

1) определение давлений в кинематических парах, сил, действующих на звенья, и уравновешивающих сил по заданному закону движения механизма и внешним силам;

2) уравновешивание движущихся масс в механизме.

Определение сил инерции звеньев

Для звена массы m, движущегося поступательно с ускорением a, равнодействующая сил инерции

$$P_u = -ma$$

приложена к центру тяжести звена; линия ее действия параллельна направлению движения.

Для вращающихся звеньев, имеющих плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения:

а) при $\omega = \text{const}$ и положении центра тяжести на оси вращения ($r_S = 0$) силы инерции элементарных масс взаимно уравновешиваются;

б) при $\omega = \text{const}$ и $r_S \neq 0$ равнодействующая

$$P_u = -mr_S\omega^2$$

приложена к центру тяжести и имеет радиальное направление от оси (центробежная сила);

в) при $\omega \neq \text{const}$ и $r_S = 0$ силы инерции приводятся к паре с моментом

$$M = -J_S\varepsilon,$$

где $J_S = \int r^2 dm = m\rho^2$ — момент инерции звена относительно центра тяжести; ρ — радиус инерции звена; ε — угловое ускорение;

г) при $\omega \neq \text{const}$ и $r_S \neq 0$ силы инерции приводятся к равнодействующей

$$P_u = -mr_S\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

приложенной к центру тяжести звена, и к паре с моментом

$$M = -J_S\varepsilon.$$

Нормальная и тангенциальная составляющие P_u будут соответственно

$$P_u^n = -mr_S\omega^2; \quad P_u^t = -mr_S\varepsilon;$$

P_u и M могут быть также сведены к одной равнодействующей P_u, приложенной в центре качания, который находится на радиальной прямой, проходящей через центр тяжести. Расстояние от оси O вращения до центра K качания

$$OK = r_S + \frac{J_S}{mr_S}.$$

Для звеньев, совершающих сложное плоское движение, силы инерции приводятся к равнодействующей

$$P_u = -ma_S,$$

приложенной к центру тяжести, и к паре с моментом

$$M = -J_S\varepsilon.$$

В приведенных формулах a_S — ускорение центра тяжести звена, J_S — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости движения.

P_u и M могут быть также сведены к одной равнодействующей

$$P_u = -ma_S,$$

линия действия которой отстоит от центра тяжести звена на расстоянии

$$h = \frac{\rho_S^2\varepsilon}{a_S},$$

где ρ_S — радиус инерции звена, соответствующий J_S. Моменты инерции простейших геометрических тел даны в табл. 8, гл. XVIII (стр. 394—396).

Для облегчения подсчетов моментов инерции тел вращения удобно пользоваться таблицей единичных моментов инерции [18] для участков цилиндрической формы.

В табл. 3 приведены значения единичных моментов инерции, умноженные на 10^6, стальных цилиндрических тел различных диаметров и длиной 1 *мм*.

Ступенчатые детали или группы деталей разбиваются на цилиндрические участки, моменты инерции которых затем суммируются. При подсчете момента инерции пустотелых деталей наличие полостей учитывается путем вычитания моментов инерции цилиндрических участков, соответствующих размерам полостей.

Момент инерции каждого цилиндрического участка определяется умножением табличного значения $J_e \cdot 10^6$ на длину участка l в *мм* и на 10^{-6}.

При сложных подсчетах удобнее оперировать значениями $J_e \cdot 10^6$ вместо J_e и лишь при окончательном определении момента инерции детали полученный результат умножить на 10^{-6}.

Момент инерции конического участка может быть приближенно определен по формуле

$$J = 10^{-6}\frac{l}{z}\sum J_e 10^6,$$

где $\Sigma J_e \cdot 10^6$ — сумма табличных значений единичных моментов по арифметическому ряду диаметров, начиная со значения, соответствующего наименьшему диаметру конуса, и кончая значением, соответствующим наибольшему диаметру; z — число членов суммы $\Sigma J_e \cdot 10^6$; l — длина конического участка в *мм*.

Если отдельные детали изготовлены из материала, удельный вес которого отличается от удельного веса стали (7,8), то для них табличные значения $J_e \cdot 10^6$ следует умножить на $k = 0{,}3$ — для алюминия и его сплавов (уд. вес 2,7), $k = 0{,}92$ — для чугуна (уд. вес 7,2) и $k = 1{,}12$ — для бронзы (уд. вес 8,7).

Примеры: 1) Определить момент инерции чугунного диска диаметром 300 *мм* и толщиной 20 *мм*.

По табл. 3 находим

$$J_e \cdot 10^6 = 63\,200;$$

$$J = (J_e \cdot 10^6)\, l \cdot k \cdot 10^{-6} = 63\,200 \cdot 20 \cdot 0{,}92 \cdot 10^{-3} = 1{,}16 \text{ кГ см сек}^2.$$

Таблица 3

Значения единичного момента инерции, умноженные на 10^6

d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$	d в *мм*	$J_e \cdot 10^6$ в $кГсм \cdot сек^2$
10,0	0,0780	15,0	0,395	20,0	1,25	25,0	3,05	37,5	15,4	50	48,8	75	247
10,2	0,0844	15,2	0,416	20,2	1,30	25,5	3,30	38,0	16,3	51	52,8	76	260
10,4	0,0913	15,4	0,439	20,4	1,35	26,0	3,56	38,5	17,1	52	57,0	77	274
10,6	0,0984	15,6	0,461	20,6	1,40	26,5	3,85	39,0	18,0	53	61,5	78	289
10,8	0,106	15,8	0,486	20,8	1,46	27,0	4,15	39,5	19,0	54	66,3	79	304
11,0	0,114	16,0	0,511	21,0	1,52	27,5	4,46	40,0	20,0	55	71,4	80	320
11,2	0,123	16,2	0,537	21,2	1,58	28,0	4,79	40,5	21,0	56	76,7	81	336
11,4	0,132	16,4	0,565	21,4	1,64	28,5	5,15	41,0	22,0	57	82,3	82	353
11,6	0,141	16,6	0,592	21,6	1,70	29,0	5,52	41,5	23,1	58	88,3	83	370
11,8	0,151	16,8	0,621	21,8	1,76	29,5	5,91	42,0	24,3	59	94,5	84	388
12,0	0,162	17,0	0,651	22,0	1,83	30,0	6,32	42,5	25,5	60	101	85	407
12,2	0,173	17,2	0,683	22,2	1,89	30,5	6,75	43,0	26,7	61	108	86	427
12,4	0,184	17,4	0,715	22,4	1,96	31,0	7,20	43,5	27,9	62	115	87	447
12,6	0,197	17,6	0,748	22,6	2,04	31,5	7,68	44,0	29,2	63	123	88	468
12,8	0,209	17,8	0,783	22,8	2,11	32,0	8,18	44,5	30,6	64	131	89	489
13,0	0,223	18,0	0,819	23,0	2,18	32,5	8,70	45,0	32,0	65	139	90	512
13,2	0,237	18,2	0,856	23,2	2,26	33,0	9,25	45,5	33,4	66	148	91	535
13,4	0,251	18,4	0,891	23,4	2,34	33,5	9,82	46,0	34,9	67	157	92	559
13,6	0,267	18,6	0,934	23,6	2,42	34,0	10,4	46,5	36,5	68	167	93	584
13,8	0,283	18,8	0,974	23,8	2,50	34,5	11,1	47,0	38,1	69	177	94	609
14,0	0,300	19,0	1,02	24,0	2,59	35,0	11,7	47,5	39,7	70	187	95	635
14,2	0,317	19,2	1,06	24,2	2,68	35,5	12,4	48,0	41,4	71	198	96	662
14,4	0,335	19,4	1,10	24,4	2,77	36,0	13,1	48,5	43,2	72	210	97	691
14,6	0,354	19,6	1,15	24,6	2,86	36,5	13,8	49,0	45,0	73	222	98	720
14,8	0,374	19,8	1,20	24,8	2,95	37,0	14,6	49,5	46,8	74	234	99	749
												100	780

Примечание. Значения $J_e \cdot 10^6$ для диаметров от 1 до 10 и от 100 до 1000 *мм* получаются соответственно делением или умножением табличных значений d на 10 и табличных значений $J_e \cdot 10^6$ на 10^4.

2) Определить момент инерции стальной конической детали с наименьшим диаметром 39,5 *мм*, наибольшим 46 *мм* и длиной 100 *мм*.

По табл. 3 для $d = 40$; 42; 44 и 46 *мм* находим значения $J_e \cdot 10^6$. Имея в виду, что $z = 4$, получим

$$J = 10^{-6} \frac{l}{z} \sum J_e \cdot 10^6 = 10^{-6} \frac{100}{4} \times$$

$$\times (20{,}0 + 24{,}3 + 29{,}2 + 34{,}9) = 0{,}0027 \; кГсм \cdot сек^2.$$

При подсчете моментов инерции сложных деталей и групп деталей расчетные данные целесообразно заносить во вспомогательную табличку. Для упрощения подсчета момента инерции по чертежу общего вида измерения диаметра участков удобно производить угольником или линейкой, имеющими шкалу единичных моментов инерции, что делает излишним обращение к табл. 3.

Определение давлений в кинематических парах

Определение давлений в кинематических парах возможно для механизмов, являющихся статически определимыми относительно рассматриваемой системы сил. Для плоского механизма, нагруженного силами, лежащими в его плоскости, решение возможно при отсутствии индивидуальных пассивных условий связи.

Решение, полученное по плоской кинематической схеме, правильно для механизма, все кинематические пары которого симметричны относительно его главной плоскости. При больших отклонениях от указанного условия необходимо учитывать смещения сил в перпендикулярном к плоскости механизма направлении и считаться с конструкцией кинематических пар.

Графо-аналитический способ решения задачи по плоской кинематической схеме предусматривает построение плана сил (см. стр. 456).

Определение приведенных и уравновешивающих сил

Приведенной называется сила, которая при малом возможном перемещении механизма совершает работу, равную сумме возможных работ всех действующих на механизм сил. При рассмотрении условий равновесия механизма все действующие силы могут быть заменены приведенной. Точку приложения приведенной силы обычно выбирают на ведущем звене и называют *точкой приведения*. Звено, на котором располагается точка приведения, называется *звеном приведения*.

Построение диаграмм приведенной силы и ее момента в зависимости от угла поворота звена приведения упрощает динамический анализ механизма (см. стр. 426).

Уравновешивающей называется сила, уравновешивающая действие приложенных к механизму сил. Она равна по величине и противоположна по направлению приведенной силе. Уравновешивающий момент равен моменту приведенной силы и противоположен ему по знаку.

Определение приведенных и уравновешивающих сил и моментов может производиться по плану сил (см. стр. 456) или при помощи теоремы Жуковского о жестком рычаге.

Теорема Жуковского основана на принципе возможных перемещений. Если рассматривать повернутый на 90° план скоростей как жесткий рычаг с осью вращения в полюсе, то из условий равновесия этого рычага под действием сил, перенесенных с механизма в соответственные точки повернутого плана скоростей, можно определить величину уравновешивающей силы с выбранными линией действия и точкой приложения.

Уравновешивание вращающихся масс

Инерционные силы неуравновешенных вращающихся деталей дают дополнительную нагрузку на опоры, часто являются источником вибрации и способствуют расшатыванию машины и фундамента. Поэтому уравновешивание быстро вращающихся масс в современных машинах является обязательным.

Неуравновешенность, получающаяся за счет конструктивных особенностей детали, может быть устранена добавлением уравновешивающих масс (противовесов), величины и расположение которых определяются расчетом или графическим построением. При этом уравновешенные части детали, симметричные относительно оси вращения, не учитываются.

Неуравновешенность, получающаяся при изготовлении детали вследствие неточностей в размерах, отклонений от правильной формы и неоднородности материала (пустоты в литье и т. п.), может быть уменьшена до допустимых пределов лишь путем статической или динамической балансировки детали на специальных установках.

Уравновешивание в одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения, достаточно для узких деталей с при-

близительно симметричным относительно этой плоскости распределением массы.

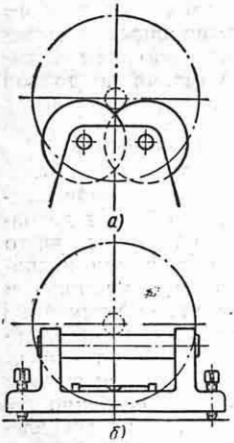
При расчете обычно задается радиус расположения r_0 центра тяжести уравновешивающей массы m_0. Величина ее определяется по формуле

$$m_0 = m\frac{r}{r_0},$$

где m и r — величина и радиус расположения центра тяжести уравновешиваемой массы.

Центры тяжести масс m и m_0 должны лежать на противоположных концах прямой, проходящей через ось вращения и перпендикулярной к ней.

Для статической балансировки деталь насаживается на специальную оправку или сопряженный с ней вал и устанавливается на легко вращающиеся ролики (фиг. 16, *а*) или выверенные по точному уровню горизонтальные стержни (фиг. 16, *б*).



Фиг. 16. Схемы установок для статической балансировки деталей

Снятием металла с утяжеленной стороны детали (обычно высверливанием), реже — добавлением с облегченной стороны (обычно напаиванием) добиваются безразличного равновесия оправки с деталью, что служит признаком статической уравновешенности последней. Для облегчения процесса балансировки часто наклеивают на деталь грузик (из воска), по весу которого определяют количество подлежащего снятию металла.

Иногда роликовую балансировочную установку снабжают сверлильным приспособлением, позволяющим удалять излишний металл без снятия детали с установки.

Для балансировки сменных деталей *1* (фиг. 17) (шлифовальные круги и т. п.) предусматриваются переставные грузики *2*, заложенные в круговой паз фланца.

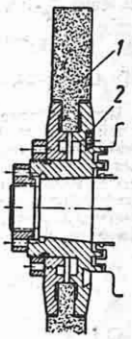
Дисбаланс детали количественно оценивается смещением r ее центра тяжести от оси вращения.

Действие дисбаланса при заданном числе n об/мин удобно оценивать отношением возникающей силы инерции P_u к весу детали G:

$$\frac{P_u}{G} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{n^2 r}{90\,000},$$

где r — в *см*.

Необходимость балансировки в каждом конкретном случае устанавливается путем сравнения наибольшего смещения, получаемого при изготовлении детали, с допустимым смещением $r = \frac{90\,000 P_u}{n^2 G}$ *см* при принятом отношении $\frac{P_u}{G}$.



Фиг. 17. Устройство для крепления шлифовального круга с уравновешивающими грузиками.

Уравновешивание в двух плоскостях требуется для деталей значительной длины.

Графическое построение для определения уравновешивающих масс показано на фиг. 18.

Силы инерции нескольких сосредоточенных масс (m_1, m_2, m_3) (фиг. 18, *а*) могут быть уравновешены двумя массами m_0' и m_0'', расположенными в двух произвольно выбранных плоскостях исправления S' и S''. Величины и угловые положения уравновешивающих масс находятся следующим образом.

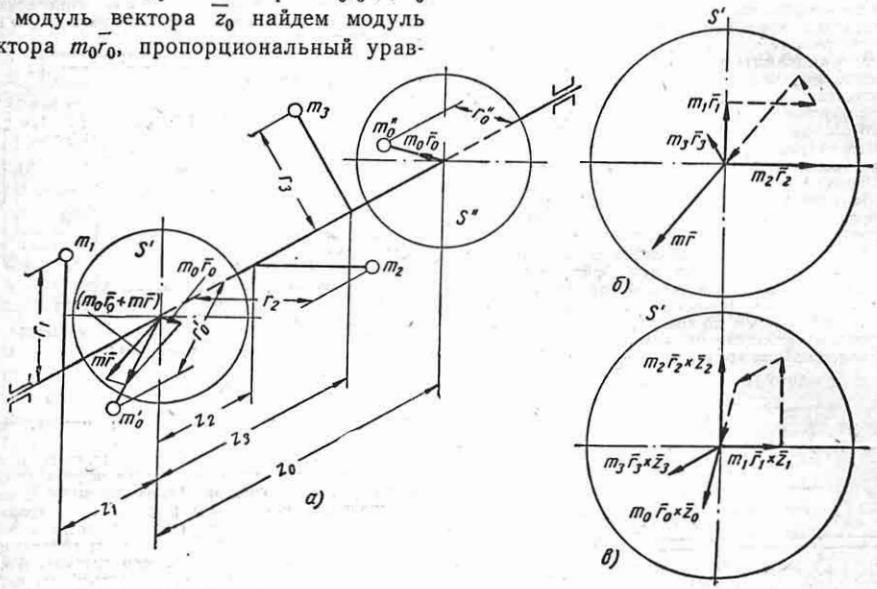
В плоскости S' строим векторы $m_1\bar{r}_1$, $m_2\bar{r}_2$, $m_3\bar{r}_3$, пропорциональные центробежным силам заданных масс. Замыкающая многоугольника из этих векторов дает вектор $m\bar{r}$, пропорциональный уравновешивающей силе (фиг. 18, *б*).

Далее, в плоскости S' строим векторы $m_1\bar{r}_1 \times \bar{z}_1$, $m_2\bar{r}_2 \times \bar{z}_2$, $m_3\bar{r}_3 \times \bar{z}_3$, пропорциональные моментам соответствующих центробежных сил. Замыкающая многоугольника из этих векторов дает вектор $m_0\bar{r}_0 \times \bar{z}_0$, пропорциональный уравновешивающему моменту (фиг. 18, *в*).

Как известно, момент изображается вектором, перпендикулярным к плоскости, содержащей вектор силы и центр момента, и направленным так, что если смотреть со стороны стрелки вектора,

момент будет казаться действующим в направлении движения часовой стрелки.

Делением модуля вектора $m_0\bar{r}_0 \times \bar{z}_0$ на модуль вектора $\bar{z}_0$ найдем модуль вектора $m_0\bar{r}_0$, пропорциональный уравновешивающей силе в плоскости исправления S'', а вторичным делением на выбранное r_0'' определим величину уравновешивающей массы $m_0'' = \frac{m_0 r_0}{r_0''}$.



Фиг. 18. Графическое определение уравновешивающих масс.

Угловое положение уравновешивающей массы устанавливается в соответствии с приведенным выше правилом векторного изображения моментов.

Уравновешивающая масса в плоскости S' определяется геометрическим сложением $m_0\bar{r}_0$ и $m\bar{r}$ и последующим делением модуля этой суммы $\sum mr$ на выбранный радиус r_0' (фиг. 18, *а*):

$$m_0' = \frac{\sum mr}{r_0'}.$$

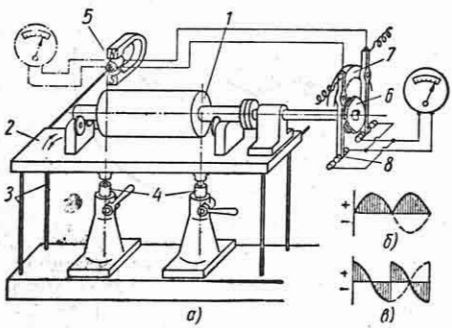
Динамическая балансировка производится на специальных машинах, позволяющих определять величину и угловое положение уравновешивающих грузов в двух выбранных плоскостях исправления, а на некоторых машинах также устранять дисбаланс изделия, например путем высверливания лишнего материала специально предусмотренным для этой цели сверлильным шпинделем.

Во всех балансировочных машинах используются колебания, передаваемые на опоры быстро вращающегося несбалансированного изделия. По амплитуде и фазе возникающих колебаний определяют соответственно величину и угловое положение уравновешивающих грузов. Необходимые измерения выполняются механическими, оптическими или, особенно часто, электрическими способами. Различают балансировочные машины с качающейся рамой и с подвижными опорами.

В машине с качающейся рамой изделие устанавливается в опорах, помещенных на раме, которая удерживается в среднем положении пружинами. Сначала ось качания рамы устанавливают в первой плоскости исправления. Тогда величина и направление дисбаланса во второй плоскости исправления определятся амплитудой колебаний рамы и угловым положением изделия в момент наибольшего отклонения рамы от среднего положения. После этого ось качания рамы устанавливают во второй плоскости исправления и таким же образом определяют дисбаланс в первой плоскости.

В машине по фиг. 19 рама *2*, на которой устанавливается изделие *1*, укреплена на четырех упругих стержнях *3*, допускающих колебания в горизонтальной плоскости. Для удобства изменения оси качания рамы предусмотрены две переставные попеременно включаемые опоры *4*. Измерение искомых величин производится электрическим способом при помощи индуктивного датчика *5*

генераторного типа. Датчик состоит из механически связанной с колеблющейся рамой катушки, помещенной в поле сильного постоянного магнита. Измеряя генерируемый в катушке ток соответственно тарированным прибором, определяют необходимую величину уравновешивающего груза при заданном плече его расположения. Угловое расположение уравновешивающего груза в машине по фиг. 19 определяется при помощи механического выпрямителя. Выпрямитель состоит из синхронно вращающегося с изделием кулачка *6* и поворотного кольца *7* с контактным устройством *8*. Через выпрямитель пропускается переменный ток от того же датчика. Частота тока равна числу оборотов изделия, фаза зависит от углового положения дисбаланса. Выпрямитель осуществляет переключение направления тока на противоположное в течение одного полупериода. При повороте кольца показания контрольного миллиамперметра постоянного тока будут изменяться от максимума, когда переключения производятся в моменты перехода тока датчика через нуль (фиг. 19, *б*), до нуля при переключениях в моменты экстремальных значений тока (фиг. 19, *в*). Угол поворота кольца, отсчитанный по соответствующей шкале, при нулевом показании миллиамперметра определит угловое положение уравновешивающего груза.

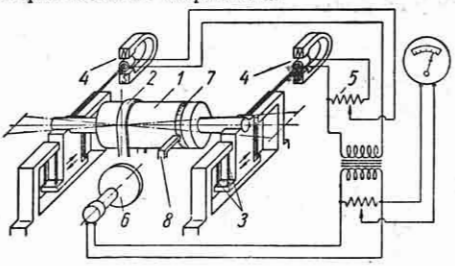


Фиг. 19. Схема балансировочной машины с качающейся рамой.

В машинах с подвижными опорами (фиг. 20) изделие *1*, приводимое в движение ремнем *2*, имеет возможность горизонтального плоско-параллельного движения и колеблется относительно вертикальной геометрической оси, положение которой зависит от распределения дисбаланса и характеристики опор *3*. Обе опоры связаны с индуктивными датчиками *4* генераторного типа.

Эталонная деталь с дисбалансом только в первой плоскости исправления будет колебаться около оси, положение которой не зависит от величины дисбаланса. Датчики будут генерировать переменные токи равных частот и со сдвигом фаз в 180°. Выравнивая амплитуды напряжений при помощи потенциометра *5*, добиваются их взаимного гашения, что контролируется нулевым показанием милливольтметра. После замены эталонной детали балансируемым изделием показания милливольтметра будут зависеть только от величины дисбаланса во второй плоскости исправления. Уравновешивающий груз на заданном плече определяется по тарированному для данных изделий милливольтметру.

Угловое положение уравновешивающего груза в машине по фиг. 20 определяется стробоскопическим методом. Безинерционная газосветная лампа *6* включается в электрическую схему машины таким образом, что за каждый оборот изделия она зажигается (приблизительно на 10^{-7} сек.) при переходе напряжения датчика через нуль. На вращающемся изделии укрепляется шкала *7*, на станине — указатель *8*. Освещенное такой лампой изделие кажется неподвижным. По делению шкалы, находящемуся против указателя, определяют угловое положение уравновешивающего груза во второй плоскости исправления.



Фиг. 20. Схема балансировочной машины с подвижными опорами.

Дисбаланс в первой плоскости исправления определяется аналогичным образом.

На крупных машинах для определения углового положения груза используется вспомогательный генератор. Генератор приводится во вращение с тем же числом оборотов в минуту, что и изделие. Переменный ток генератора имеет частоту, равную частоте тока датчика. Фаза тока генератора может изменяться поворотом его статора. В качестве контрольного прибора используется ваттметр, катушки которого питаются электроэнергией от датчика и генератора. Показания ваттметра пропорциональны косинусу угла сдвига фаз. Поэтому, изменяя фазу тока генератора путем поворота статора, можно получить нулевое показание прибора. Угол поворота статора, отсчитанный по шкале, определит угловое положение уравновешивающего груза.

Электрические схемы балансировочных машин обычно имеют ламповые усилители, иногда частотные фильтры, устраняющие влияние посторонних вибраций на показания приборов.

Современные машины для динамического балансирования определяют смещения центра тяжести изделий средних размеров относительно оси вращения до 0,001 *мм*.

Замена динамической балансировки статической для длинных деталей не достигает цели и может даже увеличить динамическую несбалансированность.

ДИНАМИКА МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Динамика машин решает на основании силового и энергетического анализа следующие основные задачи: 1) определение передаваемых машиной

сил и работы; 2) определение движения машины под действием приложенных сил; 3) регулирование хода машины.

Характерные периоды движения машины

Уравнение движения машины, основанное на законе живых сил:

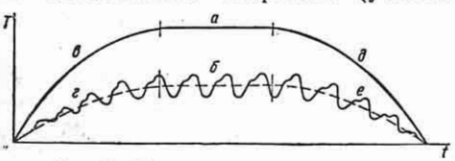
$$T_2 - T_1 = A_д - A_{пс} - A_{вс} \pm A_в, \quad (1)$$

где T_1 — кинетическая энергия машины, равная сумме живых сил всех ее звеньев, для момента времени t_1; T_2 — то же для последующего момента времени t_2; $A_д$ — работа движущих сил за промежуток времени $(t_2 - t_1)$; $A_{пс}$ — то же сил полезного сопротивления; $A_{вс}$ — то же сил вредного сопротивления (трения, сопротивления среды); $A_в$ — то же сил веса звеньев.

Установившееся движение наблюдается при нормальных условиях работы машины и может продолжаться неограниченное время.

Различают равновесное и неравновесное установившееся движение.

Равновесное движение характеризуется постоянством скоростей (участок



Фиг. 21. Периоды движения машины.

кривой *а* на фиг. 21). Такое движение могут иметь ротационные машины — турбины, электродвигатели и т. п.

Для любого промежутка времени равновесного движения

$$T_1 = T_2; \; A_{12} = 0,$$

где

$$A_{12} = A_д - A_{пс} - A_{вс} \pm A_в.$$

Неравновесное движение характеризуется периодическим изменением скорости движения (участок кривой *б* на фиг. 21). Такое движение имеют, например, поршневые машины.

Для любого промежутка времени неравновесного движения

$$T_1 \neq T_2 \quad \text{и} \quad A_{12} \neq 0,$$

а для цикла

$$T_1 = T_2 \quad \text{и} \quad A_{12} = 0.$$

Циклом называется промежуток времени, через который повторяются рабочие процессы машины; в начале каждого цикла звенья машины занимают одни и те же положения. Например, в паровых поршневых машинах цикл равен времени одного оборота кривошипа.

Неустановившееся движение продолжается ограниченное время.

Период разбега имеет место при пуске машины или переходе ее на режим работы с большей скоростью.

Характерные неравенства $T_1 < T_2$ и $A_{12} > 0$ всегда справедливы; а) в машинах с равновесным установившимся движением для любого промежутка времени периода разбега (участок кривой *в* на фиг. 21); б) в машинах с неравновесным движением для промежутка времени, за который машина совершает движение, соответствующее циклу, — чаще всего один оборот ведущего звена (участок кривой *г* на фиг. 21).

Период выбега наблюдается при остановке машины или переходе ее на режим работы с меньшей скоростью.

Характерные неравенства $T_1 > T_2$ и $A_{12} < 0$ всегда справедливы: а) в машинах с равновесным установившимся движением для любого промежутка времени периода выбега (участок кривой *д* на фиг. 21); б) в машинах с неравновесным установившимся движением для промежутка времени, за который машина совершает движение, соответствующее циклу, — по большей части один оборот ведущего звена (участок кривой *е* на фиг. 21).

Определение скоростей и ускорений механизма

Задача исследования движения механизма под действием приложенных сил и моментов может быть сведена к аналогичной задаче для одного вращающегося звена, называемого звеном приведения. Для этого необходимо: а) все действующие в механизме внешние силы и силы сопротивления заменить приведенной к указанному звену силой или моментом приведенной силы (см. стр. 421); б) массы и моменты инерции всех звеньев заменить приведенным к тому же звену моментом инерции.

Иногда в качестве звена приведения удобно принять звено с прямолинейно-поступательным движением. В этих случаях требуется определить приведенную силу и приведенную массу.

В машинах с неравновесным установившимся движением приведенный мо-

мент действующих сил и приведенный момент инерции изменяются в зависимости от положения звена приведения. Для определения скорости звена приведения в заданных положениях, степени неравномерности его движения, а в случае надобности — средств уменьшения этой неравномерности до допустимых пределов, требуется найти значения приведенного момента инерции и кинетической энергии механизма в функции угла поворота звена приведения.

Приведенный момент инерции механизма выражается общей формулой

$$J_{пр} = J + \sum J_{0i}\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \sum m_i\frac{v_i^2}{\omega^2} + \\ + \sum\left(m_{Si}\frac{v_{Si}^2}{\omega^2} + J_{Si}\frac{\omega_{Si}^2}{\omega^2}\right), \quad (2)$$

где J и ω — момент инерции относительно оси вращения и угловая скорость звена приведения; J_{0i} и ω_{0i} — моменты инерции относительно оси вращения и угловые скорости остальных вращающихся звеньев механизма; m_i и v_i — массы и скорости поступательно движущихся звеньев механизма; m_{Si}, v_{Si}, J_{Si} и ω_{Si} — массы, скорости центров тяжести, моменты инерции относительно осей, проходящих через центры тяжести, и угловые скорости звеньев, совершающих сложное плоское движение.

Для простых зубчатых механизмов имеем

$$J_{пр} = J + \sum J_{0i}\cdot i_i^2, \quad (3)$$

где i_i — передаточные отношения между рассматриваемыми звеньями и звеном приведения.

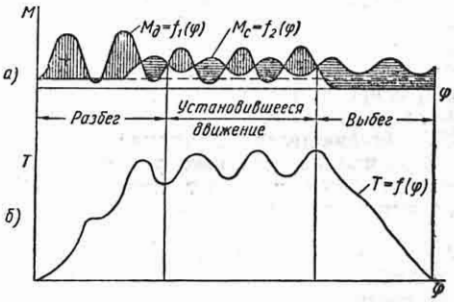
Приведенная масса выражается общей формулой

$$m_{пр} = m + \sum m_i\frac{v_i^2}{v^2} + \sum J_{0i}\frac{\omega_{0i}^2}{v^2} + \\ + \sum\left(m_{Si}\frac{v_{Si}^2}{v^2} + J_{Si}\frac{\omega_{Si}^2}{v^2}\right), \quad (4)$$

где m и v — масса и скорость поступательно движущегося звена приведения.

Определение $J_{пр}$ и $m_{пр}$ выполняется аналитически по приведенным формулам или чаще графо-аналитически с использованием плана скоростей и указанных выше формул. Для удобства графо-аналитического решения в формулах (2) и (4) величины угловых скоростей заменяются отношениями линейных скоростей к соответствующим радиусам (длинам звеньев); тогда отношения линейных скоростей во всех слагаемых могут быть заменены отношениями отрезков плана скоростей с добавлением в формулы некоторых размеров звеньев механизма.

Кинетическая энергия механизма в ряде его последовательных положений определяется методом графического интегрирования диаграммы приведенного момента в функции угла поворота звена приведения. Так как при интегрировании нас интересует лишь приращение



Фиг. 22. Построение диаграммы кинетической энергии.

площади, заключенной между осями координат и кривой приведенного момента, то задачу можно решить следующим более наглядным построением (фиг. 22, *а*). Строим раздельно кривую $M_д = f_1(\varphi)$ приведенного момента движущих сил с учетом сил тяжести звеньев и кривую $M_c = f_2(\varphi)$ приведенных моментов сил полезных и вредных сопротивлений.

Ординаты кривых, несмотря на различные знаки моментов, откладываются в одну сторону.

Интегрирование ведут по площади, заключенной между построенными кривыми, причем участки площади, ограниченные сверху кривой $M_д = f_1(\varphi)$ и снизу кривой $M_c = f_2(\varphi)$, означают увеличение кинетической энергии механизма и принимаются за положительные (заштрихованы на фиг. 22, *а* вертикально). Участки, ограниченные сверху кривой $M_c = f_2(\varphi)$, а снизу кривой $M_д = f_1(\varphi)$, принимаются за отрицательные (заштрихованы горизонтально).

Масштаб μ_T кинетической энергии на диаграмме $T = f(\varphi)$ (фиг. 22, *б*) пока-

зывает, сколько *кГм* содержится в 1 *мм* ординаты:

$$\mu_T = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot p \ \ кГм/мм,$$

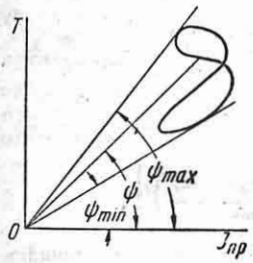
где μ_M — масштаб моментов в *кГм/мм* на диаграмме $M = f_3(\varphi)$; μ_φ — масштаб угловых перемещений в *рад/мм* на той же диаграмме; p — полюсное расстояние в *мм* при графическом интегрировании диаграммы $M_\partial - M_c = f_4(\varphi)$ (см. ниже стр. 516) или переходный параметр в *мм* при интегрировании путем измерения площадей, что в данном случае удобнее.

Масштаб кинетической энергии механизма, измеренной соответствующей площадью диаграммы $M = f_3(\varphi)$, будет

$$\mu'_T = \mu_M \cdot \mu_\varphi \ кГм/мм^2.$$

Интегрирование, произведенное от начала движения механизма, позволяет найти абсолютные величины его кинетической энергии; интегрирование, произведенное на отдельном интервале движения (например, в цикле установившегося движения), дает лишь приращения кинетической энергии.

Скорость звена приведения в зависимости от угла поворота определяется при помощи вспомогательной диаграммы в координатах $J_{пр}$ и T (фиг. 23). Кривая вспомогательной диаграммы строится по точкам, каждая из которых соответствует определенному положению механизма. По углам ψ наклона лучей, проведенных из начала координат к соответствующим точкам кривой, находят угловые скорости ω звена приведения в различных положениях:



Фиг. 23. Вспомогательная диаграмма для определения угловой скорости звена приведения.

$$\omega = \sqrt{2\frac{\mu_J}{\mu_T}}\sqrt{\operatorname{tg}\psi} \cdot сек^{-1},$$

где μ_J и μ_T — масштабы приведенного момента инерции в *кГмсек²/мм* и кинетической энергии механизма в *кГм/мм* на диаграмме $J_{пр} = F(T)$.

По найденным значениям ω можно построить диаграмму

$$\omega = f(\varphi).$$

Угловое ускорение звена приведения в зависимости от углового перемещения строится следующим образом.

Графическим дифференцированием (см. стр. 516) диаграммы $\omega = f(\varphi)$ получают кривую $\frac{d\omega}{d\varphi} = f'(\varphi)$. Перемножая ординаты кривых $\omega = f(\varphi)$ и $\frac{d\omega}{d\varphi} = f'(\varphi)$ и деля результат на некоторый постоянный параметр p_2 в *мм*, находим ординаты искомой кривой $\varepsilon = f''(\varphi)$.

Масштаб угловых ускорений на построенной диаграмме

$$\mu_\varepsilon = \frac{\mu_\omega^2}{\mu_\varphi}\frac{p_2}{p_1} \ рад \cdot сек^{-2}/мм,$$

где μ_ω и μ_φ — масштабы угловой скорости в *рад сек⁻¹/мм* и углового перемещения в *рад/мм* на диаграмме $\omega = f(\varphi)$; p_1 — полюсное расстояние в *мм*, принятое при графическом дифференцировании.

Время в зависимости от углового перемещения звена приведения определяется графическим интегрированием кривой $\frac{1}{\omega} = f_0(\varphi)$, которая может быть построена по известным значениям ω.

После определения скорости и ускорения звена приведения можно произвести кинематический анализ всего механизма.

Регулирование скорости установившегося неравновесного движения (расчет маховых масс)

Средняя угловая скорость звена приведения за время t

$$\omega_{cp} = \frac{1}{t}\int_0^t \omega dt \approx \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}.$$

Коэффициент неравномерности δ вращения звена приведения за цикл

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}.$$

Средние допустимые значения δ для различных машин

Генераторы переменного тока	1/200—1/300
Генераторы постоянного тока	1/100—1/200
Двигатели внутреннего сгорания и компрессоры	1/80—1/150
Судовые двигатели	1/20—1/100
Металлорежущие станки, ткацкие, полиграфические и мукомольные машины	1/20—1/50
Сельскохозяйственные машины	1/10—1/50
Насосы, машины ударного действия	1/5—1/30

Определение δ для спроектированной машины производится по углам наклона ψ_{max} и ψ_{min} лучей, касательных к замкнутой кривой диаграммы $J_{пр} = F(T)$ (фиг. 23):

$$\delta \approx 2\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} - \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} + \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}.$$

Если величина δ выходит за допустимые пределы, необходимо повысить равномерность движения вращающегося звена за счет увеличения его момента инерции путем установки махового колеса или замены имеющегося махового колеса другим, обладающим большим моментом инерции.

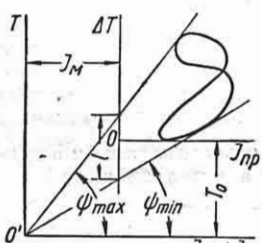
Определение момента инерции махового колеса по заданному коэффициенту неравномерности может быть выполнено различными способами. Ниже приведены два из них.

Определение $J_м$ при помощи диаграммы $J_{пр} = F_1(\Delta T)$. Строят диаграмму $J_{пр} = F_1(\Delta T)$ для цикла (фиг. 24). Приращение кинетической энергии ΔT отсчитывается от кинетической энергии в исходном положении механизма, в котором ΔT принимают равным нулю. По заданному δ определяют

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{1}{2}\frac{\mu_J}{\mu_T}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2 \omega_{cp}^2;$$

$$\operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{1}{2}\frac{\mu_J}{\mu_T}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 \omega_{cp}^2.$$

По подсчитанным углам ψ_{max} и ψ_{min} проводят два касательных луча к замкнутой кривой диаграммы (фиг. 24). Точка пересечения лучей дает положение начала координат O' диаграммы $J_{пр} + J_м = F(T)$.



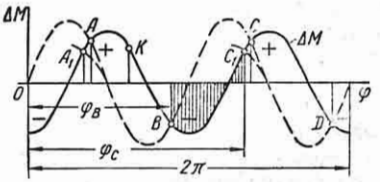
Фиг. 24. Диаграмма для определения требуемого момента инерции махового колеса.

Расстояние между точками O и O' по вертикали равно кинетической энергии (T_0) механизма в исходном положении (в масштабе μ_T *кГм/мм*), по горизонтали — искомому моменту инерции маховика (в масштабе μ_J *кГмсек²/мм*).

Если точка O' пересечения лучей выходит за пределы чертежа, то $J_м$ определяется через отрезок l *мм*, отсекаемый указанными лучами на оси ординат диаграммы $J_{пр} = F_1(\Delta T)$, по формуле

$$J_м = \frac{\mu_T \cdot l}{\delta \cdot \omega_{cp}^2} \text{ кГмсек}^2.$$

Определение $J_м$ по диаграмме $\Delta M = f_4(\varphi)$*. По диаграммам $M_д = f_1(\varphi)$ и $M_c = f_2(\varphi)$ строим диаграмму приращения момента $\Delta M = M_д - M_c = f_4(\varphi)$ на протяжении цикла (фиг. 25).



Фиг. 25. Диаграмма для определения требуемого момента инерции махового колеса по способу И. И. Артоболевского.

Для нахождения значений φ, при которых угловая скорость звена приведения приобретает максимальное значение, строим в том же масштабе, что и ΔM, вспомогательную кривую:

$$\Delta M_1 = \omega_{cp}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\left[\sum J_{0i}\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}\frac{\varepsilon_{0i}}{\omega_{0i}} + \right.$$

$$+ \sum m_i \frac{v_i^2}{\omega^2}\frac{a_i}{v_i} + \sum\left(m_{Si}\frac{v_{Si}^2}{\omega^2}\frac{a_S^t}{v_{Si}} + \right.$$

$$\left.\left. + J_{Si}\frac{\omega_{Si}^2}{\omega^2}\frac{\varepsilon_{Si}}{\omega_{Si}}\right)\right],$$

где ε_{0i} — угловое ускорение вращающихся звеньев; a_i — ускорение поступательно движущихся звеньев; a_{Si}^t и ε_{Si} — тангенциальное ускорение центра тяжести и угловое ускорение для звеньев, совершающих сложное плоское движение. Остальные обозначения те же, что и в формуле (2) на стр. 426. Ускорения определяются при

$$\omega = \omega_{max} = \omega_{cp}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) = \text{const}.$$

В пересечении кривых $\Delta M = f_4(\varphi)$ и $\Delta M_1 = f_5(\varphi)$ получаем точки A, B, C и D, соответствующие экстремальным значениям ω. Точка с максимум-максиморум ω

* Способ разработан И. И. Артоболевским.

соответствует действительной наибольшей угловой скорости звена приведения $\omega_{max} = \omega_{cp}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)$; остальные экстремумы имеют условный характер.

Точки, в которых ω имеют максимумы (B и D на фиг. 25), выявляют из общего числа полученных точек (A, B, C, D) пересечения кривых путем определения знака площади, заключенной между осью абсцисс, кривой $\Delta M = f_4(\varphi)$ и двумя вертикалями, проведенными через соседние исследуемые точки: если площадь — положительна, последующий экстремум (максимум) больше предыдущего (минимума), и наоборот. Из отобранных точек таким же способом определяют точку, соответствующую максимуму-максиморум ω.

На фиг. 25 этой точкой и является точка B.

Указанный способ определения точки с максимумом-максиморум ω базируется на практически приемлемом допущении, что изменения $J_{пр} + J_м$ относительно малы и не влияют на распределение максимумов и минимумов ω между точками A, B, C и D.

Для определения значения φ, при котором угловая скорость звена приведения приобретает наименьшую величину $\omega_{min} = \omega_{cp}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$, строим вторую вспомогательную кривую $\Delta M_2 = f_6(\varphi)$ на основании соотношения

$$\Delta M_2 = \frac{2 - \delta}{2 + \delta}\Delta M_1.$$

Точки A_1 и C_1 пересечения кривых $\Delta M = f_4(\varphi)$ и $\Delta M_2 = f_6(\varphi)$ соответствуют экстремальным значениям ω, среди которых минимум-миниморум равен наименьшему значению угловой скорости при заданном коэффициенте неравномерности: $\omega_{min} = \omega_{cp}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$. Точки A_1 и C_1, соответствующие минимумам ω, располагаются вблизи ранее полученных точек A и C условных минимумов; поэтому для выявления точек A_1 и C_1 можно ограничиться проведением небольших участков кривой $\Delta M_2 = f_6(\varphi)$. Определение точки C_1 с минимумом-миниморум ω производится выявлением знака площади, заключенной между кривой $\Delta M_2 = f_6(\varphi)$, осью абсцисс и вертикалями, проходящими через A_1 и C_1.

Момент инерции махового колеса (звена приведения)

$$J_м = \frac{2\int_{\varphi_{C1}}^{\varphi_B} \Delta M\, d\varphi - J_{пр.B}\omega_{max}^2 + J_{пр.C1}\omega_{min}^2}{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2},$$

где $\int_{\varphi_{C1}}^{\varphi_B} \Delta M\, d\varphi$ пропорционален соответствующей площади на диаграмме $\Delta M = f_4(\varphi)$ в $мм^2$ (на фиг. 25 заштрихована), умноженной на масштабы μ_φ и μ_M; φ_B и φ_{C1} — значения угла φ соответственно при ω_{max} и ω_{min}; $J_{пр.B}$ и $J_{пр.C1}$ — значения $J_{пр}$ в положениях, соответствующих ω_{max} и ω_{min}.

Если приведенные моменты инерции малы по сравнению с моментом инерции махового колеса, то можно пользоваться приближенной формулой

$$J_м \approx \frac{\int_{\varphi_{C1}}^{\varphi_B} \Delta M\, d\varphi}{\delta\omega_{cp}^2}.$$

Угловая скорость в любом положении

$$\omega_K = \sqrt{\frac{J_м + J_{пр.B}}{J_м + J_{пр.K}}\omega_{max}^2 - \frac{2}{J_м + J_{пр.K}}\int_{\varphi_K}^{\varphi_B} \Delta M\, d\varphi},$$

где $\int_{\varphi_K}^{\varphi_B} \Delta M\, d\varphi$ подсчитывается по соответствующей площади диаграммы фиг. 25.

ПОТЕРИ В МЕХАНИЗМАХ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Основные понятия и определения

В процессе преобразования, передачи и использования энергии для выполнения определенной технологической задачи в машине всегда имеет место потеря части энергии, основная масса которой обычно превращается в тепловую и рассеивается.

Уменьшение потерь дает экономию энергии и снижает нагрев частей машины, что благоприятно влияет на их работоспособность и стойкость. Энергия потерь, отводимая с продуктами

выделения (отработанный пар и воздух, отводимый поток жидкости), производит меньший нагрев частей машины, чем энергия, выделяемая внутри машины, и может быть более удобно использована.

Чрезмерный нагрев деталей при невозможности дальнейшего уменьшения потерь устраняется: а) увеличением поверхности охлаждения машины, например введением ребер; б) введением принудительного потока охлаждающего воздуха (например, в электрических машинах); в) введением естественной или принудительной циркуляции охлаждающей жидкости, проходящей через соответствующее охлаждающее устройство (например, в двигателях внутреннего сгорания); г) применением охлаждающих устройств для масла в системе циркуляционной смазки.

Немеханические потери являются специфичными для машин с различными рабочими процессами. Потери энергии от неполного расширения, перепада давления и утечек газообразного или жидкого рабочего тела характерны для пневматических и гидравлических машин.

Потери этого рода рассматриваться здесь не будут.

Общими для всех видов машин и механизмов являются механические потери от сил вредных сопротивлений, а именно: а) от сил трения, имеющих большое значение как в тихоходных, так и в быстроходных машинах; б) от сил сопротивления окружающей среды — сопротивление воздуха (существенно только для очень быстроходных машин), сопротивление смазывающей жидкости (может быть сведено до незначительной величины правильным выбором системы смазки; так, например, поливка шестерен струей масла в быстроходных машинах сильно снижает потери по сравнению со смазкой саморазбрызгиванием).

Абсолютная величина потерь равна работе сил вредных сопротивлений за рассматриваемый промежуток времени.

Коэффициент потерь φ характеризует относительную величину потерь в механизме.

Для установившегося равновесного движения

$$\varphi = \frac{dA_{вс}}{dA_{д}} = \frac{A_{вс}}{A_{д}} = \frac{N_{вс}}{N_{д}} = \text{const}.$$

Для установившегося неравновесного движения вследствие периодического аккумулирования кинетической энергии отдельными звеньями пользоваться величинами мгновенных значений φ практически неудобно; в этих случаях пользуются его средним значением, равным коэффициенту потерь за один цикл:

$$\varphi = \frac{A_{вс}}{A_{д}} = \frac{N_{вс}}{N_{д}}.$$

В формулах $A_{вс}$ и $N_{вс}$ — работа и мощность (теряемая) сил вредных сопротивлений за любой промежуток времени равновесного движения или за время цикла неравновесного установившегося движения; $A_{д}$ и $N_{д}$ — работа и мощность (подводимая) движущих сил за тот же промежуток времени.

Коэффициент полезного действия η характеризует относительное количество энергии, используемой в машине по прямому назначению:

$$\eta = 1 - \varphi.$$

Для установившегося равновесного движения

$$\eta = \frac{dA_{пс}}{dA_{д}} = \frac{A_{пс}}{A_{д}} = \frac{N_{пс}}{N_{д}} = \text{const}.$$

Для установившегося неравновесного движения средняя величина к. п. д., равная к. п. д. за один цикл, будет

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_{д}} = \frac{N_{пс}}{N_{д}}.$$

В двух последних формулах $A_{пс}$ и $N_{пс}$ — работа и мощность (полезная) сил полезных сопротивлений за рассматриваемый промежуток времени.

Общий к. п. д. нескольких последовательно соединенных передач или механизмов

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_n.$$

Общий к. п. д. нескольких параллельно соединенных передач или механизмов

$$\eta = \frac{N_{д1}\eta_1 + N_{д2}\eta_2 + N_{д3}\eta_3 + \ldots + N_{дn}\eta_n}{N_{д}} = \frac{N_{пс}}{\frac{N_{пс1}}{\eta_1} + \frac{N_{пс2}}{\eta_2} + \frac{N_{пс3}}{\eta_3} + \ldots + \frac{N_{псn}}{\eta_n}};$$

в формулах $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n$ — к. п. д. отдельных передач или механизмов; $N_{д1}, N_{д2}, N_{д3}, \ldots, N_{дn}$ — мощности

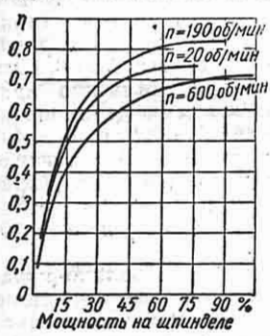
движущих сил в отдельных передачах (разветвлениях); $N_{д1}+N_{д2}+N_{д3}+\ldots+N_{дn}=N_д$; $N_{пс1}$, $N_{пс2}$, $N_{пс3}$, . . . , $N_{псn}$ — мощности сил полезных сопротивлений в отдельных передачах (разветвлениях); $N_{пс1}+N_{пс2}+N_{пс3}+\ldots+N_{псn}=N_{пс}$.

Общий к. п. д. смешанного соединения передач (механизмов) определяется путем совместного использования формул для последовательного и параллельного соединений.

Если для какой-либо машины отдельно известны к. п. д., связанные с различными источниками потерь, например, электрический к. п. д. электродвигателя $\eta_э$, объемный к. п. д. насоса $\eta_о$, механический к. п. д. от трения η, то общий к. п. д. машины определяется как произведение этих к. п. д.

Механический к. п. д. одной и той же машины зависит от режима ее работы — скорости и нагрузки. С возрастанием полезной нагрузки от нуля (холостой ход) до наибольшей величины к. п. д. сначала возрастает от нуля до максимума (при оптимальной нагрузке), а затем снижается; часто на используемом диапазоне нагрузок к. п. д. не достигает максимума.

На фиг. 26 в качестве примера приведена зависимость к. п. д. от нагрузки для передней бабки токарного станка с шестеренной коробкой передач на 12—18 скоростей и с диапазоном регулирования чисел оборотов шпинделя порядка 50.

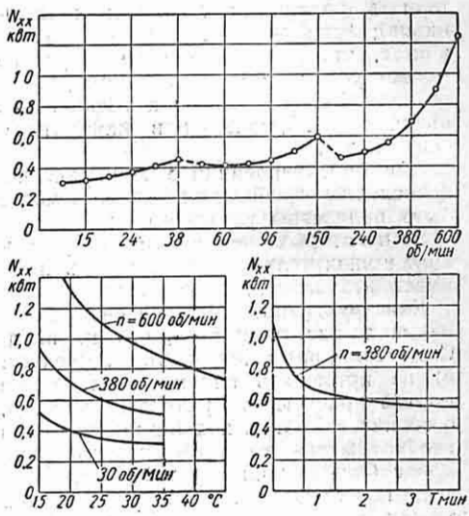


Фиг. 26. Примерная зависимость к. п. д. передней бабки токарного станка от нагрузки.

Зависимость к. п. д. от скорости является более сложной. При очень больших скоростях шпинделя, порядка 5000—10 000 об/мин, у некоторых станков среднего размера наблюдалось снижение к. п. д. до 0,3—0,1.

Мощность холостого хода N_{xx} целиком расходуется на работу сил вредных сопротивлений. Мощность холостого хода благодаря легкости ее измерения часто служит сравнительным показателем величины потерь, характеризующим в меньшей степени качество конструкции и в большей степени качество изготовления механизма (тщательность обработки трущихся поверхностей, наличие перекосов, перетяжка подшипников и т. п.).

На фиг. 27 в качестве примера приведена зависимость мощности холостого



Фиг. 27. Примерные зависимости мощности холостого хода передней бабки токарно-винторезного станка модели 1Д62 от включенного числа оборотов, температуры смазки и времени с момента пуска.

хода N_{xx} от включенной скорости — числа n об/мин шпинделя, температуры смазки $t°$ С и времени T с момента пуска для передней бабки токарного станка 1Д62 (ДИП-200) с 18-скоростной шестеренной коробкой передач на подшипниках качения и смазкой в масляной ванне.

Способы повышения к. п. д.

Схема механизма оказывает существенное влияние на его к. п. д. Рациональная с точки зрения к. п. д. схема должна обеспечивать: а) короткие кинематические цепи с малым числом кинематических пар — источников потерь на трение; б) полное отключение кинематических цепей, не участвующих в передаче мощности при данных включениях, что важно для быстроходных машин; в) отсутствие значительных

блуждающих мощностей, когда скорости и усилия в кинематических парах соответствуют большей мощности, чем передается механизмом (примерами таких механизмов могут служить планетарные редукторы); г) рациональный закон изменения передаваемой мощности по циклу механизма с неравновесным установившимся движением (учитывается влияние движущих сил на потери в различных положениях механизма); при этом необходимо иметь в виду, что движущие силы могут не только увеличивать, но и снижать потери, если они приводят к уменьшению инерционных давлений в кинематических парах.

При проектировании механизмов перечисленные требования не всегда могут быть полностью удовлетворены.

В некоторых механизмах, передающих незначительные мощности, к. п. д. имеет второстепенное значение.

Конструктивное выполнение механизма также влияет на его к. п. д. С целью повышения к. п. д. следует: а) не применять сильно увеличенные против расчетных размеры звеньев, особенно диаметры подшипников; б) без необходимости не применять механизмов с большим числом пассивных связей, требующих строгого соответствия между размерами звеньев для хорошей сборки механизма; рекомендуется, например, применять самоустанавливающиеся подшипники на сильно прогибающихся валах; в) использовать вместо пар скользящего трения подшипники качения (для быстроходных валов лучше шариковые или цилиндрические роликовые), а также поступательные и винтовые пары с трением качения; г) обеспечить надежное выключение фрикционных муфт, особенно многодисковых, на вертикальных валах и в реверсивных механизмах (трение дисков с большой относительной скоростью приводит к заметным потерям); д) применять для быстроходных машин жидкую смазку вместо консистентной; е) применять систему принудительной смазки от насоса (например, смазку передач шестеренных коробок и редукторов производить поливкой вместо масляной ванны).

Качество изготовления механизма сильно влияет на его к. п. д.

Тщательная обработка трущихся поверхностей снижает потери на трение.

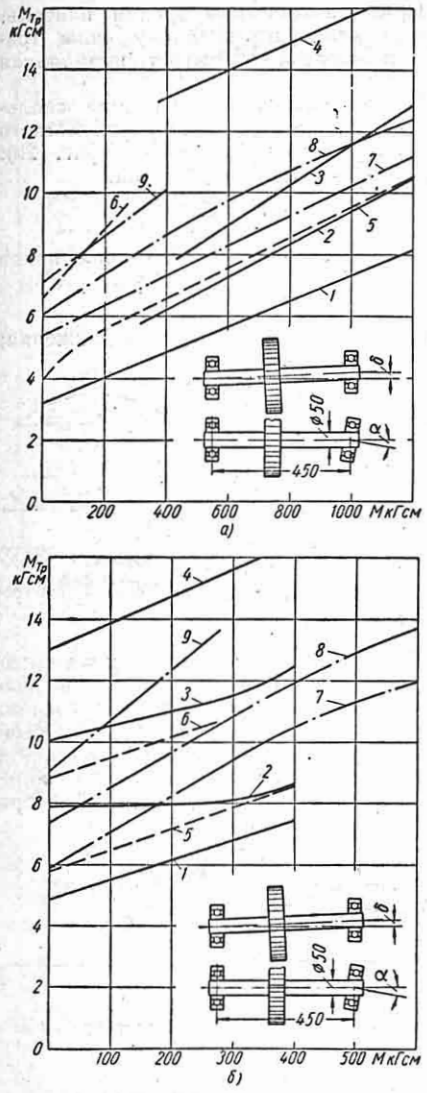
Неточности во взаимном расположении сопрягаемых поверхностей в деталях механизма (отклонения от соосности и параллельности осей цилиндрических поверхностей и т. п.) могут привести к неправильному распределению давления на поверхностях трения, к заеданию и т. д. Все эти явления увеличивают потери в механизме. Экспериментальное исследование влияния отклонений подшипников от правильного положения для вала, приводимого во вращение через муфту и передающего движение через зубчатую передачу, показало следующее: а) непараллельность валов в плоскости их расположения мало влияет на потери в зубчатой передаче, непараллельность в перпендикулярной плоскости дает заметное увеличение потерь; б) даже весьма малая несоосность подшипников скольжения приводит к значительному увеличению потерь на трение; в) шарикоподшипники допускают бо́льшие отклонения, чем конические роликоподшипники.

На фиг. 28 показано влияние углового смещения α подшипника качения и линейного его смещения δ в плоскости, перпендикулярной к плоскости расположения валов, на момент трения вала с одной зубчатой передачей при $n = 680$ об/мин (фиг. 28, *а*) и при $n = 1450$ об/мин (фиг. 28, *б*): при точной установке шарикоподшипников (кривая *1*); при линейном смещении шарикоподшипников на $\delta = 0{,}3$ *мм*, $\delta = 0{,}6$ *мм* и $\delta = 1{,}2$ *мм* (соответственно кривые *2*, *3* и *4*); при угловом смещении шарикоподшипников на $\alpha = 20'$ и $\alpha = 40'$ (кривые *5* и *6*); при точной установке конических роликоподшипников (кривая *7*); при угловом смещении роликоподшипников на $\alpha = 5'$ и $\alpha = 10'$ (кривые *8* и *9*).

Осевой натяг конических ролико- и шарикоподшипников оказывает заметное влияние на величину момента трения; для уменьшения потерь рекомендуется регламентация предварительного натяга.

Неровности поверхностей трения и небольшие отклонения от правильного контакта последних между собой могут быть частично исправлены обкаткой машины после ее изготовления. При этом поверхности несколько изнашиваются и прирабатываются друг к другу, создавая лучший контакт.

Обкатка новой машины или механизма может проводиться на холостом



Фиг. 28. Влияние перекосов и смещений подшипников на момент трения вала с одной зубчатой передачей (по данным ЭНИМС).

ходу или с неполной искусственно созданной нагрузкой, с нормальной смазкой или со смазкой, имеющей тонкую абразивную примесь для ускорения процесса приработки.

Кроме заводской обкатки, практикуется приработка машин на регламентированном пониженном режиме работы в начальный период их эксплуатации (например, ограничение наибольшей скорости автомашин на первой тысяче километров пробега). Эта мера заметно удлиняет срок службы машины.

ТРЕНИЕ В МЕХАНИЗМАХ

Виды трения

Трением называется сопротивление относительному перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте их контакта.

По характеру относительного движения трущихся тел различают:

1. *Трение скольжения*, которое может возникнуть при соприкосновении тел по поверхности, по линии или в точке.

Под линейчатым понимается касание по малым площадям, протяженность которых в одном направлении практически мала и зависит от смятия поверхностей. Под точечным подразумевается касание по еще меньшим площадям, имеющим во всех направлениях малую протяженность, зависящую от смятия поверхностей.

2. *Трение качения*, возникающее при перекатывании одного тела по другому. Касание тел может быть линейчатым (по прямой) или точечным. Мгновенная ось вращения одного тела относительно другого при чистом качении совпадает с прямой касания или проходит через все точки касания.

3. *Трение верчения*, которое может появиться при точечном соприкосновении (обычно в одной точке). Относительное движение тел — вращение вокруг оси, проходящей через точку касания по нормали к соприкасающимся поверхностям.

На практике часто один вид трения сопровождается другим.

По характеру смазки трущихся поверхностей различают:

чистое трение при отсутствии на трущихся поверхностях следов посторонних веществ (в механизмах не встречается, может быть получено в вакууме);

сухое трение при отсутствии смазки (в механизмах возможно при хорошей изоляции трущихся поверхностей от системы смазки);

полусухое трение, сочетание сухого и граничного;

граничное трение при очень тонкой масляной пленке (0,1 *мк* и менее), прочно удерживающейся на трущихся поверхностях (на этот вид трения

гидродинамическая теория смазки не распространяется);

полужидкостное трение — сочетание жидкостного и граничного;

жидкостное трение, когда трущиеся поверхности полностью разделены слоем смазки. Попадание достаточного количества смазки в зазор между трущимися поверхностями обеспечивается: а) самозатягиванием при достаточной скорости движения и при наличии соответствующих поверхностей, образующих масляный клин в сочетании с явлением капиллярности; б) подачей смазки в зазор под давлением, что обеспечивает жидкостное трение при сколь угодно малой скорости относительного движения поверхностей (применяется, например, для смазки направляющих некоторых станков).

Основные понятия и законы трения

Вектор силы трения лежит в плоскости, касательной к трущимся поверхностям, и направлен против скорости относительного движения.

Сила трения покоя имеет место до начала движения при действии сдвигающей силы. Величина *неполной* силы трения покоя равна приложенной сдвигающей силе; величина *полной* силы трения равна предельному значению сдвигающей силы, при котором может начаться относительное движение тел.

Сила трения движения возникает при относительном движении тел. Ее величина не зависит от движущей силы, превышение которой над силой трения вызывает ускорение движения тела.

Величины силы трения движения и предельной силы трения покоя при скольжении зависят от следующих факторов: а) нормальной силы, б) удельного давления на трущихся поверхностях, в) скорости относительного движения, г) материалов трущихся тел, д) гладкости трущихся поверхностей, е) смазки и ж) загрязнения трущихся поверхностей.

Величина силы трения качения, кроме перечисленных факторов, зависит еще от радиусов кривизны поверхностей в месте их соприкосновения.

Ввиду недостаточного развития теории трения наиболее надежным способом определения сил трения является использование экспериментальных данных, полученных в условиях, близких к анализируемому случаю.

При нежидкостном трении наибольшее влияние на величину силы трения в среднем оказывает нормальная сила.

Трение скольжения. Трение скольжения за исключением жидкостного характеризуется формулами (фиг. 29):

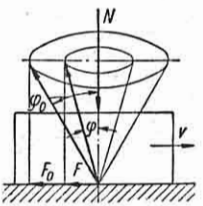
для силы трения движения

$$F = fN;$$

для предельной силы трения покоя

$$F_0 = f_0 N,$$

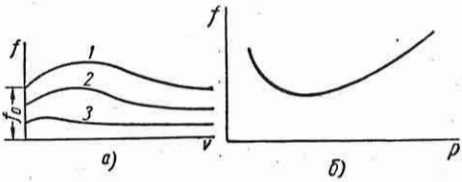
где f — коэффициент трения движения; f_0 — коэффициент трения покоя; N — нормальная сила.



Фиг. 29. Конус трения.

Формула $F = C + f'N$ дает лучшие результаты для диапазона малых давлений, но пользование ею затрудняется из-за отсутствия достаточно полных экспериментальных данных для C и f'.

Коэффициенты трения должны учитывать влияние перечисленных выше факторов на силу трения. Для большинства случаев $f_0 > f$. Обычный характер изменения коэффициента трения в зависимости от скорости скольжения показан на фиг. 30, *а* (*1* — при



Фиг. 30. Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения и давления.

малой нагрузке, *2* — при средней, *3* — при большой) и от удельного давления — на фиг. 30, *б*. Значения коэффициентов трения см. стр. 437.

Угол трения φ образуется вектором полной реакции R поверхности трения и нормалью: $\operatorname{tg}\varphi = f$; $\operatorname{tg}\varphi_0 = f_0$.

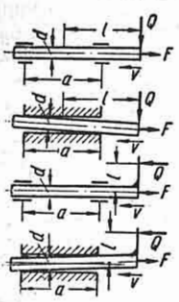
Введение понятия угла трения часто упрощает выводы и расчеты.

Конус трения имеет ось, нормальную к поверхности трения, и угол между образующей и осью, равный углу

Таблица 4

Приведенные коэффициенты трения для некоторых подвижных соединений

Поступательно перемещающийся или вращающийся стержень в двух коротких опорах или в одной опоре с зазором



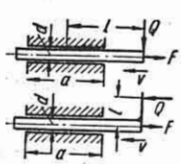
$$F = Q \cdot f_{np}$$

$$M_{mp} = Q f_{np} \frac{d}{2}$$

$$f_{np} = \frac{2l}{a} f$$

f — коэффициент трения скольжения

Поступательно перемещающийся или вращающийся стержень в одной опоре без зазора

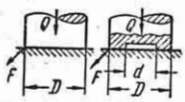


$$F = Q \cdot f_{np}$$

$$M_{mp} = Q f_{np} \frac{d}{2}$$

$$f_{np} = \frac{3l}{a} f$$

Торцевая опора (пята)



$$M_{mp} = Q f_{np} \frac{D}{2}$$

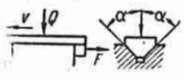
Для сплошной

$$f_{np} = \frac{2}{3} f.$$

Для кольцевой

$$f_{np} = \frac{2}{3} f \left[\frac{D}{D+d} + \frac{d}{D}\right]$$

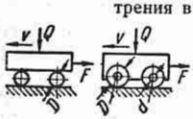
V-образная направляющая симметричного профиля



$$F = Q f_{np}$$

$$f_{np} = \frac{f}{\sin \alpha}$$

Подкладные катки или колеса, без учета трения в подшипниках



$$f_{np} = \frac{2k}{D}$$

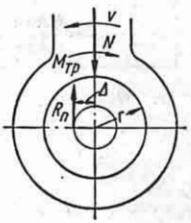
k—коэффициент трения качения

Колеса с учетом трения в подшипниках

$$f_{np} = \frac{d \cdot f + 2k}{D}$$

трения (фиг. 29). При движении изменение направления относительной скорости вызывает соответственное изменение направления полной реакции R с сохранением ее на поверхности конуса с углом φ. При покое изменение величины и направления сдвигающей силы дает такое изменение вектора полной реакции R, при котором он остается внутри конуса трения. Когда сила трения покоя достигнет предельного значения, полная реакция будет находиться на боковой поверхности конуса с углом φ_0.

Смещение реакции у звеньев с вращательным движением вызывается возникающим моментом сил трения (фиг. 31). Смещение $\Delta = f \cdot r$ является плечом пары сил N и $R_n = -N$, которая дает момент трения M_{mp}, действующий против движущего момента.



Фиг. 31. Окружность трения.

Окружность трения описывается радиусом, равным смещению реакции Δ. Во время движения при любом направлении реакции R_n ее вектор должен касаться окружности трения (фиг. 31). Окружность трения используется при учете трения во вращательных парах механизмов.

Приведенный коэффициент трения f_{np} — понятие, используемое для сложных сопряжений, имеющих обычно несколько мест трения и особенности во взаимном расположении действующей силы и трущихся поверхностей и т. п.

f_{np} равно отношению приведенной силы трения к перпендикулярной ей компоненте действующей силы.

Значения приведенных коэффициентов трения для некоторых случаев даны в табл. 4.

Жидкостное трение характеризуется формулой для силы внутреннего трения

$$F = \mu S \frac{\partial u}{\partial y} \quad кГ,$$

где μ — динамический коэффициент вязкости в $кГсек/м^2$; S — площадь трущихся поверхностей в $м^2$; $\frac{\partial u}{\partial y}$ — градиент скорости в $сек^{-1}$.

Характер изменения силы трения от скорости при обильной смазке показан на фиг. 32.

Формула для определения μ по измеренной величине относительной вязкости E в градусах Энглера

$$\mu = 10^{-6} \cdot \gamma \left(0{,}737E - \frac{0{,}635}{E}\right) \text{ кГсек/м}^2,$$

где γ — удельный вес жидкости в в кГ/м^3.

Жидкостное трение обеспечивается, если несущая способность масляного слоя будет равна нормальной силе при заданной скорости относительного движения и при толщине масляного слоя, превышающей сумму высот неровностей на поверхностях трения. При небольшой шероховатости (с наибольшей высотой неровностей до 0,1 толщины масляного слоя) получаем надежное жидкостное трение с характером движения жидкости в зазоре, близким к ламинарному. В таких случаях результаты подсчетов F по приведенной формуле получаются близкими к действительности. При более шероховатых поверхностях трения и большой скорости относительного движения поверхностей движение жидкости в зазоре становится турбулентным, и потери на трение сильно возрастают. Получающийся вследствие этого нагрев масла в зазоре и снижение его вязкости создают опасность разрыва масляного слоя и нарушения жидкостного характера трения.

Фиг. 32. Изменение силы трения в зависимости от скорости скольжения при обильной смазке.

Разновидностью жидкостного трения является трение с газовой смазкой (воздушной, водородной). Особенности теории такого трения обусловливаются сжимаемостью смазочного вещества.

Трение качения, возникающее при перекатывании круглого цилиндра по плоскости, характеризуется формулами (см. фиг. 33):

для силы трения

$$F = \frac{k}{r} N;$$

для момента трения

$$M_{тр} = k \cdot N,$$

где N — нормальная сила; r — радиус цилиндра; k — коэффициент трения качения, имеющий линейную размерность, может быть представлен как величина смещения нормальной реакции $R_n = -N$ в сторону движения (фиг. 33).

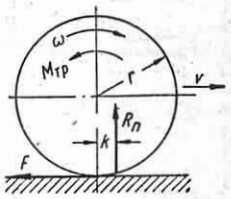
При покое сила и момент трения будут соответственно равны приложенной силе или приложенному моменту. Предельные значения:

силы трения покоя

$$F_0 = \frac{k_0}{r} N,$$

момента трения покоя

$$M_{отр} = k_0 N,$$



Фиг. 33. Трение качения.

где k_0 — коэффициент трения покоя для случая качения.

Значения коэффициентов трения и моментов трения

Значения приведенных коэффициентов трения для некоторых часто встречающихся случаев даны в табл. 4.

Величины коэффициентов трения, найденные в лабораторных условиях (табл. 5 и 6), могут быть использованы лишь для ориентировочных расчетов ввиду возможного несоответствия реальных условий работы трущейся пары условиям проведения экспериментов в лаборатории.

Более точными и надежными являются величины коэффициентов трения для типичных случаев трущихся пар с учетом условий их работы в механизме. Эти данные устанавливаются на основании длительного опыта эксплуатации соответствующих механизмов или специально проводимых испытаний.

Значения f и k для конкретных передач и соединений даны в соответствующих разделах, посвященных расчету деталей машин.

Моменты трения в подвижных соединениях машин, работающих на сильно меняющемся режиме (например, металлорежущие станки общего назначения), удобнее определять по формулам, отличным от

$$M_{тр} = Qfr.$$

Таблица 5

Ориентировочные значения коэффициентов трения скольжения

Материалы трущихся тел		Коэффициент трения f			
		покоя		движения	
		Насухо	Со смазкой	Насухо	Со смазкой
Металл по металлу	Сталь — сталь	0,15	0,1—0,12	0,15	0,05—0,1
	Сталь — мягкая сталь	—	—	0,2	0,1 —0,2
	Сталь — чугун	0,3	—	0,18	0,05—0,15
	Мягкая сталь — чугун	0,2	—	0,18	0,05—0,15
	Сталь — бронза	0,15	0,1—0,15	0,15	0,1 —0,15
	Мягкая сталь — бронза	0,2	—	0,18	0,07—0,15
	Чугун — чугун	—	0,18	0,15	0,07—0,12
	Чугун — бронза	—	—	0,15—0,2	0,07—0,15
	Бронза — бронза	—	0,1	0,2	0,07—0,1
Металл по дереву	Мягкая сталь — дуб	0,6	0,12	0,4—0,6	0,1
	Мягкая сталь — вяз	—	—	0,25	—
	Чугун — дуб	0,65	—	0,3—0,5	0,2
	Чугун — вяз, тополь	—	—	0,4	0,1
	Бронза — дуб	0,6	—	0,3	—
Прочие пары	Дерево — дерево	0,4—0,6	0,1	0,2—0,5	0,07—0,15
	Кожа лицевой стороной — дуб	0,6	—	0,3—0,5	—
	Кожа бахтармой — дуб	0,4	—	0,3—0,4	—
	Кожа — чугун	0,3—0,5	0,15	0,6	0,15
	Резина — чугун	—	—	0,8	0,5
	Пеньковый канат — дуб	0,8	—	0,5	—

Ранее приведенные диаграммы (см. фиг. 28) иллюстрируют характер изменения момента трения $M_{тр}$ в зависимости от передаваемого через вал крутящего момента $M_к$ при различных числах оборотов в минуту. Как видно, при увеличении $M_к$ от нуля величина $M_{тр}$ увеличивается от некоторого начального значения. Такой характер зависимости от нагрузки значительно лучше выражается формулой типа

$$M_{тр} = (P + f'P_n)\frac{d}{2},$$

где P — сила трения, не зависящая от нагрузки; f' — коэффициент в слагаемом,

Таблица 6

Ориентировочные значения коэффициентов трения качения для катка на плоскости

Материалы трущихся тел	Коэффициент трения k в *см*
Мягкая сталь — мягкая сталь	0,005
Закаленная сталь — закаленная сталь	0,001
Чугун — чугун	0,005
Дерево — сталь	0,03—0,04
Дерево — дерево	0,05—0,08

Таблица 7

Моменты трения в подшипниках и зубчатых зацеплениях коробок передач, определяемые по формуле вида $M_{тр} = (P + f' P_n)\frac{d}{2}$

Трущаяся пара		Момент трения в *кГмм*	Примечание
Подшипники качения	Шариковые и цилиндрические роликовые	$M_{тр} = (0{,}005\ d + 0{,}001\ P_n)\frac{d}{2}$	P_n — нормальная сила в *кГ*; d — диаметр вала в *мм*. Справедливо при $n \leqslant 1000$ об/мин и умеренной смазке разбрызгиванием. При консистентной смазке и смазке в масляной ванне коэффициенты в первом слагаемом следует увеличить в 1,5 раза
	Конические и сферические роликовые	$M_{тр} = (0{,}025\ d + 0{,}002\ P_n)\frac{d}{2}$	

Продолжение табл. 7

Трущаяся пара		Момент трения в *кГмм*	Примечание
Подшипники скольжения	При $\frac{\mu \cdot n}{p} > 150$, достаточном подводе смазки и небольших кромочных давлениях	$M_{тр} = \left(3{,}4 \cdot 10^{-11} \frac{d^2}{\Delta} l \cdot n \cdot \mu\right) \frac{d}{2}$	P_n — нормальная сила в *кГ*; d, l — диаметр и длина подшипника в *мм*; Δ — диаметральный зазор в *мм*; n — число об/мин; μ — вязкость масла в сантипуазах; p — среднее удельное давление в *кГ/см²*
	При $\frac{\mu \cdot n}{p} < 150$, или при высоких кромочных давлениях	$M_{тр} = \left(5 \cdot 10^{-11} \frac{d^2}{\Delta} l \cdot n \cdot \mu + 0{,}02\ P_n\right) \frac{d}{2}$	
Войлочные уплотнения	Для одного кольца обыкновенного типа при $d = 20 \div 80$ *мм*	$M_{тр} = 0{,}01\ d^2$	d — диаметр вала в *мм*
Зубчатые зацепления	При шлифованных зубьях	$M_{тр} = \left(10^{-4} c \cdot b \sqrt{v \cdot \mu} + 0{,}08\ P_0\right) \frac{d_0}{2}$	P_0 — окружное усилие в *кГ*; d_0, b — диаметр начальной окружности и ширина шестерни в *мм*; v — окружная скорость в *м/сек*; μ — вязкость масла в сантипуазах; c — коэффициент, равный 3 — 6 при струйной смазке, 5—10 при смазке погружением на высоту зуба и доходящий до 50 при погружении на бо́льшую глубину
	При нешлифованных зубьях	$M_{тр} = \left(10^{-4} c \cdot b \sqrt{v \cdot \mu} + 0{,}10\ P_0\right) \frac{d_0}{2}$	

Примечание. Формулы составлены по экспериментальным данным ЭНИМС [20] и др. для подшипников и зубчатых передач средних размеров.

выражающем силу трения, зависящую от нагрузки; P_n — сила, действующая на трущуюся пару; $\frac{d}{2} = r$ — плечо, на котором приложена сила трения.

Формулы и значения необходимых коэффициентов для определения $M_{тр}$ в кинематических парах зубчатых коробок передач приведены в табл. 7.

ИЗНОС ДЕТАЛЕЙ В МЕХАНИЗМАХ

Виды износа

В практике встречается нормальный и катастрофический износ. Первый может быть заранее оценен и учтен при планировании ремонтных работ, второй выводит машину из строя внезапно.

Уменьшение величины нормального износа и вероятности катастрофического дает увеличение общего срока службы машины, а также снижает стоимость и продолжительность ее ремонтов.

Износом называется постепенное поверхностное разрушение материала, сопровождающееся отделением от него частиц, переносом частиц на сопряженное тело, а также изменением качества поверхности — ее геометрии и свойств поверхностных слоев материала.

Износ происходит вследствие механического, теплового, химического и электрического воздействия на материал соприкасающегося с ним трущегося тела, воздействия свободных твердых частиц другого материала или окружающей среды.

Износ, так же как и трение, связан со сложными, недостаточно изученными явлениями в поверхностных слоях материала.

Истирание наблюдается при относительном движении прижатых друг к другу поверхностей. На истирание расходуется часть энергии трения.

Процесс истирания объясняется следующими явлениями: а) выступающие неровности соприкасающихся деталей при движении задевают друг за друга и механически отрывают частицы металла с поверхностей; б) поверхности приходят на отдельных участках в молекулярное соприкосновение, как бы при-

вариваясь друг к другу; при дальнейшем относительном движении происходит разрушение мест приварки, сопровождающееся отрывом приставших частиц с сопряженных поверхностей; в) аморфные слои приработанных поверхностей в отдельных точках сильно нагреваются и размягчаются; при относительном движении поверхностей размягченные частицы переносятся со своих мест на значительные расстояния, по пути застывают и оказываются отделенными. При истирании, повидимому, имеет место сочетание перечисленных явлений.

Абразивный износ наблюдается при попадании на трущиеся поверхности мелких частиц высокой твердости (абразива шлифовального круга, окалины, песка и т. д.).

При жидкостном трении свободные частицы, имеющие размеры меньше толщины масляного слоя, оказывают сравнительно слабое влияние на износ поверхностей.

При нежидкостном трении, а также когда размер частиц превышает толщину масляного слоя, наблюдается интенсивный износ поверхностей. Следы износа имеют вид мелких продольных канавок.

Когда одна трущаяся поверхность имеет малую твердость, абразивному износу подвергается главным образом другая поверхность; это объясняется более прочным удерживанием частиц абразива на менее твердой поверхности за счет их вминания и, следовательно, меньшим движением частиц абразива относительно мягкой поверхности, чем относительно твердой.

Задирание заключается в быстром образовании продольных канавок значительной глубины (до 1 *мм* и больше). Явление задирания для большинства машин относится к категории катастрофического износа. Процесс образования задиров объясняется сцеплением трущихся поверхностей в отдельных местах, вырыванием значительного количества металла с одной поверхности и появлением нароста на другой. При дальнейшем относительном движении поверхности нарост вызывает появление задира и дальнейшее прогрессивное разрушение поверхности.

Бо́льшая опасность задира получается при поверхностях из одинаковых металлов. Попадание абразивных частиц может послужить самостоятельной причиной задира (при достаточно крупных частицах) или способствовать началу описанного выше процесса **вследствие** повышения удельного давления в точке, расположенной впереди зерна абразива, где происходит выпучивание металла.

Усталостное выкрашивание заключается в отслаивании частиц металла с трущихся поверхностей в результате усталости при периодически изменяющихся нагрузках. Явление усталостного износа обычно наблюдается в высших кинематических парах, главным образом при обильной смазке. Последнее объясняется внедрением жидкости в микрощели поверхности, что способствует разрушению последней.

Постепенное смятие наблюдается при недопустимо больших удельных давлениях или при плохо обработанных, не прошедших предварительной приработки, поверхностях.

Коррозионный износ является следствием химического или электрического воздействия среды; на интенсивность коррозии оказывает большое влияние нагрев поверхности детали, ускоряющий процесс износа.

Факторы, влияющие на износ трущихся поверхностей: а) материалы трущихся поверхностей и их термообработка; б) качество поверхностей трения; в) степень загрязнения мест трения; г) характер и род смазки; д) величина удельного давления; е) величина удельной работы трения; ж) скорость.

Обычно износ металлов получается тем меньше, чем выше их твердость. Поэтому для повышения износостойкости рекомендуется применять термическую обработку стали и чугуна, насыщение поверхностных слоев соответствующими веществами (цементация, азотизация), а также поверхностные покрытия износостойким материалом (например, хромом).

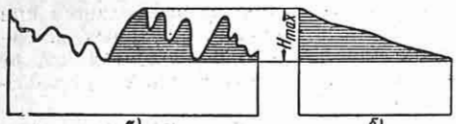
При необходимости закалки отдельных участков крупных стальных и чугунных деталей производится поверхностный нагрев нужных мест токами высокой частоты или газовым пламенем.

Высота и характер неровностей на трущихся поверхностях оказывают большое влияние на первоначальную стадию износа и изменение размера детали после приработки.

Характер неровностей оценивается опорной кривой (фиг. 34, *б*), дающей возможность определять, какую часть полной площади поверхности, профиль которой показан на фиг. 34, *а*, соста-

вляет опорная площадь в различных по высоте сечениях. Очевидно, вначале износ поверхности будет более интенсивным вследствие малой опорной площади. Высота неровностей характеризует зону интенсивного износа. ГОСТ 2789-51 дает классификацию чистоты поверхностей по среднему квадратическому отклонению микронеровностей и средней высоте микронеровностей.

Применение отделочных операций при обработке поверхностей уменьшает высоту неровностей и несколько улучшает форму опорной кривой, обеспе-



Фиг. 34. Профиль поверхности и опорная кривая.

чивая в верхних сечениях значительную опорную площадь.

Улучшение поверхностей трения происходит также в процессе первоначальной приработки, которая для устранения опасности задиров часто производится на пониженных режимах работы (см. стр. 433).

По материалам ЭНИМС износ стальных закаленных направляющих (сталь 45, $R_C = 50$) токарных станков в среднем на 20% меньше, чем чугунных незакаленных; применение щитков для защиты направляющих уменьшает износ последних на 30—50%, применение принудительной смазки — на 15—20% [19].

Условия работы изнашивающихся деталей

Распределение износа между трущимися поверхностями, а также по их длине и ширине имеет большое значение для работы механизма, долговечности деталей и стоимости ремонта.

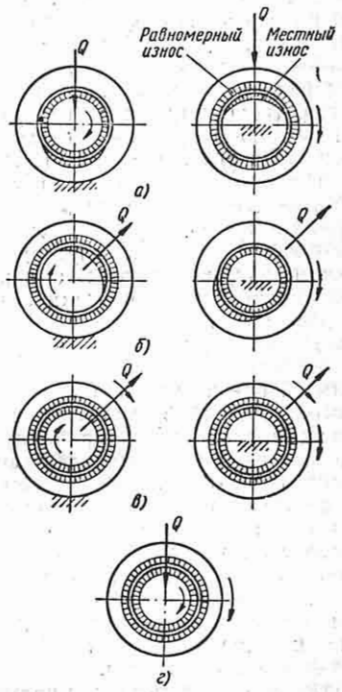
В каждой трущейся паре предпочтителен более сильный износ простой и легко заменяемой детали и менее сильный — сложной и дорогой. При конструировании машин это учитывается соответствующим выбором материалов: сложная деталь делается из более твердого металла и часто подвергается термической обработке и поверхностным покрытиям; простая деталь (например, втулки, вкладыши и т. д.) выполняется из более мягкого металла.

Распределение износа по поверхности трения зависит от формы последней и от условий работы пары.

Во вращательной паре с одним неподвижным и одним вращающимся элементами имеют место три следующих характерных случая распределения износа:

1. *Нагрузка постоянного направления* — износ вращающегося элемента будет равномерным по всей поверхности, а неподвижного элемента — сосредоточен на одном участке поверхности. В результате ось вращения сместится в сторону местного износа; при этом центричность вращения детали и ее балансировка не нарушаются. Неподвижным может быть как охватывающий, так и охватываемый элемент (фиг. 35, *а*).

2. *Вектор нагружающей силы следует за движением вращающегося элемента* (фиг. 35, *б*) — износ неподвижного эле-



Фиг. 35. Распределение износа во вращательной паре.

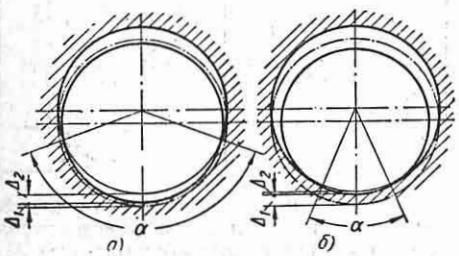
мента получается равномерным, износ вращающегося элемента — местным. Ось вращения после износа поверхно

стей соприкосновения не изменит своего положения, но вращающаяся деталь сместится относительно нее в сторону местного износа, что может привести к заметному увеличению дисбаланса.

3. *Вектор нагружающей силы и подвижный элемент пары вращаются с различными угловыми скоростями* (фиг. 35, *в*) — износ обеих трущихся поверхностей получается равномерным. К этому же случаю относится вращение с различной скоростью двух элементов при постоянном направлении вектора нагружающей силы (фиг. 35, *г*).

В двух первых случаях линейный суммарный износ может получиться меньшим, если из более износостойкого (твердого) материала будет изготовлена деталь с местным характером износа. Однако на практике обычно применяется обратное соотношение твердостей материалов по следующим соображениям:

а) Сочетание слабого равномерного износа Δ_1 одной детали с более сильным местным износом Δ_2 другой детали (фиг. 36, *а*) не приводит к существенному нарушению характера контакта



Фиг. 36. Характер контакта изношенных пар.

поверхностей. Незначительное по величине уменьшение радиуса кривизны твердой равномерно изнашивающейся детали компенсируется местным износом другой детали; при этом зона контакта α (фиг. 36, *а*) практически не уменьшается, и удельное давление на поверхностях не возрастает.

Если же соотношение твердостей взять обратным рассмотренному, то сильный равномерный износ Δ более мягкой детали при слабом местном износе Δ_2 твердой детали приведет к значительному уменьшению зоны контакта α (фиг. 36, *б*), увеличению удельного давления и повышению интенсивности износа.

б) Замена детали с местным износом новой восстанавливает нарушенное первоначальное положение оси вращения или центричность вращения. Равномерное распределение износа в сочетании с большей твердостью металла обеспечивает незначительный износ более сложной и дорогой детали без нарушения в ней центричности изнашивающейся поверхности; местный характер износа в сочетании с мягким металлом концентрирует износ на дешевой, легко заменяемой детали (обычно — втулка или вкладыш), благодаря чему ремонт машины упрощается.

Третий случай (фиг. 35, *в* и *г*) характеризуется наименьшей величиной линейного суммарного износа поверхностей. Смещения оси вращения вследствие износа здесь не произойдет, нарушение же центричности вращения будет равно сумме радиальных износов обоих элементов. Удельная работа трения, приходящаяся на единицу площади поверхности и равная произведению силы трения на относительное перемещение поверхностей, будет одинакова и равномерно распределена по обеим поверхностям. Поэтому выбор соотношения твердостей поверхностей диктуется только желанием сконцентрировать износ на той или иной детали по соображениям удобства ремонта. Обычно в таких случаях обе поверхности стремятся выполнить с возможно большей износостойкостью. Третий случай в чистом виде на практике встречается редко. Примером использования рассмотренного принципа может служить посадка неподвижного наружного кольца шарикоподшипника в корпус механизма с небольшим натягом; как установлено практикой, кольцо при работе постепенно поворачивается, обеспечивая равномерный износ дорожки, по которой катаются шарики.

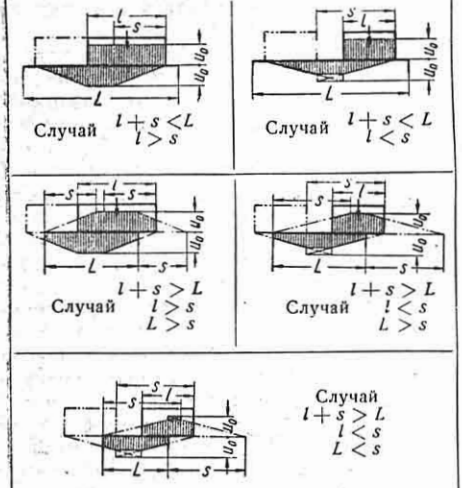
В поступательной паре всегда наблюдается тенденция к неравномерному износу поверхностей в связи с тем, что отдельные участки последних периодически выходят из соприкосновения.

Для количественной оценки ожидаемой неравномерности износа можно пользоваться диаграммами распределения удельной мощности сил трения по поверхностям. Для построения этой диаграммы требуется установить распределение относительного скольжения по поверхностям трения и закон изменения удельного давления в зависимости от перемещения деталей для различных

точек поверхностей трения. Построение диаграмм относительного скольжения для разных соотношений между длиной хода и размерами поверхностей трения показано в табл. 8.

Таблица 8

Распределение относительного скольжения по длине поступательно движущихся деталей

Построение диаграмм удельного скольжения

s — длина хода верхней детали относительно нижней; l — длина верхней детали; L — длина нижней детали; u_0 — наибольшее возможное или действительное относительное скольжение

Наибольшая величина относительного скольжения

$$u_0 = \frac{s \cdot n}{30} \quad м/сек,$$

где s — длина хода в $м$; n — число двойных ходов в минуту.

В том случае, когда равнодействующая Q сил, нагружающих верхнюю деталь, находится на ее середине, для двух первых случаев, указанных в табл. 8, удельное давление между деталями остается постоянным, и диаграмма относительных перемещений будет одновременно диаграммой удельной мощности сил трения.

Величине u_0 $м/сек$ на диаграмме удельных скольжений будет соответствовать удельная мощность сил трения

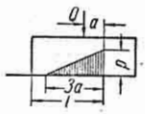
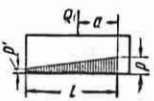
$$\nu_0 = f \cdot p_0 \cdot u_0 \quad кГм/сек \cdot см^2,$$

где f — коэффициент трения; p_0 — удельное давление между поверхностями в $кГ/см^2$.

В трех последних случаях табл. 8 диаграммы удельной мощности требуют кропотливых построений с учетом неравномерного распределения давления на поверхности трения при выходе верхней детали за пределы нижней. Диаграммы распределения давлений и необходимые формулы приведены в табл. 9.

Таблица 9

Удельное давление на соприкасающихся поверхностях при линейном законе распределения

Случай	Схема	Формулы удельных давлений
$3a \leqslant l$		$p = \frac{2}{3}\frac{Q}{a \cdot b}$, где b — ширина поверхности контакта
$3a \geqslant l$		$p = \frac{2Q}{lb}\left(2 - \frac{3a}{l}\right)$; $p' = \frac{2Q}{lb}\left(\frac{3a}{l} - 1\right)$, где b — ширина поверхности контакта

Крайняя точка нижней детали характерна тем, что на нее наиболее длительное время действуют максимальные давления, получающиеся в связи с выдвижением верхней детали за пределы нижней.

График на фиг. 37 дает возможность быстро определить мгновенное p и среднее $p_{ср}$ значения удельного давления в крайней точке нижней поверхности при перемещении верхней детали из положения, в котором крайние точки обеих деталей совпадают, в положение наибольшего выдвижения верхней детали.

Для крайней точки нижней поверхности удельная мощность сил трения

$$\nu' = f \cdot p_{ср} \cdot u \quad кГм/сек \cdot см^2,$$

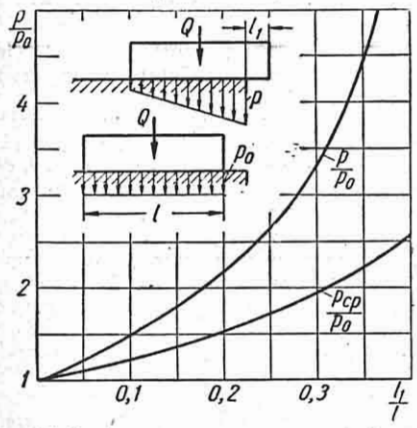
где $p_{ср}$ — среднее удельное давление, определяемое при помощи графика на фиг. 37, в $кГ/см^2$; u — относительное скольжение в $м/сек$, определяемое по со-

ответствующей диаграмме (табл. 8) или по формуле

$$u = u_0 \frac{l_1}{s},$$

где l_1 — величина выдвижения детали.

Неравномерный износ поверхностей со временем приводит к искажению их формы и нарушению правильного контакта. Чтобы ослабить это явление, следует для детали, имеющей равномерное или близкое к нему распределение удельной мощности сил трения, выбирать менее твердый материал, чем для



Фиг. 37. График для определения давлений в крайней точке нижней поверхности скольжения.

сопряженной детали, работающей с сильно изменяющейся по длине удельной мощностью сил трения.

Постоянство режима работы пары облегчает борьбу с износом. Например, если вал работает с постоянным числом оборотов в минуту, имеется возможность выбрать для его подшипников наивыгоднейший режим жидкостного трения; если же число оборотов в минуту меняется в пределах 1 : 50 (металлорежущие станки), становится невозможным обеспечить жидкостное трение в подшипниках на всем диапазоне скоростей вращения. В этом случае выгодно применять подшипники качения.

Режим работы кинематических пар нарушается при разбеге и выбеге машины. Наблюдениями установлено, что подшипники автомобильного двигателя за периоды разбега и выбега изнашиваются больше, чем за все время работы при установившемся движении. Сдной из действенных мер борьбы с повышенным износом при разбеге машины является обильная подача смазки насосом или ручным лубрикатором перед пуском машины.

Пути изучения износа

Явление износа связано со сложными процессами в поверхностных слоях материала. Изучение явлений износа базируется на экспериментальных работах.

Основные направления изучения процесса и получения практических данных по износу следующие:

1. *Лабораторные испытания, проводимые на образцах установленной формы и размеров.* Эти работы дают материал для теоретических выводов, а также выявляют зависимость износа от отдельных факторов (материал, термообработка, состояние поверхности, смазка и т. п.). Результаты исследований могут найти ограниченное использование в практике, главным образом — для сравнительных оценок различных трущихся пар.

2. *Лабораторные (стендовые) испытания, проводимые на образцах, соответствующих встречающимся на практике парам* (например, различным червячным, винтовым и другим передачам). Условия проведения испытаний близки к практическим условиям работы. Строгий учет отдельных факторов, возможный в лабораторной обстановке, позволяет выявить влияние отдельных причин на интенсивность износа исследуемых пар. Результаты такого исследования могут быть использованы при конструировании машин, испытания могут выявить новые, более целесообразные конструкции пар рассматриваемого типа.

3. *Наблюдения за износом деталей в условиях производственной работы машин.* Преимуществом этого пути изучения износа является полное соответствие его результатов практическим условиям работы машин. Недостатки: трудность учета влияния отдельных факторов, трудность надежного контроля за условиями работы отдельных пар, менее тщательные, чем в лабораторных условиях, замеры. Для устранения случайных причин необходимо большое количество наблюдений. Полученные результаты могут быть использованы как лицами, занимающимися эксплуатацией машин, так и конструкторами.

Для изучения износа деталей машин используются все три указанные направления в работе.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

Основные понятия

Факторы, влияющие на точность работы нового механизма:

а) отклонения от заданного движения, зависящие от выбранной схемы механизма, встречаются главным образом в механизмах с одними низшими парами для приближенного осуществления движения;

б) технологически неизбежные отклонения в размерах и форме деталей — имеют значение для большинства машин — регламентируются стандартизованной системой допусков;

в) упругие деформации звеньев под влиянием действующих сил — жесткость звеньев имеет существенное значение для большинства механизмов;

г) температурные деформации звеньев — особенно сильно проявляются при неравномерном нагреве последних;

д) относительные смещения деталей под действием сил за счет неплотностей и деформаций контактных поверхностей в неподвижных соединениях; сопротивляемость смещению носит название жесткости стыков; она имеет большое значение для машин с высокой общей жесткостью, например для металлорежущих станков;

е) смещения звеньев за счет зазоров и толщины слоев смазки в кинематических парах; влияние зазоров особенно сильно проявляется при нежидкостном трении в геометрически замкнутых парах, которые находятся под действием изменяющихся по направлению нагрузок; влияние толщины масляного слоя сказывается при жидкостном и отчасти при полужидкостном трении.

Для механизмов и машин важна не только их первоначальная точность работы, но и способность сохранять эту точность при длительной эксплуатации, а также при длительном хранении машины.

Дополнительные факторы, влияющие на точность работы механизма, находившегося в эксплуатации:

а) износ трущихся поверхностей, особенно за счет истирания и смятия (см. стр. 438);

б) остаточные деформации деталей, особенно смятие в неподвижных соединениях плохо обработанных поверхностей, испытывающих большие удельные давления;

в) постепенные деформации деталей (коробление) за счет остаточных напряжений, полученных при технологических процессах, связанных с их нагревом до высоких температур. Эти деформации особенно существенны для крупных литых деталей (например, станин), не прошедших естественного или искусственного старения, и появляются как во время эксплуатации машин, так и при длительном их хранении.

Влияние всех перечисленных факторов на точность работы механизмов еще не вполне изучено.

В задачу раздела теории точности механизмов, изучающей теоретически неизбежные для некоторых схем механизмов отклонения получающегося движения от заданного движения, входит определение основных размеров механизма (метрический синтез) из условия получения наименьших отклонений на интересующем нас участке движения. В настоящее время объектами исследования являются плоские механизмы с одними низшими парами. Эти механизмы благодаря разнообразию движения шатуна дают возможность приближенно воспроизводить практически почти любое плоско-параллельное движение. Необходимые сведения по этому вопросу имеются в специальной литературе.

Основоположником указанного раздела теории точности механизмов является П. Л. Чебышев, разработавший теорию наилучшего приближения траектории точки шатуна к заданной кривой.

Практически более важный раздел теории точности механизмов посвящен изучению нарушений заданного движения механизма вследствие ошибок в размерах и форме звеньев. Основоположниками этого раздела теории точности являются советские ученые Н. А. Калашников [15] и Н. Г. Бруевич [8]. Большинство ошибок имеет случайный характер, вследствие чего и теория точности механизмов носит теоретико-вероятностный характер. В задачу этого раздела входят определение ожидаемых величин ошибок в размерах звеньев и нахождение по ним интересующих нас ошибок механизма.

Основные определения

Идеальным механизмом принято называть механизм с абсолютно точными размерами всех звеньев; *действительным механизмом* условно называют механизм, имеющий ошибки в основных размерах и форме звеньев (первичные ошибки).

Первичные ошибки делятся на: а) систематические — постоянные или изменяющиеся по определенному закону; б) случайные —величины которых нельзя заранее предугадать; в) грубые — недопустимо большие ошибки, подлежащие устранению (обычно отклонения, выходящие за пределы допусков).

Распределение ошибок по указанным группам зависит от того, анализируется ли конкретный экземпляр механизма или достаточно большая серия одинаковых механизмов без учета индивидуальных особенностей каждого экземпляра.

Часть первичных ошибок является технологически неизбежной (например, ошибки во взаимном расположении элементов кинематических пар в звене и отдельных поверхностей в элементе кинематической пары), часть представляет собой отклонения, необходимые для обеспечения надлежащих эксплуатационных свойств механизма (например, зазоры, заполненные смазкой, в быстроходных вращательных парах).

Первичные ошибки могут быть скалярными или векторными, плоскими и пространственными. Плоская векторная ошибка может быть заменена двумя скалярными, пространственная — тремя скалярными.

Ошибки механизма характеризуют отклонения движения ведомых и некоторых промежуточных звеньев от идеально точного движения

Ошибкой положения механизма называется разница положений ведомых звеньев действительного и идеального механизмов при одинаковых положениях ведущих звеньев.

Ошибкой перемещения механизма называется разница перемещений ведомых звеньев действительного и идеального механизмов при одинаковых перемещениях ведущих звеньев обоих механизмов.

Ошибками положения и перемещения ведомого звена механизма называются разницы соответственно положений и перемещений ведомых звеньев действительного и идеального механизмов, полученные не только вследствие первичных ошибок механизма, но и от неточности положений ведущих звеньев.

Ошибками скоростей и ускорений механизма называются разности между скоростями и ускорениями ведомых звеньев действительного и идеального механизмов при одинаковых положениях ведущих звеньев.

Динамическими ошибками механизма называется разность сил реакций в действительном и идеальном механизмах при одинаковых положениях ведущих звеньев. Эти ошибки получаются в виде отклонений сил реакций или реактивных импульсов.

Нахождение ошибок положения и перемещения механизма по первичным ошибкам

Для встречающихся в практике малых величин ошибок по сравнению с размерами звеньев справедливы следующие положения:

1. Влияние каждой первичной ошибки на ошибку положения ведомого звена не зависит от других первичных ошибок (принцип независимости действия первичных ошибок).

2. Ошибка положения механизма, вызванная какой-либо одной первичной ошибкой, равняется произведению последней на передаточное отношение преобразованного механизма, равное отношению скорости его ведомого звена к скорости ведущего.

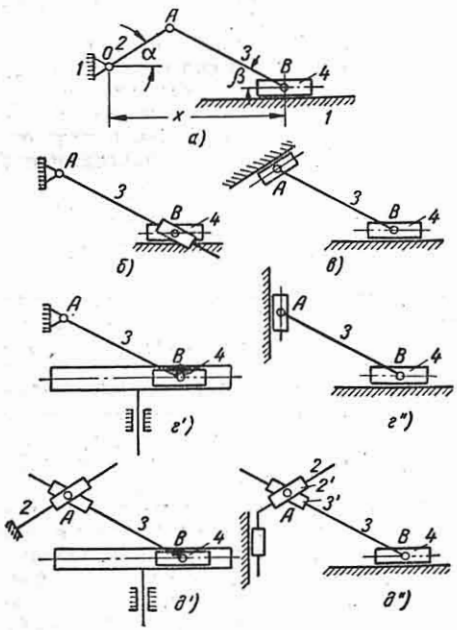
Преобразованный механизм строится таким образом, чтобы он давал соответствующее перемещение ведомого звена при перемещениях, имитирующих изменение размеров звеньев действительного механизма на величины первичных ошибок (фиг. 38).

Ошибка положения механизма, так же как и ошибка положения ведомого звена механизма, может быть найдена графическим, графо-аналитическим или аналитическим способом.

Графический способ состоит в выявлении преобразованных механизмов — особого для каждой первичной ошибки или общего для всех первичных ошибок — и построении для них планов малых перемещений с помощью обычных приемов построения планов скоростей. Полная ошибка положения механизма определяется алгебраическим суммированием ошибок положения, каждая из которых получается от одной первичной ошибки, или непосредственно построением плана

малых перемещений с учетом сразу всех первичных ошибок.

В качестве примера на фиг. 38 и 39 показано определение ошибок положения ползуна *4* смещенного кривошипно-шатунного механизма (фиг. 38, *а*) по заданному угловому положению ведущего



Фиг. 38. Схемы анализируемого кривошипно-шатунного механизма и преобразованных механизмов.

кривошипа *2* (угол α) и известным первичным ошибкам в основных размерах звеньев механизма.

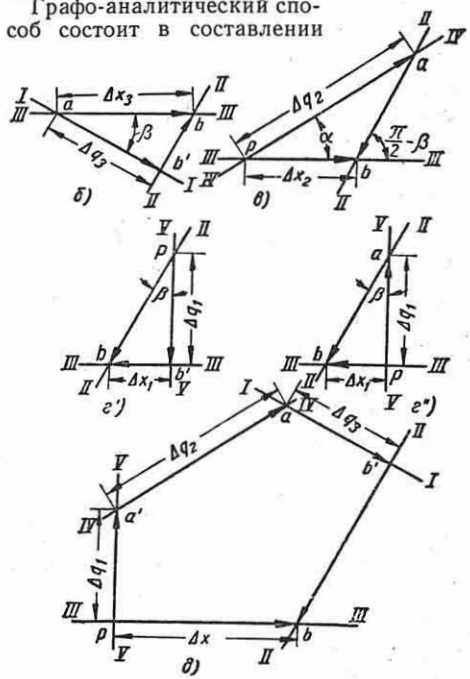
По схеме преобразованного механизма (фиг. 38, *б*) путем построения плана малых перемещений (фиг. 39, *б*) определяют ошибку Δx_3 положения ползуна, получающуюся вследствие известной по величине первичной ошибки Δq_3 в длине шатуна *3*. Далее по схеме на фиг. 38, *в* и соответствующему плану на фиг. 39, *в* определяют ошибку Δx_2 положения ползуна, получающуюся вследствие первичной ошибки Δq_2 в величине радиуса кривошипа *2*. И, наконец, по схеме на фиг. 38, *г'* или 38, *г"* и плану на фиг. 39, *г'* или 39, *г"* определяют ошибку Δx_1 положения ползуна, получающуюся от первичной ошибки Δq_1 в величине смещения центра шарнира *O* от прямолинейной траектории движения точки *B*. Полная ошибка положения ползуна $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$, где ошибки, направленные вправо, считаются положительными, направленные влево — отрицательными.

Полная ошибка Δx положения ползуна может быть также получена построением одного плана малых перемещений (фиг. 39, *д*) для преобразованного механизма, имеющего схему по фиг. 38, *д'* или по фиг. 38, *д"*.

Во всех построенных планах малых перемещений: *I-I* — параллельно *AB*, *II-II* — перпендикулярно *AB*, *III-III* — параллельно направлению движения точки *B*, *IV-IV* — параллельно *OA*, *V-V* — перпендикулярно направлению движения точки *B* (см. фиг. 38 и 39).

Ввиду малых величин первичных ошибок план малых перемещений строится в сильно увеличенном масштабе, что благоприятно влияет на точность результата.

Графо-аналитический способ состоит в составлении



Фиг. 39. Планы малых перемещений кривошипно-шатунного механизма по фиг. 38.

формул на базе геометрических зависимостей плана малых перемещений.

Аналитический способ целесообразен для сравнительно простых часто повторяющихся схем механизмов.

Ошибка перемещения механизма равна разности ошибок положения механизма в конечном и в начальном положениях последнего. Такая же зависимость существует между ошибками перемещения и положения ведомого звена механизма.

Пользуясь указанным соотношением, легко определить ошибки перемещения по найденным ошибкам положения.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Основные положения

Теория механизмов занимается некоторыми основными вопросами проектирования машин и механизмов.

Качество выполнения основной задачи и экономическая эффективность являются критериями целесообразности применения всякой машины.

Экономическая эффективность машины определяется: 1) производительностью, 2) степенью автоматизации, 3) первоначальной стоимостью машины, 4) сроком службы машины, 5) расходами по эксплуатации.

Большое значение имеют также малая металлоемкость и минимальное применение дефицитных материалов при изготовлении и эксплуатации машины.

На отдельных этапах проектирования конструктор должен учитывать ряд конкретных требований, количественная оценка влияния которых на работу и на экономическую эффективность машины часто бывает весьма затруднительной; в качестве примеров подобных требований можно привести такие, как легкий доступ к отдельным узлам машины, легкий монтаж и демонтаж, удобное расположение органов управления и т. п.

Прежде чем приступить к проектированию, выбирают принцип действия машины, исходя из ее назначения и основных условий работы. Выбор принципа действия требует от конструктора большого опыта и знания характера рабочего процесса машины. Далее, основное задание преобразовывают в кинематическое и расчленяют его на кинематические задания для проектирования отдельных узлов (механизмов) машины.

На этом подготовительная работа заканчивается, и можно приступить к проектированию.

Процесс проектирования механизма можно разбить на следующие этапы: 1) выбор типа механизма и составление структурной схемы; 2) составление кинематической схемы; 3) конструктивная разработка механизма.

Выбор типа механизма и составление структурной схемы

Выбор типа механизма в каждом отдельном случае является весьма ответственным этапом проектирования, оказывающим большое влияние на простоту и эксплуатационные качества механизма.

Плоский механизм может быть применен тогда, когда кинематическое задание предусматривает движение всех звеньев в параллельных плоскостях. После того как возможность применения плоского механизма установлена, решается вопрос, какой тип механизма возможно и целесообразно использовать для выполнения поставленной кинематической задачи.

Кинематическая задача заключается в воспроизведении заданных или обусловленных движений или, точнее, в преобразовании движения ведущего звена в заданные или обусловленные движения ведомых звеньев. Так как возможность воспроизведения движений для каждого механизма определяется характером применяемых кинематических пар, то с этой точки зрения плоские механизмы удобно разбить на три следующих типа: 1) механизмы с одними поступательными парами; 2) механизмы с одними вращательными или с вращательными и поступательными парами; 3) механизмы, имеющие высшие пары.

В механизме с одними поступательными парами относительное движение любых двух звеньев получается прямолинейно-поступательным и отношение между скоростями звеньев постоянным. Таким образом, механизмы первого типа пригодны для преобразования прямолинейно-поступательного движения ведущего звена в прямолинейно-поступательные движения ведомых звеньев с постоянным отношением скоростей и с соблюдением заданных направлений движения звеньев.

В механизмах с одними вращательными или с вращательными и поступательными парами для получения сложного относительного движения двух каких-либо звеньев приходится вводить между ними промежуточные звенья. При помощи рассматриваемых механизмов

точно воспроизвести заданное относительное движение двух звеньев в общем случае невозможно, и приходится удовлетворяться приближенным решением задачи. Обычно на относительное движение интересующих нас звеньев накладывается лишь некоторое конечное число условий. Примером последних может служить требование, чтобы в своем движении звенья проходили через несколько заданных относительных положений. Чем точнее требуется воспроизвести заданное движение звеньев или чем большее число условий приходится налагать на их движение, тем большее число звеньев и пар должен иметь механизм, тем более сложным он получается. Поэтому достаточно точное решение сложных кинематических задач при помощи механизмов второго типа может привести к механизмам с довольно большим числом звеньев.

В механизмах с высшими парами сопряженные звенья могут совершать, вообще говоря, любое наперед заданное относительное движение, характер которого определяется соответствующим профилированием элементов пары. Это ценное свойство высшей пары позволяет получать механизмы, которые при малом числе звеньев воспроизводят весьма сложные движения.

Из приведенной характеристики механизмов 1-го, 2-го и 3-го типов видно, что все задачи о воспроизведении движений, решающиеся при помощи плоских механизмов с одними низшими парами, могут быть решены посредством механизмов, имеющих высшие пары.

Замена механизма с одними поступательными парами механизмом 3-го типа никакого выигрыша в числе звеньев не дает и может оказаться целесообразной в том случае, когда желательно сократить число пассивных связей механизма.

При одинаковых возможностях применения механизмов 2-го и 3-го типов необходимо учитывать следующие преимущества механизмов с одними низшими парами: а) удобство регулирования относительного движения звеньев путем изменения одного или нескольких основных размеров механизма; решение подобной задачи в механизмах с высшими парами встречает бо́льшие конструктивные трудности и поэтому редко осуществляется; б) легкая компенсация износа в шарнирах и поступательных парах посредством соответствующих регулировочных устройств (например, клиньев в направляющих станка).

Отдать предпочтение тому или иному варианту в сомнительных случаях можно лишь в результате совместного рассмотрения кинематических схем или даже конструктивных чертежей механизмов. Обычно о сравнительной сложности механизмов можно судить по их структурным схемам.

Структурная схема должна обеспечить принужденность движения механизма и возможность спроектировать механизм, звенья которого совершали бы заданные или соответствующим образом обусловленные движения.

Необходимыми условиями получения механизма принужденного движения являются: а) правильное соотношение между числом звеньев и числом кинематических пар различных типов, устанавливаемое соответствующими структурными формулами; б) правильный порядок соединения отдельных звеньев в механизм посредством кинематических пар.

Второй вопрос структурного синтеза заключается в выборе структурной схемы, по которой можно было бы построить механизм для выполнения того или иного конкретного задания.

Составление кинематической схемы

Как было указано, кинематическая схема в отличие от структурной имеет основные размеры, определяющие кинематику механизма. Отыскание этих размеров и является задачей так называемого метрического синтеза механизмов. Все существующие методы метрического синтеза предполагают наличие структурной схемы.

Исключение составляет экспериментальный метрический синтез, заключающийся в отыскании методом проб точек плоской системы, траектории движения которых относительно другой плоской системы мало отличаются от окружностей или шатунных кривых. В этом случае структура механизма зависит от систем, при рассмотрении относительного движения которых нам удалось найти упомянутые точки, и от вида траекторий этих точек (окружности или шатунные кривые).

Метрический синтез механизмов производится по заданию, в которое включаются не только чисто кинематические условия, но также условия динамические и даже конструктивные.

К динамическим условиям относят выдерживание в известных пределах угла передачи или угла давления, сильно влияющих на работоспособность механизма.

Углом давления θ называется угол между вектором абсолютной скорости той точки ведомого звена, к которой приложена движущая сила, и вектором движущей силы без учета его отклонения вследствие трения в кинематических парах.

Углом передачи γ называется разность между прямым углом и углом давления.

Для различных типов механизмов можно пользоваться не приведенными здесь общими определениями θ и γ, а более удобными частными определениями; некоторые из них указаны далее.

К конструктивным относятся условия, налагаемые на расположение отдельных шарниров, и предварительное задание некоторых основных размеров звеньев.

Составление кинематических схем механизмов 1-го типа сводится к определению углов расположения поступательных пар и трудностей не представляет.

Метрический синтез механизмов 2-го типа представляет большие математические трудности. Аналитическое решение практически применимо только в элементарно простых случаях, что заставляет пользоваться графическими и графо-аналитическими методами (см. стр. 459). Практическое значение имеет экспериментальный синтез плоских механизмов.

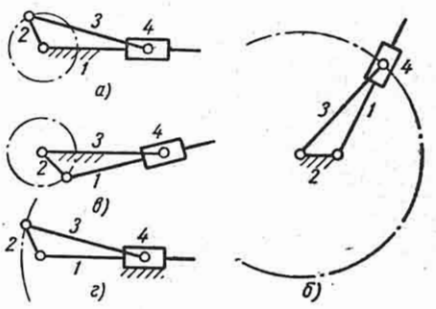
Метрический синтез механизмов 3-го типа заключается в профилировании элементов высших пар и выгодно отличается своей простотой от синтеза механизмов 2-го типа. Последнее обстоятельство часто является решающим при выборе того или иного типа механизма.

Нахождение конструктивных вариантов (преобразование механизмов)

Для получения новых кинематических схем и вариантов конструктивных компоновок механизмов с одной и той же кинематической схемой используются следующие практические приемы преобразования механизмов:

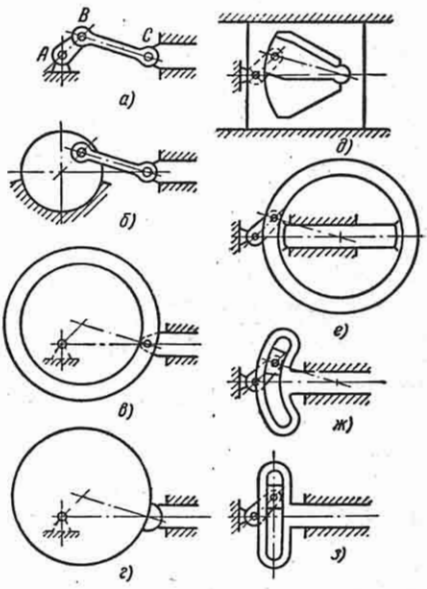
1. *Превращение в стойку различных звеньев кинематической цепи* дает новые кинематические схемы механизмов.

Пример. Из кинематической цепи, состоящей из звеньев *1*, *2*, *3* и *4* и имеющей три вращательные и одну поступательную пару, можно получить кривошипно-шатунный (фиг. 40, *а*), кривошипно-кулисный с вращающейся кулисой (фиг. 40, *б*), кривошипно-кулисный с качающейся кулисой (фиг. 40, *в*) и коромыслово-ползунный (фиг. 40, *г*) механизмы.



Фиг. 40. Преобразование механизма путем превращения в стойку различных его звеньев.

2. *Расширение цапф вращательных кинематических пар* до конечных значений радиуса дает различное оформление механизмов без изменения кинематической схемы; при расширении до бесконечно большого радиуса — превращение вращательной пары в поступательную.



Фиг. 41. Преобразование механизмов путем расширения цапф и обращения кинематических пар.

3. *Обращение кинематических пар* (меняются местами охватывающий и охватываемый элементы пары) дает новые

оформления механизмов без изменения кинематической схемы.

Пример. Используя способы расширения цапф, обращения пар и ограничивая элементы пар отдельными участками, получаем различные варианты кривошипно-шатунного механизма с неизменной кинематической схемой (фиг. 41, *а—ж*), а при увеличении радиуса элемента одной пары до бесконечности — кривошипно-кулисный механизм с поступательно движущейся кулисой (фиг. 41, *з*).

На фиг. 41: *а*—исходный кривошипно-шатунный механизм; *б* — механизм, полученный из исходного путем расширения цапфы шарнира *А*; *в* — механизм, полученный из исходного путем расширения цапфы шарнира *В* (кривошип обратился в эксцентрик, шатун получил кольцевую форму); *г* — геометрически незамкнутый механизм, полученный в результате совместного расширения цапф шарниров *В* и *С* (кривошип обратился в эксцентрик, шатун принял форму полумесяца); *д* — механизм, полученный из исходного путем расширения одного участка цапфы шарнира *С* (фигурный шатун помещается в фигурном вырезе ползуна); *е* — механизм, полученный путем расширения цапфы шарнира *С* (шатун приобрел кольцевую форму, ползун — круглую внешнюю форму); *ж* — механизм, полученный из предыдущего путем использования отдельного участка кольцевого шатуна (шатун приобрел форму дугового кулисного камня, ползун — форму дуговой кулисы с прорезью); *з* — кривошипно-кулисный механизм, полученный из предыдущего посредством дальнейшего расширения цапфы шарнира *С* до радиуса, равного бесконечности (шатун обратился в кулисный камень, ползун — в поступательно движущуюся кулису).

В результате преобразований способом расширения цапф внешние очертания звеньев часто меняются до неузнаваемости; например, стержень с двумя шарнирами на концах приобретает форму кольца, эксцентрика, полумесяца, дугового кулисного камня и т. п.

Примечание. Список использованной литературы см. на стр. 531—532.

ГЛАВА XX

СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИЗМАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

МЕХАНИЗМЫ С ОДНИМИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ

Общие сведения

Назначение. Плоские и пространственные механизмы с одними поступательными парами пригодны для преобразования прямолинейно-поступательного движения ведущего звена в прямолинейно-поступательные движения ведомых звеньев по заданным направлениям и с постоянным отношением скоростей. Эти механизмы применяются, например, в вырезных и вытяжных штампах, в приспособлениях к станкам, в сложном инструменте и т. д.

Структура. Применение находят главным образом механизмы, все звенья которых связаны кинематическими парами со стойкой.

Наибольшее распространение имеют механизмы с наименьшим числом звеньев, преимущественно трехзвенные. Необходимость введения промежуточного звена между ведущим и ведомым звеньями вызывается главным образом взаимным расположением последних, реже — желанием улучшить динамическую характеристику механизма (см. ниже).

Для удобства анализа многозвенные механизмы могут быть соответствующей разбивкой приведены к трехзвенным.

Роль поступательных пар в механизмах могут выполнять также подходящие кинематические пары более низких классов, если замена пар не изменит числа степеней свободы механизма и не нарушит общих условий связи, т. е. если сокращение числа условий связи, налагаемых парами, произойдет в результате уменьшения числа пассивных связей механизма.

Такая замена часто практикуется, так как позволяет упростить форму элементов пар и сократить объем пригоночных работ или число размеров, которые необходимо выдерживать по жестким допускам.

В трехзвенном механизме допускается замена цилиндрическими парами (IV класс) одной, двух или трех поступательных пар. Возможна замена одной поступательной пары плоскостной (III класс) или высшей парой I или II класса. Можно заменить также одну пару цилиндрической и одну плоскостной или высшей парой II класса, две пары цилиндрическими и одну плоскостной.

Кинематика. Отношение между перемещениями, скоростями и ускорениями отдельных звеньев механизма постоянно. План перемещений плоского механизма является одновременно планом скоростей и планом ускорений (при замедленных движениях звеньев — повернутым на 180°). Построенный план сохраняется для любого положения механизма, меняется лишь его масштаб в зависимости от величины перемещения, скорости и ускорения ведущего звена.

Трехзвенный механизм

Свойства механизма. Свойства механизма характеризуются:

а) передаточным отношением i_v, равным отношению скорости ведомого звена к скорости ведущего;

б) коэффициентом передачи силы i_p, равным отношению усилия на ведомом звене к усилию на ведущем;

в) к. п. д. механизма $\eta = i_v \cdot i_p$.

Для трехзвенного механизма (фиг. 1)

$$i_v = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2};$$

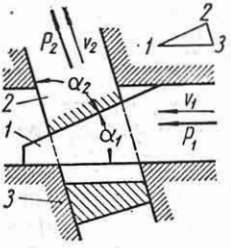
$$i_p = \frac{P_2}{P_1} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi_{12}) - \cos(\alpha_2 - \varphi_{12}) \operatorname{tg} \varphi_{23}}{\sin(\alpha_1 + \varphi_{12}) + \cos(\alpha_1 + \varphi_{12}) \operatorname{tg} \varphi_{13}}$$

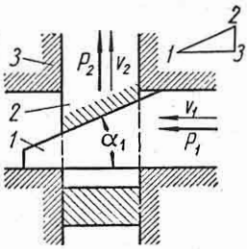
и при $\varphi_{13} = \varphi_{23}$

$$i_p = \frac{\sin(\alpha_2 - \varphi_{12} - \varphi_{13})}{\sin(\alpha_1 + \varphi_{12} + \varphi_{13})},$$

где φ_{12}, φ_{13}, φ_{23} — углы трения в кинематических парах, соединяющих соответственно звенья *1* и *2*, *1* и *3*, *2* и *3*.



Фиг. 1. Трехзвенный механизм, передающий движение под углом, отличным от 90°.



Фиг. 2. Трехзвенный механизм, передающий движение под углом 90°.

Для трехзвенного механизма, передающего движение под углом 90° (фиг. 2),

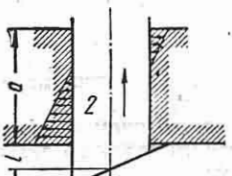
$$i_v = \operatorname{tg}\alpha_1;$$

$$i_p = \frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_{12})\operatorname{tg}\varphi_{23}}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi_{12}) + \operatorname{tg}\varphi_{13}}$$

и при $\varphi_{13} = \varphi_{23}$

$$i_p = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \varphi_{12} + \varphi_{13}).$$

Влияние конструкции механизма на трение в кинематических парах учитывается подстановкой в формулы для определения i_p углов трения, соответствующих приведенным коэффициентам трения (см. стр. 435). В качестве примера на фиг. 3 показан трехзвенный механизм с консольным звеном *2*; приведенный коэффициент трения

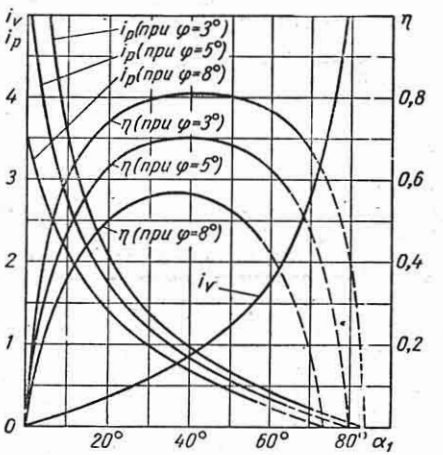


Фиг. 3. Трехзвенный механизм с консольным ведомым звеном.

$$f_{23\,пр} = \operatorname{tg}\varphi_{23\,пр} = \left(1 + 3\frac{l}{a}\right)\operatorname{tg}\varphi_{23}.$$

Передаточное отношение в механизмах обычно меньше единицы; углы между направлениями движений ведущего и ведомого звена большей частью равны 90° или 180°. В последнем случае необходим механизм с промежуточным звеном, который разбивается на два трехзвенных, каждый — для передачи под углом 90°.

На фиг. 4 приведен график изменения i_v, i_p и η в зависимости от угла α_1 для трехзвенного механизма, передающего



Фиг. 4. Передаточное отношение, коэффициент передачи силы и к. п. д. трехзвенного механизма в зависимости от угла клина.

движение под прямым углом. Углы трения 3° соответствуют работе в масляной ванне хорошо изготовленного механизма, углы трения 5° — обыкновенным условиям работы хорошо изготовленного механизма, углы трения 8° — плохим условиям работы грубо изготовленного механизма.

Надежность работы. В трехзвенном механизме кинематически может быть осуществлено любое передаточное отношение, если угол $(\alpha_1 + \alpha_2)$ между направлениями движения звеньев не равен 0° или 180°. Однако при некоторых значениях угла $(\alpha_1 + \alpha_2)$, передаточного отношения и углов трения в кинематических парах к. п. д. механизма снижается до нуля, и его работа становится невозможной из-за самоторможения при передаче движения в прямом направлении — от ведущего к ведомому звену.

В зоне, близкой к самоторможению, работа механизма ненадежна ввиду неустойчивости значений углов трения.

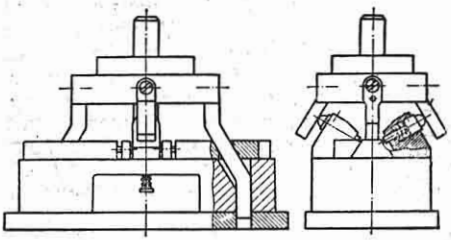
Проверку надежности работы механизма рекомендуется производить путем

определения его к. п. д. по приведенным формулам с введением коэффициента надежности, равного 2—3, на который умножаются величины углов трения. Меньшие значения коэффициента надежности берутся при больших углах трения, бóльшие — при малых.

Если подсчитанный таким образом к. п. д. окажется меньше нуля, работа механизма ненадежна, и необходимо усложнение его схемы введением промежуточного звена.

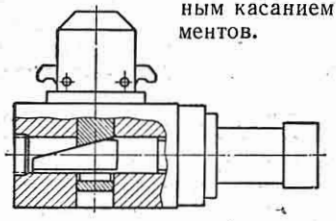
На фиг. 4 надежной работе механизма соответствуют участки кривых i_p и η, показанные сплошными линиями. Коэффициенты надежности здесь приняты равными 3 при углах трения 3°, 2,5 — при 5°, 2 — при 8°.

Примеры применения. На фиг. 5 показан вырезной штамп с боковыми пуансонами. Конструкция поступательных пар, связывающих ведущее звено с горизонтальными ползунами, позволяет передавать движение последним только на определенном участке перемещения



Фиг. 5. Штамп с боковыми пуансонами.

ведущего звена, удерживая их неподвижно на других участках перемещения. Наклонным ползунам-пуансонам движение передается посредством высших кинематических пар с точечным касанием элементов.



Фиг. 6. Клиновой механизм зажимного приспособления.

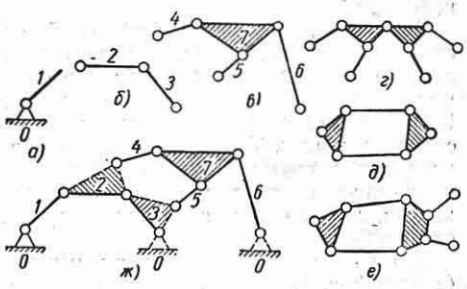
На фиг. 6 показан механизм зажимного приспособления с гидравлическим цилиндром; механизм имеет две цилиндрические и одну поступательную пару.

ПЛОСКИЕ ШАРНИРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Общие сведения

Назначение. Назначение плоских шарнирных механизмов различно в зависимости от их схемы. На практике они применяются довольно широко.

Структура и классификация. Исчерпывающая классификация плоских шарнирных механизмов с одной степенью



Фиг. 7. Группы звеньев, не изменяющие числа степеней свободы, и образование из них схемы восьмизвенного механизма.

свободы по структурному признаку и метод образования структурных схем таких механизмов предложены русским ученым Л. В. Ассуром и в дальнейшем разработаны советскими учеными.

Образование схем механизмов производится путем последовательного присоединения к ведущему или исходному кривошипу * (фиг. 7, *а*) кинематических цепей или групп звеньев (фиг. 7, *б*—*е*), не изменяющих числа степеней свободы механизма, к которому они присоединяются (фиг. 7, *ж*).

При анализе структуры механизма его схема разбивается на ведущий кривошип со стойкой и группы.

Класс механизма определяется наиболее высоким классом группы из числа встречающихся в механизме. Порядок механизма определяется наиболее высоким порядком группы из числа встречающихся в механизме групп наибольшего класса.

Структурная формула группы:

$$W = 3n - 2p = 0.$$

* Здесь под исходным кривошипом понимается звено, связанное со стойкой вращательной парой, независимо от того, совершает ли оно вращательное или качательное движение.

Возможные числа звеньев (n) и шарниров (p), удовлетворяющие структурной формуле:

$$n = 2; 4; 6; 8; 10; \ldots$$

$$p = 3; 6; 9; 12; 15; \ldots$$

По классификации И. И. Артоболевского группы звеньев делятся на классы в зависимости от числа сторон имеющегося в группе действительного или возможного замкнутого контура.

Кривошип, шарнирно связанный со стойкой (фиг. 7, *а*), характеризуется отсутствием замкнутого контура или формально имеет контур с одной стороной. Поэтому такая группа звеньев относится к I классу. Указанная группа образует самостоятельный механизм I класса; в составе механизма более высокого класса эта группа является ведущей его частью.

Двухповодковая группа (диада, фиг. 7, *б*) характеризуется наличием звена с двумя шарнирами, которое формально может считаться составленным из двух шарнирно связанных по обоим концам стержней, образующих замкнутый контур с двумя сторонами. Поэтому двухповодковая группа относится ко II классу.

Трехповодковая группа (фиг. 7, *в*) и более сложные группы (фиг. 7, *г*), характеризуемые наличием звена с тремя шарнирами, относятся к III классу, так как упомянутое звено можно считать составленным путем шарнирного соединения трех стержней, образующих замкнутый контур с тремя сторонами.

Группы IV класса (фиг. 7, *д* и *е*) и более высоких классов характеризуются наличием замкнутого контура, составленного из четырех и более шарнирно связанных звеньев.

Порядок группы любого класса определяется по числу шарниров, которыми группа присоединяется к первоначальному механизму.

Таким образом, двухповодковая группа (фиг. 7, *б*) является группой 2-го порядка, трехповодковая (фиг. 7, *в*) — группой 3-го порядка, четырехповодковая (фиг. 7, *г*) — группой 4-го порядка. Приведенные в качестве примера на фиг. 7, *д* и *е* группы IV класса относятся соответственно ко 2-му и 3-му порядкам.

Механизм (фиг. 7, *ж*), структурная схема которого образована последовательным присоединением к кривошипу *1* двухповодковой группы *2—3* и трехповодковой группы *4—5—6—7*, относится к III классу, 3-му порядку в соответствии с классом и порядком наиболее сложной группы звеньев (трехповодковой), входящей в состав механизма.

Практическое применение находят почти исключительно механизмы I и II классов, а также III класса 3-го порядка. Более сложные механизмы вследствие многозвенности имеют пониженную жесткость и малую, быстро теряющуюся точность работы.

Рассмотренный метод может быть использован также для образования плоских шарнирных механизмов с несколькими степенями свободы путем присоединения групп к нескольким ведущим кривошипам.

В зависимости от положения механизма в классификации к нему могут быть применены те или иные методы анализа и синтеза.

Пассивные связи. Механизм с одними вращательными парами V класса имеет общие пассивные связи в количестве, равном утроенному числу неповторяющихся замкнутых контуров в схеме. Наличие пассивных связей увеличивает жесткость механизма, но усложняет его изготовление. В случае надобности общие пассивные связи могут быть устранены или число их уменьшено путем замены некоторых вращательных пар (V класс) подходящими кинематическими парами II, III и IV классов, например, парами с одним элементом, образованным шаровой поверхностью, и одним — цилиндрической поверхностью (см. табл. 1 на стр. 408), шаровыми парами, цилиндрическими парами.

Кинематика механизмов II класса 2-го порядка. Применяются графический и графо-аналитический методы, а для простейших механизмов — также аналитический метод.

Построение положений всех звеньев механизма при заданном положении ведущего звена расчленяется на построение положений двухповодковых групп, выполняемое методом засечек: из известных положений крайних шарниров радиусами, равными длинам звеньев, проводят дуги, пересечение которых дает положение среднего шарнира.

План скоростей (фиг. 8). Если звено O_1A считать ведущим, то при за-

данной его угловой скорости $\omega = \text{const}$ получим для скорости точки A величину $v_A = \omega l_{O_1A}$, где l_{O_1A} — длина звена O_1A. План скоростей для рассматриваемого механизма строится по следующим векторным уравнениям, составленным на основании разложения движений анализируемых звеньев на переносные и относительные:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

для двухповодковой группы, присоединяемой к стойке;

$$\overline{v}_E = \overline{v}_C + \overline{v}_{EC}$$

и

$$\overline{v}_E = \overline{v}_D + \overline{v}_{ED}$$

для двухповодковой группы, не связанной со стойкой.

Здесь $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ — абсолютные скорости точек A и B; v_{BA} — скорость точки B относительно точки A; одной чертой снизу подчеркнуты векторы, известные по направлению, двумя чертами — известные по величине и направлению. Определение скорости точки C (фиг. 8, *а*) звена по известным скоростям двух других его точек A и B производится построением на плане треугольника относительных скоростей ($\triangle abc$), который подобен изображению звена ($\triangle ABC$) и сходственно с ним расположен. Масштаб плана скоростей μ_v *м·сек*$^{-1}$/*мм* показывает, сколько *м/сек* содержится в 1 *мм* чертежа.

Порядок построения плана скоростей (фиг. 8, *б*): в выбранном масштабе μ_v откладывают $O_v a = \overline{v}_A$; проводят $O_v b \perp O_1B$ и $ab \perp AB$, $ac \perp AC$ и $bc \perp BC$, $O_v d \perp O_2D$ и $bd \perp BD$, $de \perp DE$ и $ce \perp CE$.

План ускорений. План ускорений (фиг. 8) строится после построения плана скоростей на основании следующих векторных уравнений:

$$\overline{a}^n_B + \overline{a}^t_B = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{BA} + \overline{a}^t_{BA}$$

для двухповодковой группы, присоединенной к стойке;

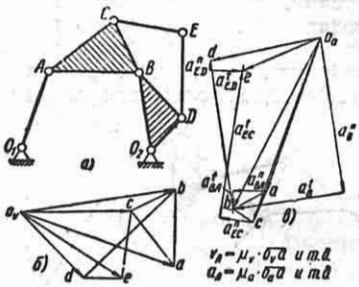
$$\overline{a}_E = \overline{a}_C + \overline{a}^n_{EC} + \overline{a}^t_{EC}$$

и

$$\overline{a}_E = \overline{a}_D + \overline{a}^n_{ED} + \overline{a}^t_{ED}$$

для двухповодковой группы, не связанной со стойкой.

Здесь $\overline{a}_B$, $\overline{a}^n_B$, $\overline{a}^t_B$ — соответственно ускорение точки B и его нормальная и тангенциальная составляющие; $\overline{a}_{BA}$, $\overline{a}^n_{BA}$, $\overline{a}^t_{BA}$ — ускорение точки B в ее движении относительно точки A и его нормальная и тангенциальная составляющие; одной чертой снизу подчеркнуты векторы, известные по направлению, двумя чертами — известные по величине и направлению.



Фиг. 8. Планы скоростей и ускорений шестизвенного механизма.

Все нормальные составляющие ускорений определяются графически или подсчитываются по известным скоростям и размерам.

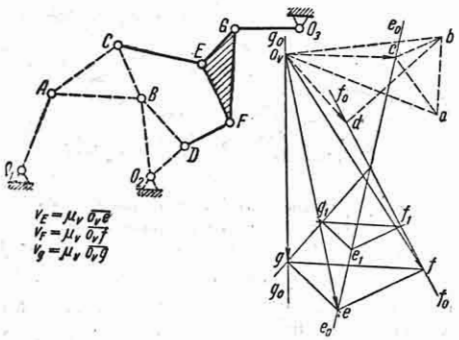
Определение ускорения третьей точки C (фиг. 8, *а*) звена по известным ускорениям двух других его точек A и B производится построением в плане ускорений треугольника относительных ускорений ($\triangle abc$), который подобен изображению звена ($\triangle ABC$) и сходственно с ним расположен. Масштаб плана ускорений μ_a *м·сек*$^{-2}$/*мм* показывает, сколько *м/сек*^{2} содержится в 1 *мм* чертежа.

Порядок построения плана ускорений (фиг. 8, *в*):

в выбранном масштабе откладывают $O_a a = a_A$; проводят подсчитанное $a^n_{BA} \parallel AB$ и $a^t_{BA} \perp AB$, подсчитанное $a^n_B \parallel O_2B$ и $a^t_B \perp O_2B$; строят $\triangle abc \infty \triangle ABC$ и $\triangle O_a bd \infty \triangle O_2BD$; проводят подсчитанное $a^n_{EC} \parallel CE$ и $a^t_{EC} \perp CE$, подсчитанное $a^n_{ED} \parallel DE$ и $a^t_{ED} \perp DE$.

Кинематика механизма III класса 3-го порядка (фиг. 9). Определение положений, скоростей и ускорений внутренних шарниров (E, F, G) трехповодковой группы по положениям, скоростям и ускорениям внешних шарниров (C, D и O_3) производится следующим образом.

Построение положения трехповодковой группы выполняется методом ложных положений. Из C, D и O_3 радиусами, равными длинам поводков, проводят дуги. Произвольно выбирают несколько положений шарнира E на первой дуге, засечками определяют соответствующие положения шарнира F



Фиг. 9. Построение плана скоростей трехповодковой группы методом ложных положений.

на второй дуге и шарнира G — на плоскости чертежа. Полученные положения шарнира G соединяют кривой, пересечение которой с третьей дугой дает действительное положение шарнира G. При построении большого числа положений механизма удобнее пользоваться шаблоном-калькой с нанесенными на нее шарнирами E, F и G.

План скоростей трехповодковой группы строится методом ложных положений или методом особых точек (см. [29]).

При некоторых схемах механизма можно упростить построение плана скоростей трехповодковой группы, если начать его не с ведущего, а с какого-либо другого звена, связанного со стойкой. Так как скорость этого звена заранее не известна, план строят в неопределенном масштабе, который может быть подсчитан только после построения вектора скорости ведущего звена.

Метод ложных положений основан на разложении скоростей внутренних шарниров (E, F, G) на переносные и относительные и использовании условия подобия $\triangle efg \infty \triangle EFG$ (фиг. 9).

Построения, показанные на фиг. 9 штриховыми линиями, выполнены по фиг. 8, *б*.

Порядок дальнейших построений: через c проводят $e_0e_0 \perp EC$, через d — $f_0f_0 \perp DF$, через O_v — $g_0g_0 \perp O_3G$; произвольно выбирают на e_0e_0 точку e_1 и проводят $e_1f_1 \perp EF$, $f_1g_1 \perp FG$ и $e_1g_1 \perp EG$; через g_1 и точку пересечения e_0e_0 и f_0f_0 проводят прямую, пересечение которой с g_0g_0 дает точку g; проводят $ge \perp EG$ и $gf \perp FG$.

План ускорений трехповодковой группы строится также методом ложных положений или методом особых точек.

Метод ложных положений основан на тех же приемах, что и при построении планов скоростей, но осложнен необходимостью разложения ускорений ряда точек на нормальные и тангенциальные составляющие.

Кинетостатика. Задача сводится к определению реакций в шарнирах, уравновешивающей силы и необходимого движущего момента, прилагаемого к ведущему звену. Известными являются действующие на звенья внешние силы, силы тяжести и силы инерции. Трение в шарнирах не учитывается. Решение задачи выполняется графо-аналитическим способом (построение плана сил).

Начав с наиболее удаленной от ведущего кривошипа группы звеньев, последовательно решают все группы до ведущего кривошипа. Определив уравновешивающую силу, действующую на ведущий кривошип, находят реакцию его опоры и необходимую величину движущего (приводного) момента.

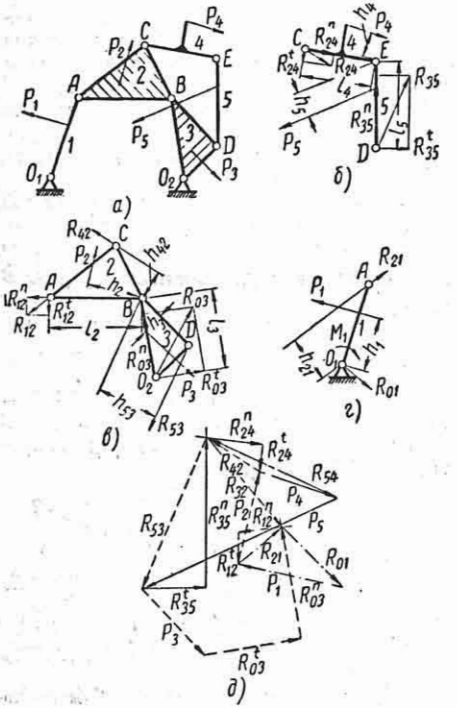
Группы звеньев и механизмы, имеющие только общие пассивные связи, являются статически определимыми относительно сил, лежащих в плоскости механизма.

Построение плана сил для механизма II класса 2-го порядка. На фиг. 10, *а* показан шестизвенный механизм с действующими на его звенья силами $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, $\overline{P}_5$, каждая из которых является равнодействующей внешних сил $\overline{Q}$, силы инерции $\overline{P}_u$ и веса звена $\overline{G}$. Например, $\overline{P}_5 = \overline{Q}_5 + \overline{P}_{u5} + \overline{G}_5$.

Двухповодковая группа *4—5* отдельно показана на фиг. 10, *б* со всеми действующими на ее звенья силами и реакциями (кроме R_{54} и R_{45}).

Реакции в крайних шарнирах C и D разлагают на составляющие, действующие вдоль звена R^n_{24} и R^n_{35} и действующие поперек звена — R^t_{24} и R^t_{35}, после чего подсчитывают

$$R^t_{24} = P_4 \frac{h_4}{l_4}; \quad R^t_{35} = P_5 \frac{h_5}{l_5}.$$



Фиг. 10. Построение плана сил для шестизвенного механизма.

Построением многоугольника сил

$$\underline{\underline{R}}^n_{24} + \underline{\underline{R}}^t_{24} + \underline{\underline{P}}_4 + \underline{\underline{P}}_5 + \underline{\underline{R}}^t_{35} + \underline{\underline{R}}^n_{35} = 0$$

определяют реакции в шарнирах C и D (на фиг. 10, $д$ — сплошными линиями). Проводя дополнительную диагональ в соответствии с уравнением

$$\underline{\underline{P}}_4 + \underline{\underline{R}}^t_{24} + \underline{\underline{R}}^n_{24} + \underline{\underline{R}}_{51} = 0,$$

находят реакцию в шарнире E. В уравнениях одной чертой подчеркнуты векторы, известные по направлению двумя — известные по величине и направлению.

Двухповодковая группа *2—3* (отдельно показана на фиг. 10, $в$).

Подсчитывают

$$R^t_{12} = \frac{P_2 h_2 - R_{42} h_{42}}{l_2};$$

$$R^t_{03} = \frac{-P_3 h_3 + R_{53} h_{53}}{l_3};$$

пристраивают к плану сил многоугольник (на фиг. 10, $д$ — штриховыми линиями) по уравнению

$$\underline{\underline{R}}^n_{12} + \underline{\underline{R}}^t_{12} + \underline{\underline{P}}_2 + \underline{\underline{R}}_{42} + \underline{\underline{R}}_{53} + \underline{\underline{P}}_3 + \underline{\underline{R}}^t_{03} + \underline{\underline{R}}^n_{03} = 0.$$

Реакцию в шарнире B находят построением по уравнению

$$\underline{\underline{R}}^n_{12} + \underline{\underline{R}}^t_{12} + \underline{\underline{P}}_2 + \underline{\underline{R}}_{42} + \underline{\underline{R}}_{32} = 0.$$

Ведущий кривошип *0—1* отдельно показан на фиг. 10, $г$. Пристраивают к плану сил треугольник (на фиг. 10, $д$ — штрихпунктирными линиями) в соответствии с векторным уравнением

$$\underline{\underline{P}}_1 + \underline{\underline{R}}_{21} + \underline{\underline{R}}_{01} = 0.$$

Уравновешивающий момент подсчитывают по формуле

$$M_1 = P_1 h_1 - R_{21} h_{21}.$$

Построение плана сил для механизма III класса 3-го порядка. При решении трехповодковой группы используется метод особых точек (см. [29]).

Четырехзвенные шарнирные механизмы

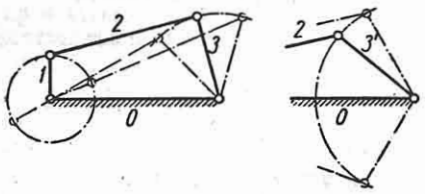
Четырехзвенные шарнирные механизмы широко применяются для преобразования равномерного вращательного движения в неравномерное вращательное, качательное или в сложное плоское движение. Они используются как самостоятельные механизмы или как часть более сложных механизмов.

Соотношение между длинами звеньев определяет разновидности механизмов.

По характеру движения в механизме различают следующие типы звеньев (фиг. 11): стойка O — неподвижное звено; кривошип *1* — звено, связанное со стойкой и имеющее возможность совершать вращательное движение на полный оборот; шатун *2* — звено, не связанное со стойкой, совершающее слож-

ное плоско-параллельное движение; коромысло или балансир — звено, связанное со стойкой и имеющее возможность качаться на угол, меньший 360°. Коромысла разделяются на односторонние (*3*) и двухсторонние (*3'*) в зависимости от того, располагается ли угол качания по одну или по обе стороны линии стойки.

В зависимости от типа звеньев, связанных со стойкой, различают двухкривошипные, кривошипно-коромысловые и двухкоромысловые механизмы.



Фиг. 11. Типы звеньев шарнирного механизма.

Обозначения длин звеньев: a — длина наименьшего звена, d — наибольшего, b и c — двух остальных.

Если $a + d \leqslant b + c$, получаем механизмы: двухкривошипный — при обращении в стойку d; кривошипно-коромысловый — при обращении в стойку звена, прилегающего к a, которое будет кривошипом; двухкоромысловый — при обращении в стойку звена, противолежащего a.

Если $a + d > b + c$, получаем двухкоромысловые механизмы независимо от того, какое звено обращено в стойку.

Частные случаи соотношений между длинами звеньев см. в табл. 1.

В качестве двухкоромысловых часто используются кривошипно-коромысловые и двухкривошипные механизмы с ограничением углов поворота их звеньев, связанных со стойкой.

Мертвым положением называется такое положение механизма, в котором условиями связи допускается перемещение ведомого звена в двух противоположных направлениях. Это имеет место, когда ведомые кривошип или коромысло располагаются на одной прямой с шатуном, что встречается: а) в механизмах с $a + d \gtrless b + c$ при соответствующем выборе ведущего звена; б) в механизмах с $a + d = b + c$ независимо от выбора ведущего звена, так как у таких механизмов имеется одно положение, в котором все звенья располагаются на одной прямой, а в частном случае, когда звенья попарно равны, имеются даже два таких положения.

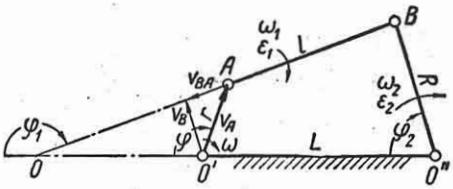
Получающаяся неопределенность движения при выходе из мертвого положения на практике недопустима и должна быть устранена инерцией движущихся звеньев или другими способами.

В мертвых положениях механизма угол передачи (см. стр. 449) равен нулю, и к. п. д. при подсчете получается отрицательным.

Кинематика. Нахождение скоростей может быть упрощено построением повернутого плана скоростей на схеме механизма: из O' проводится $\overline{v_B} \parallel \overline{O''B}$ (фиг. 12).

Отношение между угловыми скоростями $\frac{\omega_3}{\omega} = \frac{OO'}{OO''}$ (фиг. 12).

Если O находится вне отрезка $O'O''$ — скорости одинаково направлены; если O лежит на отрезке $O'O''$—скорости противоположно направлены.



Фиг. 12. Повернутый план скоростей четырехзвенного механизма.

Формулы для аналитического определения положений скоростей и ускорений. Угловые координаты положений звеньев (фиг. 12):

$$\varphi_1 = \varphi_m - \arccos \frac{m^2 + l^2 - R^2}{2ml};$$

$$\varphi_2 = \varphi_m - \arccos \frac{m^2 - l^2 + R^2}{2mR},$$

где

$$\varphi_m = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi + L};$$

$$m = \frac{r \sin \varphi}{\sin \varphi_m} = \frac{r \cos \varphi + L}{\cos \varphi_m}.$$

Угловые скорости:

$$\omega_1 = -\omega \frac{r \sin (\varphi - \varphi_2)}{l \sin (\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\omega_2 = \omega \frac{r \sin (\varphi - \varphi_1)}{R \sin (\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

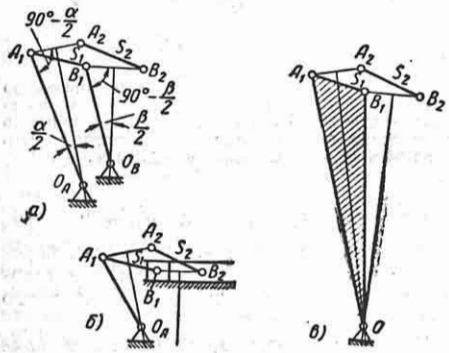
Угловые ускорения:

$$\varepsilon_1 = \frac{-r\omega^2\cos(\varphi-\varphi_2) - r\varepsilon\sin(\varphi-\varphi_2) - l\omega_1^2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + R\omega_2^2}{l\sin(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r\omega^2\cos(\varphi-\varphi_1) + r\varepsilon\sin(\varphi-\varphi_1) + l\omega_1^2 - R\omega_2^2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{K\sin(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Определение основных размеров механизмов (синтез) графическим способом по заданным положениям шатунной плоскости.

1. *Заданы два положения S_1 и S_2 шатунной плоскости положениями лежащих в ней шарниров A и B* (фиг. 13).



Фиг. 13. Синтез механизма по двум заданным положениям шатуна.

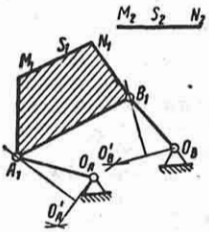
Требуется определить положения шарниров O_A и O_B на стойке. Построение: из середины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 восстанавливаем перпендикуляры, на которых должны лежать центры шарниров O_A и O_B.

Положения шарниров O_A и O_B на перпендикулярах определяются на основании каких-либо дополнительных условий. Например, можно обеспечить получение двухкривошипного или кривошипно-коромыслового механизма, необходимых углов α и β поворота звеньев O_AA и O_BB при переходе механизма из 1-го во 2-е положение (фиг. 13, *а*).

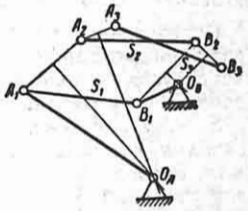
Если центр одного звена удалить в бесконечность, то получаем коромысловошатунный механизм (фиг. 13, *б*). Если положения шарниров совпадают (на пересечении перпендикуляров), то четырехзвенный механизм вырождается в двухзвенный: шатунная плоскость соединяется шарниром O со стойкой (фиг. 13, *в*).

2. *Заданы два положения S_1 и S_2 шатунной плоскости положениями закрепленного на ней отрезка MN и, кроме того, положения шарниров O_A и O_B на стойке.* Требуется определить положения шарниров A и B на шарнирной плоскости (фиг. 14).

Рассматриваемую задачу приводим к предыдущей методом обращения движения: шатунную плоскость условно закрепляем, а стойку рассматриваем как шатунную плоскость. Для этого, не меняя относительного положения O_A, O_B и M_2N_2, совмещаем отрезок M_2N_2 с M_1N_1. Новое положение шарниров O_A' и O_B' получаем засечками из точек M_1 и N_1: O_A' — радиусами O_AM_2 и O_AN_2, O_B' — радиусами O_BM_2 и O_BN_2. Из середины отрезков O_AO_A' и O_BO_B' восстанавливаем перпендикуляры, на которых и должны располагаться шарниры A и B в первом положении шатунной плоскости. Выбор точек A и B может быть произведен с учетом дополнительных условий (см. п. 1).



Фиг. 14. Синтез механизма по двум положениям шатунной плоскости и положениям обоих шарниров на стойке.



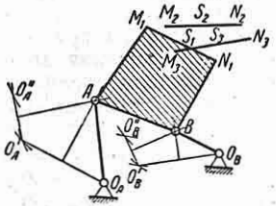
Фиг. 15. Синтез механизма по трем заданным положениям шатуна.

3. *Заданы три положения S_1, S_2 и S_3 шатунной плоскости и положения на ней шарниров A и B.* Требуется определить положения шарниров O_A и O_B на стойке (фиг. 15).

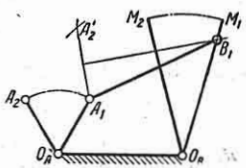
Построение: из середин отрезков A_1A_2 и A_2A_3 восстанавливаем перпендикуляры, в точке пересечения которых располагается центр шарнира O_A; из середин B_1B_2 и B_2B_3 восстанавливаем перпендикуляры, в пересечении которых располагается центр шарнира O_B.

4. *Заданы три положения S_1, S_2 и S_3 шатунной плоскости положениями скрепленного с ней отрезка MN и, кроме того, положения шарниров O_A и O_B на стойке* (фиг. 16). Требуется определить положения шарниров A и B на шатунной плоскости.

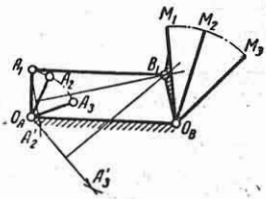
Задачу приводим к предыдущей путем обращения движения приемом, указанным в п. 2.



Фиг. 16. Синтез механизма по трем положениям шатунной плоскости и положениям обоих шарниров на стойке.



Фиг. 17. Синтез механизма по двум соответствующим положениям звеньев, связанных со стойкой, и положению второго шарнира на одном из звеньев.



Фиг. 18. Синтез механизма по трем соответствующим положениям звеньев, связанных со стойкой, и положению второго шарнира на одном из звеньев.

Шарнир A в первом положении шатунной плоскости находится в пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков $O_AO'_A$ и $O'_AO''_A$; шарнир B — в пересечении перпендикуляров, восстановленных из середин отрезков $O_BO'_B$ и $O'_BO''_B$.

Определение недостающих основных размеров механизмов по заданным соответствующим положениям звеньев, связанных со стойкой.

5. *Заданы два положения одного звена и соответствующие им положения другого звена, а также положение шарнира A на звене O_AA.* Требуется определить положение шарнира B на прямой, связанной со вторым звеном (фиг. 17). Для решения пользуются методом обращения движения, делая условно звено O_BM стойкой и O_AA — шатуном. Для этого, не меняя относительного положения A_2 и O_BM_2, совмещаем O_BM_2 с O_BM_1, после чего из середины отрезка $A_1A'_2$ восстанавливаем перпендикуляр, в пересечении которого с прямой O_BM_1 находится искомое положение шарнира B_1.

6. *Задано три положения одного звена и соответствующие им три положения другого звена, а также положение шарнира A на одном из звеньев* (фиг. 18). Требуется определить положение шарнира B в плоскости второго звена.

Воспользуемся приемом обращения движения, для чего, не изменяя относительного положения A_2 и M_2O_B, совмещаем M_2O_B с M_1O_B и, не изменяя относительного положения A_3 и M_3O_B, совмещаем M_3O_B с M_1O_B, вследствие чего получаются новые положения шарнира A — A'_2 и A'_3.

Из середин отрезков $A_1A'_2$ и $A'_2A'_3$ восстанавливаем перпендикуляры, пересечение которых дает положение шарнира B на плоскости звена O_BB в его первом положении.

Определение основных размеров кривошипно-коромыслового (а также кривошипно-шатунного) механизма по крайним положениям коромысла.

7. *Заданы крайние положения коромысла (или ползуна) и положения шарниров*: B — на коромысле, O_A и O_B — на стойке (фиг. 19).

Радиус кривошипа

$$r = \frac{O_AB_2 - O_AB_1}{2}.$$

Длина шатуна

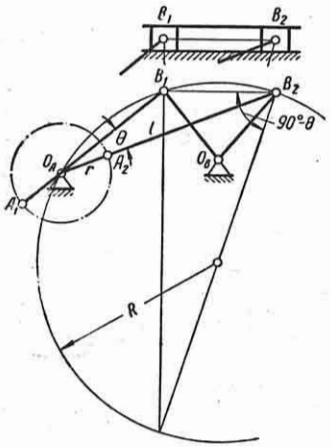
$$l = O_AB_1 + r.$$

8. *Заданы крайние положения коромысла (или ползуна) и отношение времени обратного хода к времени прямого хода*

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = k.$$

Искомое положение шарнира O_A должно находиться на окружности радиуса $R = \frac{B_1B_2}{2\sin\theta}$, где $\theta = 180° \frac{k-1}{k+1}$. Центр окружности может быть найден графи-

ческим построением, как средняя точка гипотенузы прямоугольного треуголь-

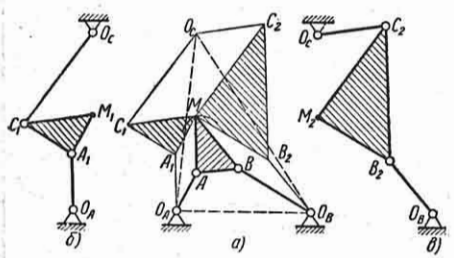


Фиг. 19. Синтез механизма по крайним положениям коромысла или ползуна и положениям обоих шарниров на стойке.

ника с катетом B_1B_2 и углом при этом катете $90°-\theta$ (фиг. 19).

Шатунные кривые. В общем случае траектории точек шатунной плоскости — кривые 6-го порядка. Формы их отличаются большим разнообразием. Некоторые шатунные кривые на отдельных участках близко подходят к прямым линиям и окружностям, имея с ними до шести общих точек.

Теорема Робертса — Чебышева позволяет выбрать наиболее удобные основные размеры механизма, воспроизводящие требуемую шатунную кривую.



Фиг. 20. К теореме Робертса—Чебышева.

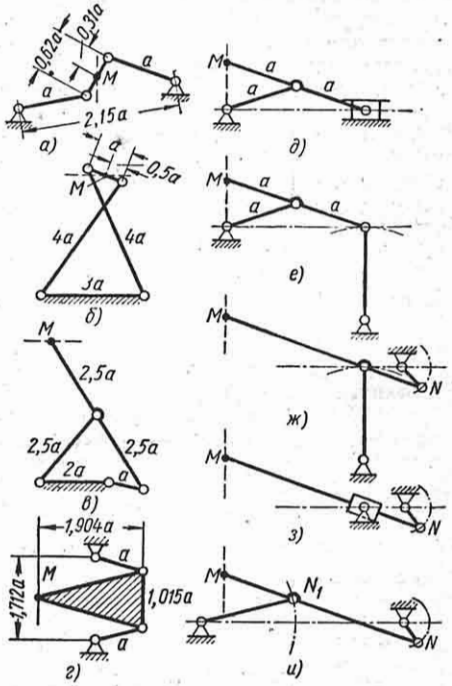
Если известны основные размеры одного механизма (фиг. 20, *а*) с движением точки M шатуна по заданной кривой, то путем соответствующего построения можно найти два новых варианта такого механизма (фиг. 20, *б* и *в*) с точками M_1 и M_2, описывающими ту же шатунную кривую, что и точка M. На фиг. 20, *а*: $\triangle O_AO_BO_C \infty \triangle ABM \infty \triangle A_1MC_1 \infty \infty \triangle MB_2C_2$; фигуры O_AAMA_1, O_BBMB_2 и $O_CC_1MC_2$ — параллелограммы.

При выборе варианта механизма для практического использования следует учитывать его динамические характеристики.

Механизмы с прямолинейной траекторией движения точки шатуна показаны на фиг. 21.

Механизм Уатта (фиг. 21, *а*), механизм Чебышева (фиг. 21, *б*), лямбдообразный механизм Чебышева (фиг. 21, *в*) и механизм Робертса (фиг. 21, *г*) дают приближенно прямолинейное движение точки M.

Механизм Эванса с поступательной парой (фиг. 21, *д*) обеспечивает теоретически точную прямолинейную траекторию движения точки M, а шарнирный механизм (фиг. 21, *е*), полученный из предыдущего путем замены ползуна коромыслом,



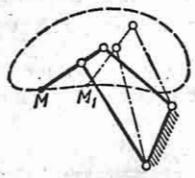
Фиг. 21. Схемы механизмов с прямолинейной траекторией движения точки шатуна.

обеспечивает приближенно прямолинейную траекторию. Механизм по фиг. 21, *ж* получается путем дальнейшего преобразования с использованием на шатуне точки N, траектория которой близка к дуге окружности.

Конхоидальный механизм (фиг. 21, *з*) и механизм (фиг. 21, *и*), полученный путем его преобразования с использованием на шатуне точки N_1,

имеющей траекторию движения, близкую к дуге окружности, дают приближенно прямолинейное движение точки M.

Механизмы с прямолинейным движением точки шатуна в настоящее время используются, например, в самопишущих приборах для воспроизведения движения записывающего штифта, в подъемных кранах для обеспечения горизонтального перемещения точки подвеса груза (фиг. 22). Кроме того, механизмы с движением точки шатуна на отдельном участке траектории по прямой или по окружности используются как составная часть многозвенных механизмов с остановами (см. фиг. 26).



Фиг. 22. Схема подъемного крана.

Сложное плоско-параллельное движение шатунов (плоских систем) используется для выполнения некоторых технологических операций (тестомесилки, сельскохозяйственные и другие машины).

Типы механизмов. В табл. 1 приведены типы четырехзвенных шарнирных механизмов, получающиеся при различных соотношениях между длинами звеньев, а также при предельных и частных случаях этих соотношений.

Механизмы по схемам 2, 7 и особенно 5, 8 (табл. 1) требуют специальных мер, обеспечивающих прохождение их через мертвое положение, и поэтому мало пригодны для практического использования.

Таблица 1

Типы четырехзвенных шарнирных механизмов

Продолжение табл. 1

Двухкривошипные	
Общий случай двухкривошипного механизма $a+d<b+c$; a — стойка при $a<b<c<d$ или $a<c<b<d$ Схема 1	$i \neq \text{const}$; $i_{cp}=1$ Мертвых положений нет Наименьший угол передачи — между звеньями c и d $\min \gamma_{cd} = \arccos \frac{c^2+d^2-(b-a)^2}{2cd}$
Характеристики см. табл. 2 и фиг. 23	

Двухкривошипные	
Предельный случай двухкривошипного механизма $a+d=b+c$; a — стойка при $a<b<c<d$ или $a<c<b<d$ Схема 2	$i \neq \text{const}$; $i_{cp}=1$ Мертвое положение *III*
Не дает существенно новых возможностей по сравнению с механизмами по схеме *I*, имея ухудшенную динамическую характеристику вследствие наличия мертвого положения	
Шарнирный параллелограмм (противолежащие звенья попарно равны) $a=c$; $b=d$ Схема 3	$i=1$ Мертвые положения *I* и *III*
Прохождение через мертвые положения обеспечивается за счет инерции звеньев или за счет усложнения механизма (см. фиг. 24)	
Шарнирный антипараллелограмм (противолежащие звенья попарно равны) $a=c$; $b=d$ Схема 4	$i \neq \text{const}$; $i_{cp}=-1$ Мертвые положения *I* и *III* $i=\frac{\omega_c}{\omega_a}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1+2\frac{b}{a}\cos\varphi}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}$
Получается из шарнирного параллелограмма искусственным реверсированием ведомого звена в мертвом положении (см. табл. 3 и фиг. 27).	

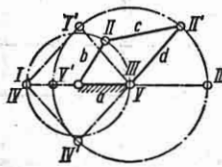
Примечание. a, b, c, d—длины звеньев в порядке их соединения.

Продолжение табл. 1

Двухкривошипные

Двухкривошипный механизм Галловея (соседние звенья попарно равны)
$a = b$; $c \quad a$; $a < c$; a или b — стойка

Схема 5



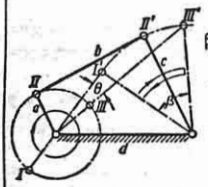
$i \neq \text{const}$; $i_{cp} = 2$
Мертвые положения *III* и *V*

При большом ведущем кривошипе малый кривошип в мертвых положениях может остановиться, тогда механизм обращается в двухзвенный: стойка — кривошип

Кривошипно-коромысловые

С односторонним коромыслом
$a + d < b + c$; b или d — стойка
при $a < b < c < d$ или $a < c < b < d$

Схема 6



$$\beta = \arccos\frac{c^2+d^2-(a+b)^2}{2cd} - \arccos\frac{c^2+d^2-(b-a)^2}{2cd};$$

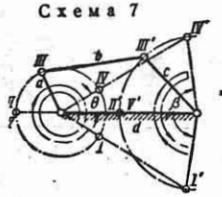
$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{180^\circ + \theta^\circ}{180^\circ - \theta^\circ},$$

где $\theta = \arccos\frac{(b-a)^2-c^2+d^2}{2(b-a)d} - \arccos\frac{(a+b)^2-c^2+d^2}{2(a+b)d}$

Мертвых положений при ведущем кривошипе нет, при ведущем коромысле — *I* и *III*

С двусторонним коромыслом
$a+d=b+c$; b или d — стойка при $a<b<c<d$
или $a<c<b<d$

Схема 7



Мертвые положения *II* и *V*

$$\beta = 2\arccos\frac{c^2+d^2-(a+b)^2}{2cd};$$

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{180^\circ + \theta^\circ}{180^\circ - \theta^\circ},$$

где $\theta = \arccos\frac{(a+b)^2-c^2+d^2}{2(a+b)\cdot d}$

За 2 оборота кривошипа коромысло делает одно двойное качание. При искусственном реверсировании ведомого звена в мертвом положении механизм работает аналогично механизму по схеме 6

Продолжение табл. 1

Кривошипно-коромысловые

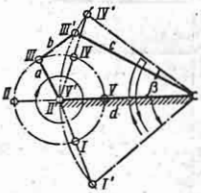
Кривошипно-коромысловый механизм Галловея (соседние звенья попарно равны)
$a = b$; $a < c$; $c = d$; c или d — стойка

Схема 8

Мертвые положения *II* и *V*

$\beta = 4\arcsin\frac{a}{c}$:

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{180^\circ - \arccos\frac{a}{c}}{\arccos\frac{a}{c}}$$



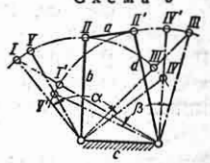
В мертвом положении ведомое коромысло может остановиться, тогда механизм обращается в двухзвенный: стойка — кривошип

Двухкоромысловые

С двумя односторонними коромыслами
$a + d < b + c$; c — стойка при $a < b < c < d$
или $a < c < b < d$

Схема 9

Мертвые положения при ведущем звене b *IV* и *V*



$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-(a+d)^2}{2bc} - \arccos\frac{b^2+c^2-(d-a)^2}{2bc};$$

$$\beta = \arccos\frac{c^2+d^2-(a+b)^2}{2cd} - \arccos\frac{c^2+d^2-(b-a)^2}{2cd}$$

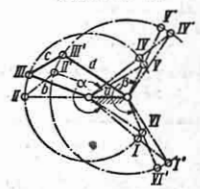
С двумя двусторонними коромыслами:
А) $a + d > b + c$; стойка — любое звено
Б) $a + d = b + c$; c — стойка при $a<b<c<d$
или $a<c<b<d$

$$\alpha = 2\arccos\frac{(d-c)^2-a^2-b^2}{2ab};$$

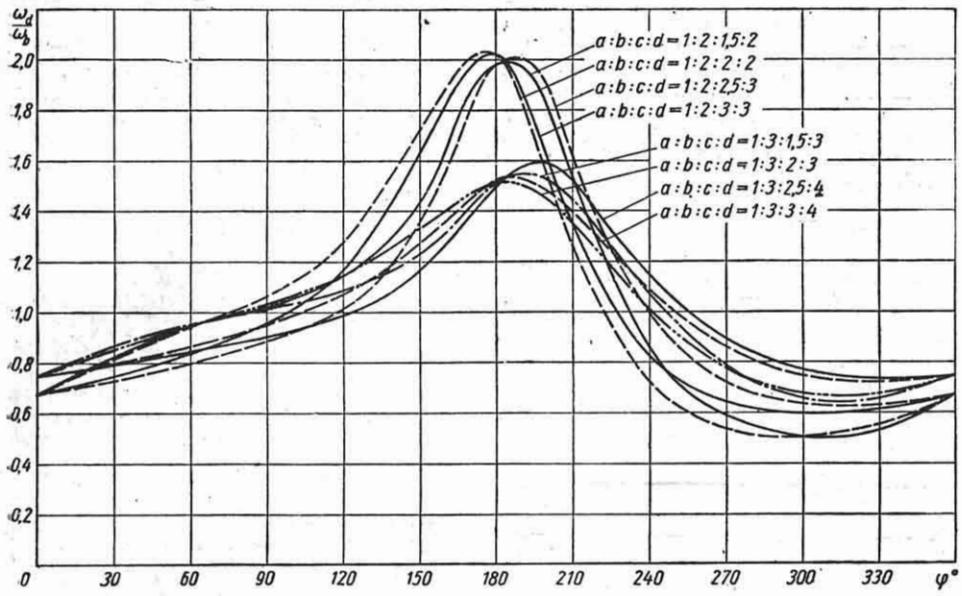
$$\beta = 2\arccos\frac{a^2+d^2-(c+b)^2}{2ad}$$

Схема 10

Мертвые положения при ведущем звене b:
А) *V* и *VI*
Б) *II*, *V* и *VI*
На схеме показан более предпочтительный вариант А



Так как в механизмах по схемам 9 и 10 мертвые положения совпадают с крайними положениями ведущего звена, получается трудно устранимая неопределенность движения и плохие динамические характеристики механизма. Поэтому двухкоромысловые механизмы используют с углами качания меньше α и β



Фиг. 23. Изменение передаточного отношения двухкривошипного механизма.

В табл. 2 и на фиг. 23 даны кинематические характеристики двухкривошипных механизмов с различными отношениями длин звеньев, а в табл. 3— характеристики механизмов антипараллелограмма.

Таблица 2

Характеристика двухкривошипных механизмов с различными отношениями длин звеньев
(см. схему 1 в табл. 1)

Отношение длин звеньев $a:b:c:d$	Передаточное отношение $i=\frac{\omega_d}{\omega_b}$: i_{max} при $\varphi=170\div200°$	Передаточное отношение $i=\frac{\omega_d}{\omega_b}$: i_{min} при $\varphi=29{,}5\div330°$	Отношение (~ наименьшее) углов поворота ведомого звена, соответствующих углам поворота φ ведущего звена от 270° до 90° и от 90° до 270° $\alpha:(360°-\alpha)$ *	Наименьшие углы передачи между звеньями b и c, c и d: min γ_{bc}**	min γ_{cd}***
1 : 2 : 1,5 : 2	~2	0,5	127° : 233° = 0,55	63°	29°
1 : 2 : 2 : 2		~0,6		83°	29°
1 : 2 : 2,5 : 3				55°	18°
1 : 2 : 3 : 3				76°	19°
1 : 3 : 1,5 : 3	1,5÷1,6		143° : 217° = 0,66	58°	36°
1 : 3 : 2 : 3				76°	41°
1 : 3 : 2,5 : 4				49°	24°
1 : 3 : 3 : 4		0,7		67°	29°

Расчетные формулы:

* $\alpha = 180° + \arcsin\frac{bA + a\sqrt{4d^2B - A^2}}{2dB} - \arcsin\frac{bA - a\sqrt{4d^2B - A^2}}{2dB}$,

где $A = a^2 + b^2 - c^2 + d^2$ и $B = a^2 + b^2$.

** $\min\gamma_{bc} = \arccos\frac{(a+d)^2 - b^2 - c^2}{2bc}$ (в положении *III* механизма).

*** $\min\gamma_{cd} = \arccos\frac{c^2 + d^2 - (b-a)^2}{2cd}$ (в положении *IV* механизма).

Таблица 3

Характеристики шарнирных антипараллелограммов с различными отношениями длин звеньев (см. схему 4 в табл. 1)

Отношение радиуса кривошипа к длине шатуна $a:b$	Передаточное отношение $i=\frac{\omega_c}{\omega_a}$		Отношение (наименьшее) углов поворота ведомого звена, соответствующих углам поворота φ ведущего звена от 270° до 90° и от 90° до 270° $\alpha:(360°-\alpha)$, где $\alpha=2\arcsin\left[\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right):\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)\right]$
	$i_{min}=\left(\frac{b}{a}-1\right):\left(\frac{b}{a}+1\right)$ при $\varphi=180°$	$i_{max}=\left(\frac{b}{a}+1\right):\left(\frac{b}{a}-1\right)$ при $\varphi=0°$	
1 : 3	0,50	2,00	106° : 254° = 0,42
1 : 4	0,60	1,67	122° : 238° = 0,51
1 : 6	0,72	1,40	142° : 218° = 0,65
1 : 8	0,78	1,29	152° : 208° = 0,73
1 : 10	0,82	1,22	157° : 203° = 0,77

Многозвенные шарнирные механизмы с одной степенью свободы

Многозвенный шарнирный механизм допускает:

а) передачу движения от одного ведущего к нескольким ведомым звеньям, связанным со стойкой;

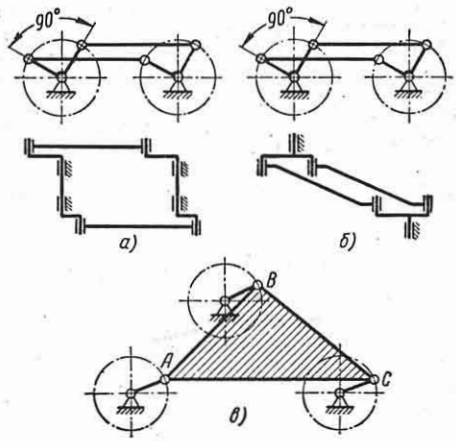
б) получение таких преобразований движения, которые невозможно выполнить при помощи четырехзвенного механизма, а также решение других задач, не выполнимых посредством четырехзвенного механизма.

Большинство многозвенных механизмов построено на базе четырехзвенных.

Многозвенные механизмы шарнирного параллелограмма. Применение двух шатунов (фиг. 24, *а* и *б*) обеспечивает принудительный переход механизма через мертвые положения, уменьшение усилий в кинематических парах и повышение среднего к. п. д.

В механизмах с несколькими ведомыми кривошипами (фиг. 24, *в*) мертвые положения устраняются при условии, что на шатуне центры шарниров A, B и C не будут лежать на одной прямой. Механизмы такого типа применяются в приводе ведущих колес электровоза, в приводе шпинделей многошпиндельной сверлильной головки и т. д.

Если в механизме применяются только вращательные пары V класса (см. табл. 1 на стр. 408), то добавление к четырехзвенному механизму каждого дополнительного шатуна или кривошипа увеличивает число общих пассивных связей на 3 и индивидуальных — на 1.

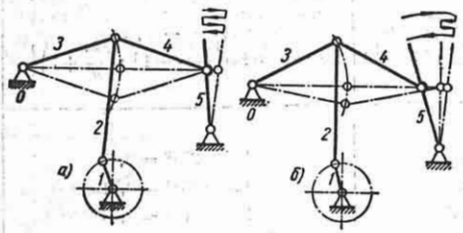


Фиг. 24. Устранение мертвых положений механизма шарнирного параллелограмма.

Шестизвенные кривошипно-коромысловые механизмы (фиг. 25). Такой механизм может сообщать коромыслу несколько качательных движений за один оборот кривошипа. Путем изменения основных размеров механизма при регулировании можно удобно изменять характер качания ведомого коромысла.

Два качательных движения коромысла на одинаковые углы (фиг. 25, *а*) и на разные углы с двумя совпадающими точками реверсирования (фиг. 25, *б*)

можно получить посредством механизма, схема которого составлена путем присоединения шатуна *4*, связанного с ведомым коромыслом *5*, к коромыслу *3* первоначального кривошипно-коромыслового механизма *0—1—2—3*.



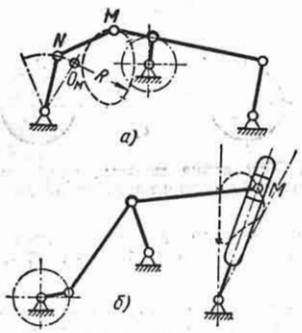
Фиг. 25. Механизмы с двумя качаниями коромысла за один оборот кривошипа.

Определение основных размеров механизма по заданным положениям реверсирования ведомого коромысла трудности не представляет.

Более сложное движение коромысла с двумя и тремя качаниями за цикл может быть получено посредством механизма, схема которого составлена путем присоединения шатуна, связанного с ведомым коромыслом, к шатуну первоначального четырехзвенного механизма.

Определение основных размеров таких механизмов значительно сложнее.

Механизмы с остановами. В этих механизмах при непрерывном движении



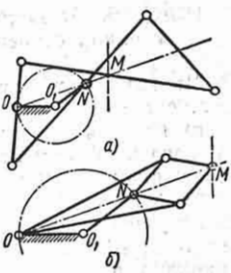
Фиг. 26. Механизмы с остановами.

ведущего звена ведомое звено некоторое время остается неподвижным или почти неподвижным.

Шестизвенный шарнирный механизм, работающий с остановами, строится на базе четырехзвенного механизма, у которого точка *M* шатуна движется по траектории, имеющей участок, близко подходящий к дуге окружности с центром O_M и радиусом *R*. Точку *M* шатуна посредством промежуточного звена длиной *R* связывают с точкой *N* ведомого коромысла, траектория движения которой проходит через центр O_M (фиг. 26, *а*). Шестизвенный механизм может иметь один, два и более остановов ведущего звена.

Указанный принцип синтеза механизмов с остановами распространяется также на механизмы, имеющие поступательные пары. При построении кулисных механизмов с остановами используются шатунные кривые с приближенно прямолинейными участками (фиг. 26, *б*).

Механизмы инверсоров. Инверсией называется такое соответствие между двумя кривыми, когда остается постоянным произведение расстояний от центра инверсии *O* (фиг. 27) до точек *M* и *N* пересечения кривых с прямой, проходящей через *O*. Инверсия окружности, проходящей через *O*, — прямая, не проходящей через *O* — окружность другого радиуса.



Фиг. 27. Механизмы инверсоров.

Шарнирные механизмы, осуществляющие инверсию, используются для теоретически точного воспроизведения прямой линии или дуги окружности большого радиуса.

На фиг. 27, *а* показан инверсор, основанный на схеме антипараллелограмма.

Инверсор Липкина (фиг. 27, *б*) основан на схеме шарнирного ромба или ромбоида; механизм инверсора — восьмизвенный. Вследствие большого числа звеньев рассматриваемый механизм может оказаться практически менее точным, чем четырехзвенные механизмы с приближенно прямолинейным движением точки шатуна (см. фиг. 21).

Шарнирные механизмы с двумя степенями свободы

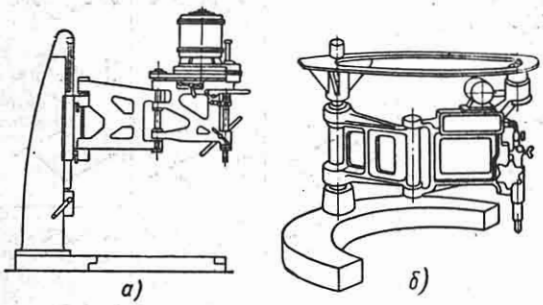
Направляющие механизмы. В отличие от передаточных и преобразующих механизмов назначение направляющих

механизмов — налагать определенные ограничения на движение какого-либо звена или его части (точка, прямая линия). Особенность направляющих механизмов — отсутствие явно выраженных ведущих и ведомых звеньев.

Механизм с одной степенью свободы обычно используется для направления движения точки по прямой (см. фиг. 21 и 27) или по дуге окружности большого радиуса.

Механизмы с двумя степенями свободы обычно используются для выполнения следующих задач:

1. Трехзвенные — для сохранения перпендикулярности оси элемента цилиндрической или вращательной пары



Фиг. 28. Трехзвенные направляющие механизмы.

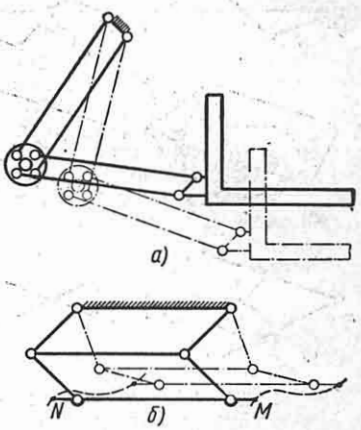
к плоскости механизма. Практически применяются для обеспечения нужного направления инструмента в радиально-сверлильных станках с шарнирным рукавом (фиг. 28, *а*), в копировальных станках для огневой резки металлов (фиг. 28, *б*) и т. п.

2. Семизвенные — для сохранения поступательного характера движения определенного звена плоского механизма. Практически применяются в чертежных приборах для обеспечения неизменного направления линеек (фиг. 29, *а*), в трансляторах для воспроизведения без изменения масштаба одной или нескольких новых кривых по имеющемуся образцу (фиг. 29, *б*), в копировальных станках с пантографом для пространственного копирования (см. фиг. 33) и т. п.

Механизм пантографа. Механизм служит для воспроизведения одной или нескольких кривых, подобных имеющемуся образцу. Копирование производится без изменения или чаще с изменением масштаба, без поворота или иногда с поворотом кривой на некоторый угол.

Механизмы пантографа применяются в специальных чертежных приборах, в копировальных устройствах, например для правки профильного шлифовального круга, в копировальных станках — фрезерных, гравировальных и др. для контурного и объемного копирования, в оптических профильно-шлифовальных станках и т. п.

Пантограф представляет собой однократно изменяемую плоскую кинемати-



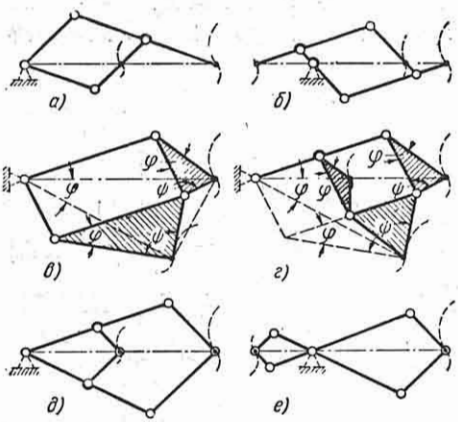
Фиг. 29. Семизвенные направляющие механизмы.

ческую цепь, имеющую три и более рабочих точек, обладающих следующими свойствами: при любом изменении формы пантографа отношение расстояний между точками сохраняется неизменным, точки остаются на одной прямой или в вершинах подобно-изменяемого треугольника.

Плоский механизм пантографа с двумя степенями свободы получается после присоединения (посредством вращательной пары) указанной кинематической цепи к стойке.

Если для присоединения к стойке использовать одну из рабочих точек пантографа, а другую вести по контуру образца, то все остальные рабочие точки опишут кривые, подобные и сходственно расположенные относительно контура образца. Все рабочие точки, расположенные на прямой по одну сторону неподвижного шарнира, движутся по кривым с одинаковым угловым положением; расположенные на той же прямой, но по другую сторону неподвижного шарнира — по кривым, повернутым на 180° относительно первых; расположенные

в вершинах подобно-изменяемого треугольника — по кривым, повернутым относительно друг друга на угол при вершине треугольника, совпадающей с неподвижным шарниром. Подавляющее большинство применяемых на практике пантографов имеет схему шарнирного параллелограмма: с тремя рабочими точками (фиг. 30, *а*) для копирования без



Фиг. 30. Схемы пантографов.

поворота кривой; с четырьмя рабочими точками (фиг. 30, *б*) для копирования с поворотом на 180°; с тремя (фиг. 30, *в*) и четырьмя (фиг. 30, *г*) рабочими точками для копирования с поворотом кривой на угол φ. Пантографы по другим схемам для копирования без поворота (фиг. 30, *д*) и с поворотом на 180° (фиг. 30, *е*) имеют меньшую жесткость и точность работы из-за большого числа звеньев.

В основе параллелограммных пантографов лежат большей частью схемы с расположением рабочих точек на прямой.

Основные схемы кинематических цепей таких пантографов приведены в табл. 4.

Наибольшее возможное число рабочих точек в параллелограммном пантографе равно числу его звеньев. Каждая рабочая точка, совпадающая с центром шарнира, уменьшает общее число рабочих точек пантографа на 1.

Применение пятизвенного параллелограммного пантографа при использовании не всех рабочих точек оправдывается повышением жесткости системы благодаря появлению дополнительных пассивных связей.

Точность механизма пантографа в каждом его положении характеризуется отклонениями Δ_ρ и Δ_φ полярных координат или отклонениями Δ_x и Δ_y декартовых координат воспроизводимой точки от теоретически правильных. Начало обеих систем координат берется в точке соединения пантографа со стойкой. Ось Ox декартовой системы проходит через теоретически правильное положение воспроизводимой точки.

Точность полученной кривой в каждой точке характеризуется ее отклонением Δ от теоретически правильной кривой, измеренным по нормали к последней:

$$\Delta \approx \sqrt{\Delta_\rho^2 + (\rho\Delta_\varphi)^2}\cos(\alpha + \beta)$$

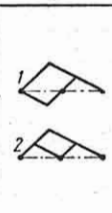
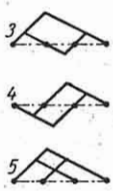
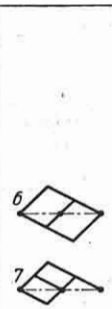
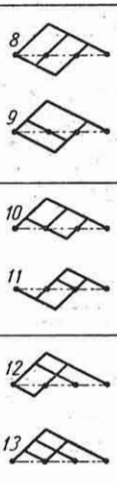
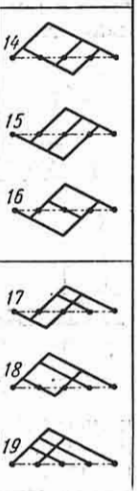
или

$$\Delta \approx \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}\cos(\alpha + \beta),$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{d\rho}{d\varphi} = \operatorname{arctg}\frac{dx}{dy}$ — угол подъема теоретически правильной кривой в исследуемой точке;

Таблица 4

Схемы кинематических цепей параллелограммных пантографов

Число звеньев	Число рабочих точек (обозначены •)		
	3	4	5
Четырехзвенные			—
Пятизвенные			

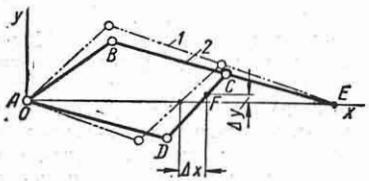
Примечания: 1. В схемах с четырьмя рабочими точками могут быть использованы только три рабочие точки, в схемах с пятью рабочими точками — только три или четыре точки.

2. Схемы 5, 12, 13, 17, 18, 19 дают пониженные жесткость и точность работы механизма.

$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\rho \Delta_\varphi}{\Delta_\rho} = \operatorname{arctg} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ — угол между радиусом-вектором исследуемой точки и вектором отклонения.

Две кривые $\Delta_\rho = f_1(\rho)$, $\Delta_\varphi = f_2(\rho)$ или $\Delta_x = f_3(x)$, $\Delta_y = f_4(x)$ полностью определяют точность пантографа и могут быть найдены графическими, графо-аналитическими или аналитическими способами по первичным ошибкам в основных размерах звеньев пантографа.

На фиг. 31 изображен пантограф наиболее распространенного типа с идеально точными размерами звеньев I и с размерами, имеющими отклонения 2. Точные формулы для определения ошибок механизма по фиг. 31:



Фиг. 31. Определение ошибок пантографа.

$$\Delta_x = x_e \frac{c_1}{e_1} - x_c \frac{f}{d} - x_d \frac{d-f}{d};$$

$$\Delta_y = y_c \frac{f}{d} + y_d \frac{d-f}{d},$$

где

$$x_c = x_e - \frac{x_e^2 - e^2 + b^2}{2x_e} \cdot \frac{e-c}{e};$$

$$y_c = \sqrt{b^2 - \left[\frac{x_e^2 - e^2 + b^2}{2x_e}\right]^2} \frac{e-c}{e};$$

$$x_d = \frac{x_c}{2}\left(1 + \frac{a^2 - d^2}{x_c^2 + y_c^2}\right) \mp$$

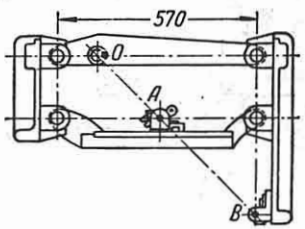
$$\mp \frac{y_c}{2} \sqrt{\frac{4a^2}{x_c^2 + y_c^2} - \left(1 + \frac{a^2 - d^2}{x_c^2 + y_c^2}\right)^2};$$

$$y_d = \frac{1}{y_c}\left(\frac{a^2 - d^2}{2} + \frac{x_c^2 + y_c^2}{2} - x_c x_d\right),$$

где $a = AD$, $b = AB$, $c = BC$, $d = CD$, $e = BE$, $f = DF$ — действительные размеры звеньев; c_1 и e_1 — идеально точные (номинальные) размеры звеньев; x_e — абсцисса ведущей рабочей точки E. Расчеты по приведенным формулам должны производиться весьма точно, желательно на арифмометре, с учетом повторяющихся действий.

В копировальных станках обычно применяют инструмент не с точечным, а с линейным (лезвие резца) или объемным (фреза, шлифовальный круг) режущим элементом. В этом случае воспроизводимая поверхность получается как огибающая последовательных положений режущего инструмента. Для обеспечения подобия воспроизводимой поверхности и поверхности образца необходимо, чтобы режущий и ощупывающий элементы были подобны по форме и соответствовали масштабу копирования по своим размерам. Кроме того, если режущее лезвие неподвижно закрепленного на пантографе резца не проектируется на плоскость механизма в точку, совпадающую с соответствующей рабочей точкой пантографа, то во избежание искажений нужно обеспечить одинаковые угловые положения режущего и ощупывающего элементов путем закрепления их на противолежащих звеньях параллелограммного пантографа.

Постоянные пантографы обычно имеют масштаб уменьшения до 1 : 25, регулируемые — до 1 : 10. Пример выполнения пантографа копировально-фрезерного станка с уменьшением, регулируемым в пределах 1 : 1,5 — 1 : 7, показан на фиг. 32.



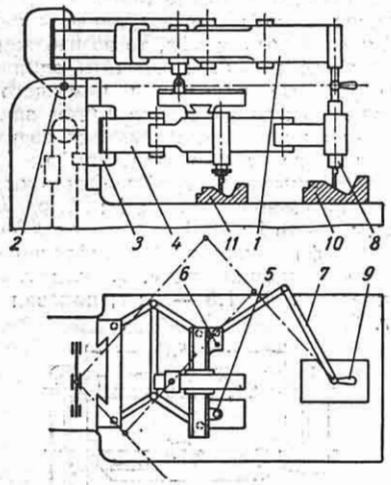
Фиг. 32. Пантограф с регулированием масштаба уменьшения.

Пространственный механизм пантографа с тремя степенями свободы получается после присоединения плоской кинематической цепи пантографа к стойке посредством кинематической пары или соединения с промежуточным звеном, допускающих поворот не только вокруг оси, перпендикулярной к плоскости пантографа, но и вокруг оси, лежащей в этой плоскости. Тогда свободные рабочие точки будут описывать подобные кривые в пространстве. Это дает возможность обрабатывать сложные пространственные поверхности, геометрически подобные поверхности образца.

Если ощупывающий штифт и инструмент закрепить непосредственно на пантографе, то угловые положения штифта относительно образца и инструмента относительно обрабатываемой поверхности будут в процессе работы изменяться

что затруднит обработку. Чтобы устранить указанный недостаток, применяют систему из пантографа и направляющего механизма.

Пример копировального устройства, построенного по такой схеме, показан на фиг. 33. Пантограф *1* имеет возможность качаться вокруг горизонтальной оси *2*. Направляющее устройство состоит из салазок *3*, перемещающихся



Фиг. 33. Копировальное устройство станка.

по вертикальным направляющим, и двухпараллелограммного шарнирного механизма *4*, который обеспечивает поступательное движение звена, несущего инструмент *5* и ощупывающий штифт *6* при копировании в масштабе 1 : 1 без пантографа. При копировании с пантографом на месте штифта *6* может быть закреплен еще один инструмент для одновременной обработки второй детали. Двухзвенный направляющий механизм *7* обеспечивает поступательное перемещение оси ощупывающего штифта *8*, который шарнирно связан с рабочей точкой пантографа и перемещается по образцу *10* вручную — посредством рукоятки *9*.

Другая рабочая точка пантографа шарнирно связана с последним звеном двухпараллелограммного механизма через продольные и поперечные салазки, позволяющие переходить на любую степень уменьшения (в пределах 1 : 1,5 — 1 : 7) без перестановки обрабатываемой детали *11*.

ПЛОСКИЕ МЕХАНИЗМЫ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ И ПОСТУПАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ

Общие сведения

Назначение. Назначение плоских механизмов с вращательными и поступательными парами различно при разных схемах. Основное применение — для преобразования вращательного движения в прямолинейное возвратно-поступательное или наоборот.

Структура и классификация. Наличие поступательных пар в плоском механизме с одними низшими парами (V класс) приводит к структурным особенностям, которые должны быть учтены при определении числа степеней свободы механизма и при построении структурных схем.

Структурная формула для механизмов с вращательными и поступательными парами (смешанных механизмов):

$$W = 3n - 2p_2 + \gamma,$$

где W — число степеней свободы механизма; n — число подвижных звеньев в механизме (исключая стойку); p_2 — число кинематических пар в механизме; γ — число замкнутых контуров, имеющих одни поступательные пары.

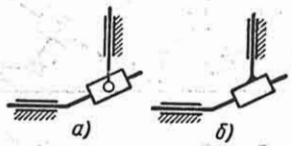
Так как смешанные механизмы не всегда удовлетворяют условию отсутствия индивидуальных пассивных связей, пассивный характер которых определяется структурой механизмов, образование структурных схем методом последовательного присоединения групп звеньев (см. фиг. 7) на эти механизмы распространяется с известными ограничениями, а именно:

1. Замена в шарнирных группах звеньев (см. фиг. 7) некоторых вращательных пар поступательными не должна приводить к образованию замкнутых контуров, имеющих одни поступательные пары, а также сквозных контуров с одними поступательными парами, проходящих по цепи от одной внешней пары до другой. Замена, проводимая с соблюдением указанного условия, позволяет получить все возможные смешанные группы звеньев, не влияющие на число степеней свободы механизма, к которому они присоединяются.

2. Образование смешанных механизмов методом последовательного присоединения смешанных и шарнирных групп звеньев к ведущему кривошипу или

ползуну (см. фиг. 7) дает возможность получить все возможные структурные схемы смешанных *механизмов принужденного движения без индивидуальных пассивных связей*.

3. Метод устранения бездействующих шарниров в построенном по п. 2 механизме дает возможность получить все возможные структурные схемы плоских смешанных *механизмов принужденного движения с индивидуальными пассивными связями* структурного происхождения. Указанный метод состоит в объединении звеньев, связанных вращательной парой, но не имеющих возможности в механизме поворачиваться относительно друг друга вследствие наложенных поступательными парами условий связи. В механизме с бездействующим шарниром (фиг. 34, *а*) устранение последнего не приводит к изменению кинематики механизма (фиг. 34, *б*).



Фиг. 34. Устранение бездействующего шарнира.

Для смешанных механизмов пользуются обычно также классификациями Ассура или Артоболевского, которые, однако, для этих механизмов не являются столь строгими и исчерпывающими, как для плоских шарнирных механизмов.

Индивидуальные пассивные связи, пассивный характер которых определяется соотношениями между основными размерами механизма, при составлении структурной схемы не могут быть учтены; они выявляются при рассмотрении кинематической схемы.

Пассивные связи Смешанный механизм с парами V класса имеет: а) общие пассивные связи в количестве, равном утроенному числу неповторяющихся замкнутых контуров в схеме; б) индивидуальные пассивные связи, зависящие от структурных признаков механизма, в количестве, равном числу замкнутых контуров, образованных одними поступательными парами.

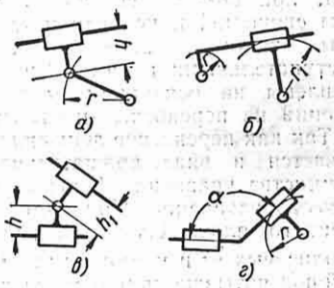
Число общих пассивных связей может быть уменьшено путем замены некоторых пар V класса парами I, II, III и IV классов, например, парами с одним элементом по шаровой поверхности и другим по плоскости или цилиндрической поверхности (см. табл. 1 на стр. 408), плоскостными парами, цилиндрическими парами и т. п.

Число индивидуальных пассивных связей структурного происхождения может быть уменьшено теми же средствами, а также введением бездействующих шарниров (мало рационально).

Кинематика смешанных механизмов II класса 2-го порядка. Применяются графические, графо-аналитические и аналитические методы.

Построение положений всех звеньев механизма при заданном положении ведущего звена расчленяется на последовательное построение положений двухповодковых групп по положениям центров крайних шарниров и осей крайних поступательных пар. На фиг. 35 показаны эти построения для четырех возможных типов смешанных двухповодковых групп. Основные размеры звеньев — r, r_1, h, h_1 и α — заданы.

В группе с одной крайней поступательной парой (фиг. 35, *а*) положение среднего шарнира определяется как пересечение прямой, проведенной параллельно заданной оси поступательной пары, и дуги, описанной из заданного центра крайнего шарнира; в группе с одной средней поступательной парой (фиг. 35, *б*) ось последней определяется



Фиг. 35. Построение положений двухповодковой группы.

как касательная к двум дугам, описанным из заданных центров крайних шарниров; в группе с двумя крайними поступательными парами (фиг. 35, *в*) положение среднего шарнира определяется как пересечение двух прямых, параллельных заданным осям поступательных пар; в группе со средней и крайней поступательными парами (фиг. 35, *г*) ось средней пары определяется как прямая, составляющая требуемый угол α с

заданной осью крайней поступательной пары и касающаяся дуги, описанной из заданного центра шарнира.

Планы скоростей и ускорений строятся последовательно для всех двухповодковых групп, начиная с прилегающей к ведущему кривошипу.

При построении планов скоростей и ускорений для каждой двухповодковой группы известными являются скорости и ускорения центров крайних шарниров и всех точек звеньев, к которым исследуемая группа присоединяется крайними поступательными парами. Требуется определить скорости и ускорения точек обоих звеньев, составляющих группу. Для этого находят скорости и ускорения двух точек каждого звена со сложным плоским движением и одной точки звена с вращательным или прямолинейно-поступательным движением. Таким образом, для звена с крайним шарниром, движение которого задано, требуется определить скорость и ускорение еще одной точки. Это же относится к звену, присоединенному к стойке посредством поступательной пары.

Зная скорости и ускорения двух точек звена, можно легко определить скорость и ускорение любой третьей его точки путем построения треугольников относительных скоростей и ускорений.

В табл. 5 приведены векторные уравнения, при помощи которых строятся планы скоростей и ускорений для различных типов двухповодковых групп с поступательными парами. Уравнения составлены на основании разложения движений на переносные и относительные. Так как переносное движение часто получается в виде вращательного, в большинстве уравнений фигурирует кориолисово ускорение. При наличии построенного плана скоростей величины кориолисовых $\bar{a}^k$ и нормальных $\bar{a}^n$ ускорений подсчитываются или определяются построениями, их направления известны; тангенциальные ускорения $\bar{a}^t$ известны только своими линиями действия, совпадающими с линиями действия соответствующих скоростей.

Кинетостатика смешанных механизмов отличается от кинетостатики шарнирных (см. стр. 456) тем, что при построении планов сил приходится определять наряду с величинами и направлениями реакций в шарнирах величины и положения реакций известных направлений в поступательных парах (подробнее см. [3]).

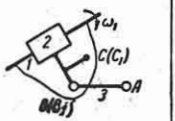
Таблица 5

Векторные уравнения для построения планов скоростей и ускорений двухповодковых групп с поступательными парами (смешанных)

С одной крайней поступательной парой

$$\overbrace{\bar{v}_A+\bar{v}_{BA}}^{\bar{v}_B}=\bar{v}_{B_1}+\bar{v}_{BB_1};$$

$$\bar{v}_C=\bar{v}_{C_1}+\bar{v}_{BB_1};$$



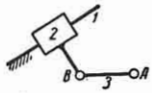
$$\overbrace{\bar{a}_A+\bar{a}^n_{BA}+\bar{a}^t_{BA}}^{\bar{a}_B}=\bar{a}_{B_1}+\bar{a}^k_{BB_1}+\bar{a}^t_{BB_1},$$

где $a^k_{BB_1}=2\omega_1 v_{BB_1}$,

$$\bar{a}_C=\bar{a}_{C_1}+\bar{a}^k_{BB_1}+\bar{a}^t_{BB_1}$$

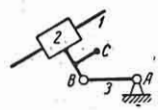
$$\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{v}_{BA};$$

$$\bar{a}_B=\bar{a}_A+\bar{a}^n_{BA}+\bar{a}^t_{BA}$$



$$\bar{v}_B=\bar{v}_{B_1}+\bar{v}_{BB_1};$$

$$\bar{v}_C=\bar{v}_{C_1}+\bar{v}_{BB_1};$$



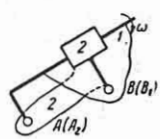
$$\overbrace{\bar{a}^n_B+\bar{a}^t_B}^{\bar{a}_B}=\bar{a}_{B_1}+\bar{a}^k_{BB_1}+\bar{a}^t_{BB_1},$$

$$\bar{a}_C=\bar{a}_{C_1}+\bar{a}^k_{BB_1}+\bar{a}^t_{BB_1}$$

С одной средней поступательной парой

$$\overbrace{\bar{v}_A+\bar{v}_{B_1A}}^{\bar{v}_{B_1}}=\bar{v}_B+\bar{v}_{B_1B};$$

$$\overbrace{\bar{v}_B+\bar{v}_{A_2B}}^{\bar{v}_{A_2}}=\bar{v}_A+\bar{v}_{B_1B};$$



$$\overbrace{\bar{a}_A+\bar{a}^n_{B_1A}+\bar{a}^t_{B_1A}}^{\bar{a}_{B_1}}=\bar{a}_B+\bar{a}^k_{B_1B}+\bar{a}^t_{B_1B},$$

где $a^k_{B_1B}=2\omega v_{B_1B}$;

$$\bar{a}_{A_2}=\bar{a}_A+\bar{a}^k_{B_1B}+\bar{a}^t_{B_1B}$$

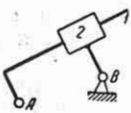
Продолжение табл. 5

С одной средней поступательной парой

$$\bar{v}_{B_1} = \bar{v}_B + \bar{v}_{B_1B};$$

$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{B_1B};$$

$$\overbrace{\bar{a}^n_{B_1} + \bar{a}^t_{B_1}}^{\bar{a}_{B_1}} = \bar{a}_B + \overbrace{\bar{a}^k_{B_1B} + \bar{a}^t_{B_1B}}^{\bar{a}_{A_2}}$$



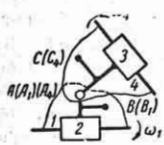
$$\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_A + \bar{v}_{A_2A};$$

$$\bar{v}_{B_1} = \bar{v}_{AA_2};$$

$$\overbrace{\bar{a}^n_{A_2} + \bar{a}^t_{A_2}}^{\bar{a}_{A_2}} = \bar{a}_A + \overbrace{\bar{a}^k_{BB_1} + \bar{a}^t_{BB_1}}^{\bar{a}_{BB_1}},$$

где $a^k_{BB_1} = 2\omega v_{BB_1}$

С двумя крайними поступательными парами



$$\overbrace{\bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{AA_1}}^{\bar{v}_A} = \bar{v}_{A_4} + \bar{v}_{AA_4};$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_1} + \bar{v}_{AA_1}; \quad \bar{v}_C = \bar{v}_{C_4} + \bar{v}_{AA_4};$$

$$\overbrace{\bar{a}_{A_1} + \bar{a}^k_{AA_1} + \bar{a}^t_{AA_1}}^{\bar{a}_A} = \bar{a}_{A_4} + \bar{a}^k_{AA_4} + \bar{v}_{AA_4},$$

где $a^k_{AA_1} = 2\omega_1 v_{AA_1}$;

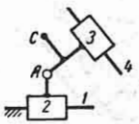
$a^k_{AA_4} = 2\omega_4 v_{AA_4}$;

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}^k_{AA_1} + \bar{a}^t_{AA_1};$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_4} + \bar{a}^k_{AA_4} + \bar{a}^t_{AA_4}$$

Продолжение табл. 5

С двумя крайними поступательными парами

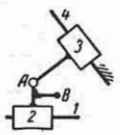


$$\bar{v}_A = \bar{v}_{A_4} + \bar{v}_{AA_4};$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C_4} + \bar{v}_{AA_4};$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A_4} + \bar{a}^k_{AA_4} + \bar{a}^t_{AA_4};$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_4} + \bar{a}^k_{AA_4} + \bar{a}^t_{AA_4}$$



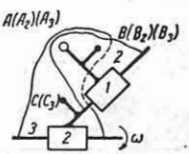
$$\bar{v}_A = \bar{v}_{A_1} + \bar{v}_{AA_1};$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_1} + \bar{v}_{AA_1};$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A_1} + \bar{a}^k_{AA_1} + \bar{a}^t_{AA_1};$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_1} + \bar{a}^k_{AA_1} + \bar{a}^t_{AA_1}$$

С крайней и средней поступательными парами



$$\overbrace{\bar{v}_A + \bar{v}_{A_2A}}^{\bar{v}_{A_2}} = \bar{v}_{A_3} + \bar{v}_{A_2A_3};$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{B_3} + \bar{v}_{AA_2} + \bar{v}_{A_2A_3};$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C_3} + \bar{v}_{A_2A_3};$$

$$\overbrace{\bar{a}_A + \bar{a}^k_{A_2A} + \bar{a}^t_{A_2A}}^{\bar{a}_{A_2}} = \bar{a}_{A_3} + \bar{a}^k_{A_2A_3} + \bar{a}^t_{A_2A_3},$$

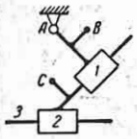
где $a^k_{A_2A} = 2\omega v_{A_2A}$; $a^k_{A_2A_3} = 2\omega v_{A_2A_3}$;

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_3} + \bar{a}^k_{A_2A_3} + \bar{a}^t_{A_2A_3} - \left(\bar{a}^k_{A_2A} + \bar{a}^t_{A_2A}\right);$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_3} + \bar{a}^k_{A_2A_3} + \bar{a}^t_{A_2A_3}$$

Продолжение табл. 5

С крайней и средней поступательными парами



$$\bar{v}_{A_2}=\bar{v}_{A_3}+\bar{v}_{A_2A_3};$$

$$\bar{v}_B=\bar{v}_{B_3}-\bar{v}_{A_2}-\bar{v}_{A_2A_3};$$

$$\bar{v}_C=\bar{v}_{C_3}+\bar{v}_{A_2A_3};$$

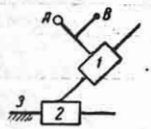
$$\bar{a}_{A_2}$$

$$\bar{a}^{k}_{A_2}+\bar{a}^{t}_{A_2}=\bar{a}_{A_3}+\bar{a}^{k}_{A_2A_3}+\bar{a}^{t}_{A_2A_3};$$

$$\bar{a}_B=\bar{a}_{B_3}+\bar{a}^{k}_{A_2A_3}+\bar{a}^{t}_{A_2A_3}-$$

$$-\left(\bar{a}^{k}_{A_2}+\bar{a}^{t}_{A_2}\right);$$

$$\bar{a}_C=\bar{a}_{C_3}+\bar{a}^{k}_{A_2A_3}+\bar{a}^{t}_{A_2A_3}$$



$$\bar{v}_{A_2}=\bar{v}_A+\bar{v}_{A_2A};$$

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A;$$

$$\bar{a}_{A_2}=\bar{a}_A+\bar{a}_{A_2A}$$

Примечания: 1. A, B, C — точки, изображенные на чертеже, принадлежат одному звену или сразу двум (шарниры); A_1, A_2, A_3 и A_4 — точки, принадлежащие звеньям *1*, *2*, *3* и *4* и совпадающие в данном положении механизма с точкой A; B_1, B_2 и B_3 — то же, но с точкой B; C_1, C_2, C_3 и C_4 — то же, но с точкой C.

2. Обозначения векторов с одиночным индексом относятся к абсолютным скоростям и ускорениям, с двойным индексом — к относительным.

3. Векторы, подчеркнутые одной чертой, известны только по направлению, подчеркнутые двумя чертами — известны по величине и направлению.

4. Векторное уравнение графически может быть решено (построено), если неизвестны два вектора по величине или один — по величине и направлению.

5. Построение планов производится в той последовательности, в которой приведены векторные уравнения.

Четырехзвенные механизмы с вращательными и поступательными парами

Эти механизмы служат для преобразования равномерного вращательного движения в прямолинейное возвратно-поступательное, в неравномерное вращательное, в качательное или в сложное плоское движение. Используются в качестве самостоятельных механизмов или как часть более сложных механизмов.

Типы механизмов. Четырехзвенные механизмы разделяются на типы в зависимости от числа поступательных пар, их расположения и от соотношения между некоторыми основными размерами, влияющими на характер движения звеньев (табл. 6). При числе поступательных пар более двух механизм вырождается в плоский механизм с поступательным движением звеньев.

Механизм по схеме 2 (табл. 6) требует специальных мер для прохождения через среднее положение и поэтому мало пригоден для практического использования.

Кривошипно-шатунные механизмы служат для преобразования вращательного движения в возвратное прямолинейно-поступательное и наоборот.

Кривошипно-шатунные механизмы имеют широкое распространение; они применяются в поршневых двигателях, насосах и компрессорах, в станках с прямолинейным движением резания и т. д.

С целью сокращения числа общих пассивных условий связи для облегчения сборки механизма некоторые из кинематических пар V класса (см. табл. 1 на стр. 408) могут быть заменены парами более низкого класса. Так, замена одной пары на цилиндрическую дает сокращение числа общих пассивных условий связи до 2, поступательной и одной вращательной пары на цилиндрические — до 1, одной пары на шаровую — до 1, одной пары на шаровую и одной на цилиндрическую — до 0. В последнем случае заменяемые пары не должны прилегать к одному звену.

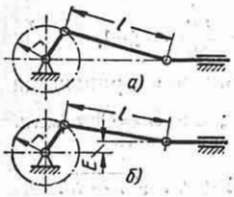
Центральный кривошипно-шатунный механизм (фиг. 36) характеризуется отношением размеров $\lambda=\frac{r}{l}$. Это отношение λ должно быть таким, чтобы угол передачи (см. стр. 449) в соединении шатуна с ползуном не снижался ниже определенного предела.

Таблица 6

Типы четырехзвенных механизмов с вращательными и поступательными парами

С одной поступательной парой

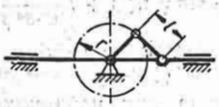
Схема 1



Кривошипно-шатунный:
а — центральный
б — смещенный
$l > r$

Длина хода ползуна для механизма *а* равна $2r$, для механизма *б* приблизительно равна $2r$. Имеет весьма широкое применение

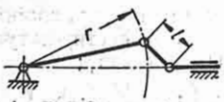
Схема 2



Кривошипно-шатунный с увеличенным ходом ползуна
$l = r$

При равномерном вращении кривошипа дает движение ползуна по закону гармонических колебаний с длиной хода $4r$

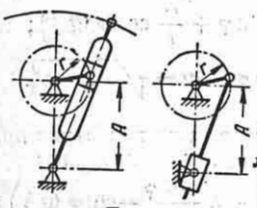
Схема 3



Коромыслово-шатунный
$l < r$

Применяется для получения большого выигрыша в силе в зажимных устройствах, прессах и т. п.

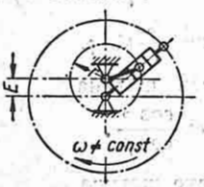
Схема 4



Кривошипно-кулисный с качающейся кулисой
$A > r$

Дает медленный ход при движении кулисы в одну сторону и быстрый — при движении в другую сторону. Применяется в металлорежущих станках и других машинах

Схема 5



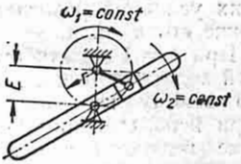
Кривошипно-кулисный с вращающейся кулисой
$E < r$

Передаточное отношение механизма меняется в зависимости от угла поворота кривошипа; среднее значение за оборот $i_{ср} = 1$. Имеет широкое применение в сочетании с другими механизмами

Продолжение табл. 6

С одной поступательной парой

Схема 6

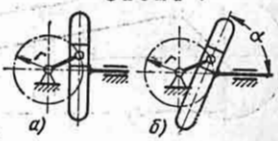


Кривошипно-кулисный с равномерно вращающейся кулисой
$E = r$

Угловая скорость кулисы во всех положениях механизма равна половине угловой скорости кривошипа. Применяется редко

С двумя поступательными парами

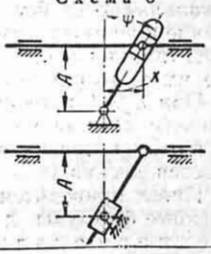
Схема 7



Кривошипно-кулисный с поступательно движущейся кулисой:
а — прямой,
б — наклонной

При равномерном вращении кривошип дает движение кулисы по закону гармонических колебаний. Имеет широкое применение при малых длинах хода. Применяется в счетных приборах (синусный механизм)

Схема 8



Ползунно-кулисный

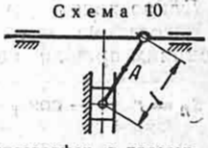
Применяется в счетных приборах (тангенсный механизм)

Схема 9

Двухкулисный
Характеризуется равенством угловых скоростей всех подвижных звеньев.

Применяется в виде соединительных муфт, допускающих смещение осей (крестовые муфты, муфты Ольдгема)

Схема 10



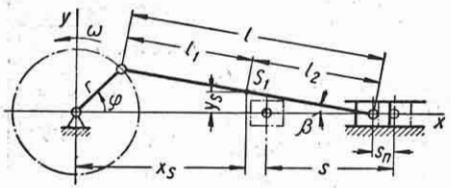
Двухползунный

Траектория точки *A* — окружность, других точек шатуна — эллипс.

Применяется в эллипсографах, в прессах для получения большого выигрыша в силе и т. п.

Наименьшие одинаковые значения угол передачи γ приобретает 1 раз при прямом и 1 раз при обратном ходе. Рекомендуется принимать $\gamma \geqslant 60°$. Тогда $\lambda \leqslant \cos\gamma \leqslant 0{,}5$. Чем меньше λ, тем в лучших условиях работает механизм и тем выше его к. п. д.

При $\lambda = 1$ получается механизм с длиной хода $s = 4r$ и с движением ползуна по закону гармонических колебаний. При использовании кривошипа в качестве ведущего звена механизм имеет мертвые положения в средней точке хода, т. е. при угле между кривошипом и шатуном, равном 0°. Для прохождения



Фиг. 36. Центральный кривошипно-шатунный механизм.

мертвых положений в рассматриваемом механизме рекомендуется иметь специальные устройства, так как использование инерции звеньев не является здесь достаточно надежным. Механизм с $\lambda = 1$ не имеет широкого применения.

При $\lambda > 1$ кривошипно-шатунный механизм обращается в коромыслово-шатунный, который на практике применяется весьма редко.

Ниже приводятся точные и приближенные формулы для кинематического анализа механизма. Приближенные формулы получены путем разложения $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}$ в ряд; они дают достаточно точные результаты при малых λ.

Отношение времени обратного хода к времени прямого хода

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = 1.$$

Длина хода ползуна $s = 2r$.

Расстояние между ползуном и его крайним правым положением (фиг. 36):

$$s_n = r\left[1 - \cos\varphi + \frac{1}{\lambda}(1 - \cos\beta)\right];$$

$$s_n \approx r\left[1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\varphi)\right].$$

Скорость ползуна

$$v = -r\omega(\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\beta);$$

$$v \approx -r\omega\left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right);$$

$$v_{cp} = \frac{2}{\pi} r\omega;$$

при $\omega = \frac{\pi n}{30}$ сек.$^{-1}$,

где n — число оборотов кривошипа в минуту, $v_{cp} = \frac{rn}{15}$; при $\omega = 2\pi n$ мин.$^{-1}$, $v_{cp} = 4rn$;

$$v_{\max} \approx r\omega(1 + \lambda^2)\sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Ускорение ползуна при равномерном вращении кривошипа:

$$a = -r\omega^2\left(\cos\varphi - \sin\varphi \operatorname{tg}\beta + \lambda\frac{\cos^2\varphi}{\cos^3\beta}\right);$$

$$a \approx -r\omega^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi);$$

$$a_{\max} \approx r\omega^2(1 + \lambda).$$

Ускорение ползуна при неравномерном вращении кривошипа:

$$a \approx -r\omega^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) - r\varepsilon_0\left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right),$$

где ε_0 — угловое ускорение кривошипа.

Координаты центра тяжести шатуна:

$$x_S = r\cos\varphi + l_1\cos\beta;$$

$$x_S \approx r\cos\varphi + l_1\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right);$$

$$y_S = l_2\lambda\sin\varphi.$$

Скорость центра тяжести шатуна:

$$v_x = -r\omega\left(\sin\varphi + \frac{l_1}{l}\cos\varphi \operatorname{tg}\beta\right);$$

$$v_y = r\omega\frac{l_2}{l}\cos\varphi; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Ускорение центра тяжести шатуна при равномерном вращении кривошипа:

$$a_x = -r\omega^2\left(\cos\varphi + \lambda\frac{\cos^2\varphi}{\cos^3\beta} - \sin\varphi \operatorname{tg}\beta\right);$$

$$a_x \approx -r\omega^2\left(\cos\varphi + \frac{l_2}{l}\lambda\cos 2\varphi\right);$$

$$a_y = -r\omega^2\frac{l_2}{l}\sin\varphi.$$

Угловая скорость шатуна

$$\omega_{ш} = \omega\lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}.$$

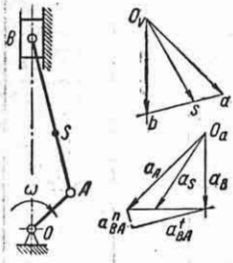
Угловое ускорение шатуна

$$\varepsilon_{ш} = -\omega^2 \operatorname{tg}\beta\left[1 - \left(\lambda\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}\right)^2\right].$$

Во всех точных формулах

$$\beta = \arcsin(\lambda \sin \varphi).$$

Значения основных показателей механизма, зависящих от λ, приведены в табл. 7.

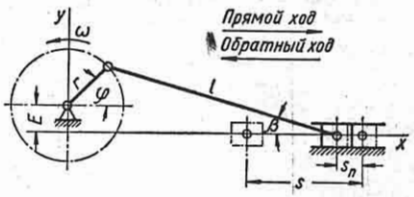


Фиг. 37. Планы скоростей и ускорений кривошипно-шатунного механизма.

В таблице: r — радиус кривошипа в *м*, n — число оборотов кривошипа в минуту.

Построение планов скоростей и ускорений (фиг. 37) производится теми же приемами, что и для плоских шарнирных механизмов.

Смещенный кривошипно-шатунный механизм (фиг. 38) характеризуется отношениями $\lambda = \frac{r}{l}$ и $\varepsilon = \frac{E}{l}$, которые должны быть такими, чтобы угол передачи в соединении шатуна с ползуном не снижался до слишком малых значений. При прямом ходе механизм проходит через два положения, в которых угол передачи может оказаться наименьшим; при обратном ходе имеется одно такое положение.



Фиг. 38. Смещенный кривошипно-шатунный механизм.

Рекомендуемые углы передачи: при прямом ходе $\gamma_{nx} \geqslant 60°$; при обратном ходе $\gamma_{ox} \geqslant 45°$.

Для удовлетворения этих условий необходимо, чтобы

$$\lambda - \varepsilon \leqslant \cos \gamma_{nx} \leqslant 0{,}5;$$

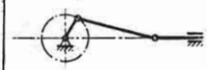
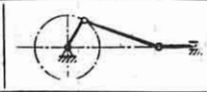
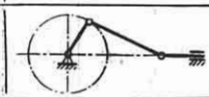
$$\frac{\varepsilon}{1-\lambda} \leqslant \cos \gamma_{nx} \leqslant 0{,}5;$$

$$\lambda + \varepsilon \leqslant \cos \gamma_{ox} \leqslant 0{,}7.$$

Проверку основных размеров удобно производить по графику (фиг. 39): точка с координатами λ и ε не должна выхо-

Таблица 7

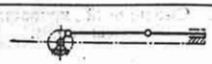
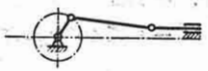
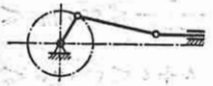
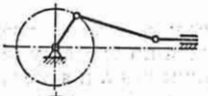
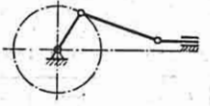
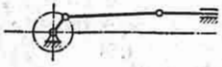
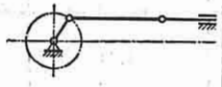
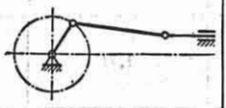
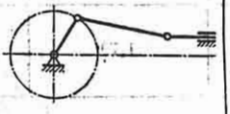
Основные характеристики центрального кривошипно-шатунного механизма

$\lambda = \frac{r}{l}$	Эскиз	Наименьшее значение угла передачи γ	Отношение скоростей ползуна $\frac{v_{max}}{v_{ср}}$	Наибольшее ускорение ползуна (в крайней правой точке) a в *м/сек²*
0,1		84°	1,59	$0{,}012rn^2$
0,2		78°,5	1,60	$0{,}013rn^2$
0,3		72°,5	1,63	$0{,}014rn^2$
0,4		66°,5	1,71	$0{,}0155rn^2$
0,5		60°	1,79	$0{,}0165rn^2$

Примечание. r — в метрах.

Таблица 8

Основные характеристики смещенного кривошипно-шатунного механизма

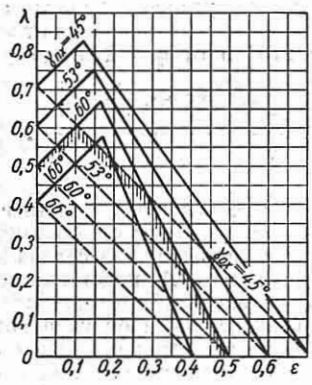
$\varepsilon = \frac{E}{l}$	$\lambda = \frac{r}{l}$	Эскиз	Наименьшее значение угла передачи $\gamma_{пх}$	Наименьшее значение угла передачи $\gamma_{ох}$	Длина хода s	$\frac{T_{ох}}{T_{пх}}$	Для прямого хода ползуна $v_{ср}$ в $м/мин$	Для прямого хода ползуна $\frac{v_{max}}{v_{ср}}$	Ускорение ползуна в конце обратного и начале прямого хода a в $м/сек^2$
0,1	0,1		83°,5	78°,5	2,010r	0,99	4,00rn	1,58	0,012rn^2
	0,2		83°	72°,5	2,010r	0,98	3,98rn	1,59	0,013rn^2
	0,3		78°,5	66°,5	2,011r	0,96	3,94rn	1,63	0,014rn^2
	0,4		72°,5	60°	2,012r	0,94	3,90rn	1,69	0,0155rn^2
	0,5		66°,5	53°	2,014r	0,92	3,86rn	1,77	0,0165rn^2
	0,6		60°	45°,5	2,016r	0,89	3,80rn	1,85	0,0175rn^2
0,2	0,1		77°	72°,5	2,042r	0,93	4,05rn	1,57	0,0125rn^2
	0,2		73°,5	66°,5	2,044r	0,95	4,00rn	1,58	0,0135rn^2
	0,3		73°,5	60°	2,046r	0,92	3,93rn	1,61	0,0145rn^2
	0,4		70°,5	53°	2,050r	0,88	3,85rn	1,66	0,0155rn^2
	0,5		66°,5	45°,5	2,057r	0,84	3,78rn	1,74	0,017rn^2

Продолжение табл. 8

$\varepsilon = \frac{E}{l}$	$\lambda = \frac{r}{l}$	Эскиз	Наименьшее значение угла передачи γ_{nx}	Наименьшее значение угла передачи γ_{ox}	Длина хода s	$\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$	Для прямого хода ползуна: v_{cp} в м/мин	Для прямого хода ползуна: $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$	Ускорение ползуна в конце обратного и начале прямого хода a в м/сек²
0,3	0,1		70°,5	66°,5	$2{,}098r$	0,93	$4{,}11rn$	1,57	$0{,}0125rn^2$
	0,2		68°	60°	$2{,}101r$	0,92	$4{,}03rn$	1,58	$0{,}0135rn^2$
	0,3		64°,5	53°	$2{,}108r$	0,88	$3{,}96rn$	1,59	$0{,}015rn^2$
	0,4		60°	45°,5	$2{,}119r$	0,82	$3{,}85rn$	1,64	$0{,}016rn^2$
0,4	0,1		63°,5	60°	$2{,}184r$	0,95	$4{,}26rn$	1,53	$0{,}013rn^2$
	0,2		60°	53°	$2{,}192r$	0,89	$4{,}14rn$	1,53	$0{,}014rn^2$

Примечание. r — в метрах.

дить из поля, ограниченного сплошной ломаной линией, соответствующей пре-



Фиг. 39. Диаграмма для проверки кривошипно-шатунного механизма на углы передачи.

дельному значению γ_{nx}, и пунктирной прямой, соответствующей предельному значению γ_{ox}. Заштрихованное поле включает механизмы, для которых $\gamma_{nx} \geqslant 60°$ и $\gamma_{ox} \geqslant 45°$.

Ниже приводятся точные и приближенные формулы для кинематического анализа смещенного механизма (см. фиг. 38).

Отношение времени обратного хода к времени прямого хода

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{180° - \arcsin\frac{\varepsilon}{1-\lambda} + \arcsin\frac{\varepsilon}{1+\lambda}}{180° + \arcsin\frac{\varepsilon}{1-\lambda} - \arcsin\frac{\varepsilon}{1+\lambda}}.$$

Длина хода ползуна

$$s = l\left[\sqrt{(1+\lambda)^2 - \varepsilon^2} - \sqrt{(1-\lambda)^2 - \varepsilon^2}\right];$$

$$s \approx r\left[2 + \frac{\varepsilon^2}{1-\lambda^2}\right].$$

Расстояние между ползуном и его крайним правым положением

$$s_n = l\sqrt{(1+\lambda)^2 - \varepsilon^2} - r\cos\varphi - l\cos\beta.$$

Скорость ползуна

$$v = -r\omega(\sin\varphi + \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\beta).$$

Ускорение ползуна при равномерном вращении кривошипа

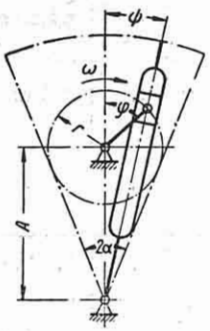
$$a = -r\omega^2\left(\cos\varphi + \lambda\frac{\cos^2\varphi}{\cos^3\beta} - \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\beta\right).$$

Во всех формулах

$$\beta = \arcsin(\varepsilon + \lambda\sin\varphi).$$

Основные показатели смещенного кривошипно-шатунного механизма приведены в табл. 8.

В таблице r — радиус кривошипа в *м*; n — число оборотов кривошипа в минуту.



Фиг. 40. Кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой.

Построение планов скоростей и ускорений производится так же, как для центрального механизма (см. фиг. 37).

Кривошипно-кулисный механизм с качающейся кулисой (фиг. 40) служит для преобразования вращательного движения кривошипа в качательное движение кулисы с плавно изменяющимися угловой скоростью и угловым ускорением на всем угле качания.

Отношение времени обратного (быстрого) хода к времени прямого хода

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{90° - \arcsin\frac{r}{A}}{90° + \arcsin\frac{r}{A}}.$$

Полный угол качания кулисы

$$2\alpha = 2\arcsin\frac{r}{A}.$$

Угловое положение кулисы

$$\psi = \mathrm{arctg}\frac{r\sin\varphi}{A + r\cos\varphi}.$$

Угловая скорость кулисы:

$$\omega_к = r\omega\frac{A\cos\varphi + r}{A^2 + 2Ar\cos\varphi + r^2};$$

$$\omega_{к\,max} = \omega\frac{r}{A+r} \text{ при прямом ходе;}$$

$$\omega_{к\,max} = \omega\frac{r}{A-r} \text{ при обратном ходе.}$$

Угловое ускорение кулисы при равномерном вращении кривошипа

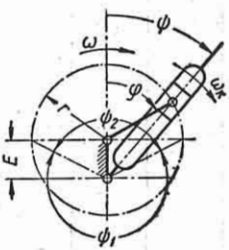
$$\varepsilon_к = r\omega^2\frac{A(r-A)^2\sin\varphi}{(A^2 + 2Ar\cos\varphi + r^2)^2}.$$

При построении плана ускорений (см. табл. 5 на стр. 472) необходимо учитывать кориолисово ускорение, так как в рассматриваемом случае переносным движением является вращение кулисы.

Рекомендуется принимать

$$\frac{r}{A} \leqslant 0{,}5;$$

тогда $2\alpha \leqslant 60°$.



Фиг. 41. Кривошипно-кулисный механизм с вращающейся кулисой.

Кривошипно-кулисный механизм с вращающейся кулисой (фиг. 41) служит для преобразования равномерного вращательного движения кривошипа в неравномерное вращательное движение кулисы. Отношение времени поворота кулисы от $\psi = 90°$ до $\psi = 270°$ и от $\psi = 270°$ до $\psi = 90°$ при равномерно вращающемся кривошипе

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{90° - \arcsin\frac{E}{r}}{90° + \arcsin\frac{E}{r}}.$$

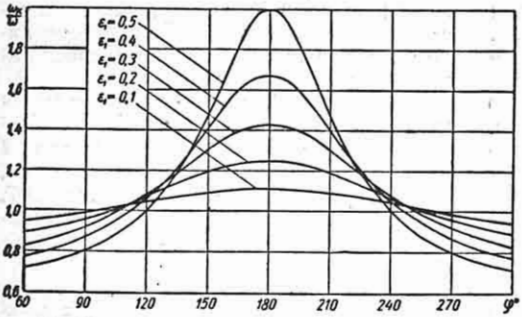
Отношение углов поворота кулисы за время поворота кривошипа от $\varphi = 90°$ до $\varphi = 270°$ и от $\varphi = 270°$ до $\varphi = 90°$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{90° + \mathrm{arctg}\frac{E}{r}}{90° - \mathrm{arctg}\frac{E}{r}}.$$

Положение, угловая скорость и угловое ускорение кулисы определяются по формулам для механизма с качающейся кулисой (вместо A подставляется E). Кривые изменения передаточного отношения в зависимости от угла поворота ведущего звена для механизмов с различными соотношениями между основными размерами показаны на фиг. 42. При построении плана ускорений необходимо учитывать кориолисово ускорение (см. табл. 5 на стр. 472).

Рекомендуется принимать

$$\varepsilon_1 = \frac{E}{r} \leqslant 0{,}5.$$



Фиг. 42. Изменение передаточного отношения кривошипно-кулисного механизма с вращающейся кулисой.

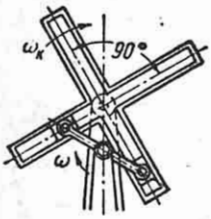
Кривошипно-кулисный механизм с равномерно вращающейся кулисой (см. схему 6 в табл. 6) осуществляет передачу вращательного движения между параллельными валами с постоянным передаточным отношением. Этот механизм получается из предыдущего (фиг. 41), когда $E = r$.

Передаточное отношение

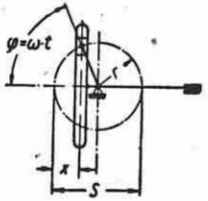
$$i = \frac{\omega_к}{\omega} = \frac{1}{2}.$$

При $\varphi = 180°$ механизм имеет мертвое положение: не может передавать крутящего момента от кривошипа к кулисе и допускает возможность независимого движения кулисы.

Прохождение через мертвое положение может быть обеспечено инерцией ведомого звена или применением сдвоенного механизма с крестовой кулисой (фиг. 43).



Фиг. 43. Передача с постоянным передаточным отношением.



Фиг. 44. Кривошипно-кулисный механизм с поступательно-движущейся прямоугольной кулисой (ползуном).

Кривошипно-кулисные механизмы с поступательно движущейся кулисой служат для преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное. При равномерном вращении кривошипа движение кулисы происходит по законам гармонических колебаний.

Механизм с прямоугольной кулисой (фиг. 44). Длина хода кулисы $s = 2r$.

Координата положения кулисы

$$x = r(1 - \cos\varphi).$$

Скорость кулисы:

$$v = r\omega \sin\varphi = \omega\sqrt{2rx - x^2};$$

$$v_{ср} = \frac{2}{\pi} r\omega;$$

$$v_{max} = r\omega.$$

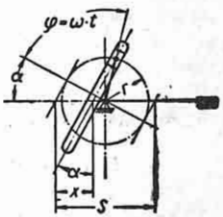
Ускорение кулисы:

$$a = r\omega^2 \cos\varphi = (r - x)\,\omega^2;$$

$$a_{max} = 0{,}0110\, rn^2 \ м/сек^2,$$

где r — радиус кривошипа в $м$; n — число оборотов кривошипа в минуту.

Механизм с наклонной кулисой (фиг. 45) применяется редко.



Фиг. 45. Кривошипно-кулисный механизм с поступательно-движущейся наклонной кулисой (ползуном).

Для анализа механизма можно пользоваться формулами для механизма с прямоугольной кулисой, если вместо r подставить $\frac{r}{\cos\alpha}$ и начало отсчета угла φ сместить на угол α.

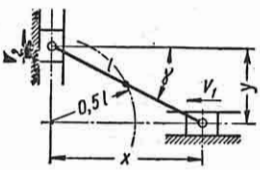
Ползунно-кулисный механизм (см. схему 8 в табл. 6) служит для преобразования прямолинейного возвратно-поступательного движения ползуна в качательное движение кулисы или наоборот. Координата положения ползуна $x = A \operatorname{tg}\psi$. Угол передачи $\gamma = 90° - \psi$.

Рекомендуется $\gamma \geqslant 60°$; тогда угол качания кулисы $2\alpha \leqslant 60°$, длина хода ползуна $s \leqslant 1{,}15A$.

Двухкулисный механизм (см. схему 9 в табл. 6) имеет одинаковые угловые скорости вращения кулис, что используется в плавающих соединительных муфтах (типа Ольдгема). При относительном смещении валов с соблюдением их параллельности угловые скорости остаются одинаковыми. Если поступательные пары заменить плоскостными, как обычно и делается в плавающих муфтах, то при относительном повороте осей валов на небольшой угол муфта рабо-

тает как шарнирная за счет смещений в плоскостных кинематических парах.

Звено, не связанное со стойкой (двойной кулисный камень), движется таким образом, что закрепленная неподвижно на стойке точка описывает на нем эллипс. Это свойство механизма может быть использовано для обработки эллиптических профилей. Изменяя расстояние между центрами вращательных пар на стойке, можно получать эллипсы с различными фокусными расстояниями; при совпадении центров получается окружность.



Фиг. 46. Двухползунный механизм.

Двухползунный механизм (см. схему 10 в табл. 6) пригоден для передачи прямолинейно-поступательного движения под углом с передаточным отношением, изменяющимся от 0 до ∞. При i, близком к нулю, получается значительное увеличение силы.

В передаче под углом 90° (фиг. 46)

$$i = \frac{v_2}{v_1} = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Угол передачи в соединении шатуна с ведомым ползуном изменяется от 0° до 90° при уменьшении x от наибольшей величины до нуля.

Рекомендуется $\gamma \geqslant 30°$, тогда

$$x \leqslant l \cos 30° = 0{,}86l;$$

$$y \geqslant l \sin 30° = 0{,}5l.$$

С целью сокращения числа общих пассивных условий связи вращательные пары V класса могут быть заменены цилиндрическими или шаровыми.

Траектория движения средней точки шатуна—окружность, остальных точек—эллипсы. Это свойство двухползунного механизма используется в эллипсографе — приборе для вычерчивания эллипсов.

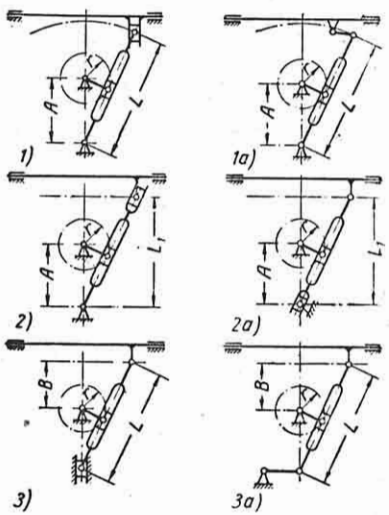
Многозвенные механизмы с вращательными и поступательными парами

Механизмы с числом звеньев более четырех применяются: а) для передачи движения от нескольких ведущих или к нескольким ведомым звеньям, связанным со стойкой; б) для получения движения звеньев с такими кинематическими и динамическими характеристиками, которых не дает четырехзвенный механизм.

Шестизвенный кривошипно-кулисный механизм с качающейся и поступательно-движущейся кулисой (схема *1* на фиг. 47), а также его модификации, показанные на остальных схемах фиг. 47, используются преимущественно в металлорежущих станках для привода главного движения резания.

Назначение механизмов — преобразование вращательного движения в прямолинейное возвратно-поступательное с плавным изменением скорости и ускорения ведомого звена на всей длине хода и значительной разницей средних скоростей при прямом и при обратном ходе.

Механизмы *1*, *1а* и *2* (фиг. 47) относятся ко II классу, 2-му порядку, а механизмы *2а*, *3* и *3а*—к III классу,



Фиг. 47. Типы шестизвенных кривошипно-кулисных механизмов для преобразования вращательного движения в прямолинейное возвратно-поступательное.

3-му порядку по классификации Артоболевского. Наличие трехповодковых групп в механизмах по двум последним схемам значительно осложняет их кинематический анализ по сравнению с механизмами *1*, *1а*, *2* и *2а*.

Механизмы характеризуются:

а) длиной хода ведомого звена s *мм*;

б) средней скоростью ведомого звена при прямом ходе $v_{ср}$ *м/мин*;

в) отношением $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ — наибольшей скорости к средней скорости прямого хода, влияющим на производительность станка;

г) отношением $\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$ — времени обратного хода к времени прямого хода ведомого звена, определяющим потери времени на холостой ход.

Закон движения ведомого звена и определяемые им отношения $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ и $\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$ зависят от схемы механизма и его основных размеров. Уменьшение $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ и $\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$, выгодное с точки зрения производительности станка, ограничивается допустимыми силами инерции.

У механизмов *1а* и *3а* законы движения ведомых ползунов незначительно отличаются от законов движения ползунов соответственно у механизмов по схемам *1* и *3*.

Механизмы *1*, *1а*, *2* и *2а* характеризуются величиной $\rho = \frac{r}{A} = \sin\alpha$, где r — радиус ведущего кривошипа; A — расстояние между осью вращения кривошипа и осью качания кулисы; α — половина угла качания кулисы. Значение ρ рекомендуется брать не более 0,5.

В механизме по схеме *1* (фиг. 47 и 48):

координата положения ползуна

$$x = L\rho \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi}};$$

скорость ползуна

$$v = L\omega\rho \frac{(1+\rho^2)\cos\varphi + \rho(1+\cos^2\varphi)}{(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi)^{3/2}};$$

ускорение ползуна

$$a = -L\omega^2\rho \frac{(1-\rho^2+\rho^4)\sin\varphi + (2-\rho+2\rho^2-\rho^3)\sin\varphi\cos\varphi + (4\rho+3\rho^2)\sin\varphi\cos^2\varphi}{(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi)^{2/5}}.$$

В механизмах *2* и *2а* (фиг. 47)

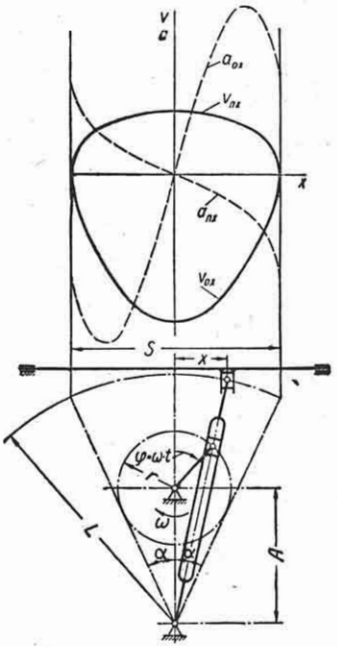
$$x = L_1\rho \frac{\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi};$$

$$v = L_1\omega\rho \frac{-\cos\varphi + \rho(1-2\cos^2\varphi)}{(1+\rho\cos\varphi)^2};$$

$$a = -L_1\omega^2\rho \frac{(4\rho-2\rho^3)\sin\varphi\cos\varphi + (1-2\rho^2)\sin\varphi + 15\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi + 8\rho^3\cos^3\varphi}{(1+\rho\cos\varphi)^4}.$$

В механизмах по схемам *3* и *3а* x, v и a обычно определяются графически.

График изменения скорости и ускорения ползуна в механизме по схеме *1* (см. фиг. 47) приведен на фиг. 48.



Фиг. 48. Изменение скорости и ускорения ползуна кривошипно-кулисного механизма.

Для всех шестизвенных кривошипно-кулисных механизмов

$$\frac{T_{ox}}{T_{nx}} = \frac{90^\circ - \alpha^\circ}{90^\circ + \alpha^\circ}.$$

Для механизма *1* (фиг. 47):

$$s = 2L\sin\alpha = 2L\rho;$$

$$v_{cp} = \frac{2}{\pi}L\omega\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}} = \frac{1}{\pi}L\omega\rho\left(1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}\right);$$

при $\omega = 2\pi n$ мин.$^{-1}$

$$v_{cp} = 4Ln\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}} = 2Ln\rho\left(1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}\right);$$

$$\frac{v_{max}}{v_{cp}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}}{1+\sin\alpha} = \frac{\pi}{(1+\rho)\left(1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}\right)}.$$

Для механизмов *2* и *2а* (фиг. 47):

$$s = 2L_1\operatorname{tg}\alpha = \frac{2L\rho}{\sqrt{1-\rho^2}};$$

$$v_{cp} = \frac{2}{\pi}L_1\omega\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}} = \frac{1}{\pi}L_1\omega\rho\frac{1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}}{\sqrt{1-\rho^2}};$$

при $\omega = 2\pi n$ мин.$^{-1}$

$$v_{cp} = 4L_1n\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}} = 2L_1n\rho\frac{1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}}{\sqrt{1-\rho^2}};$$

$$\frac{v_{max}}{v_{cp}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}}{1+\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{\pi\sqrt{1-\rho^2}}{(1+\rho)\left(1+\frac{T_{ox}}{T_{nx}}\right)}.$$

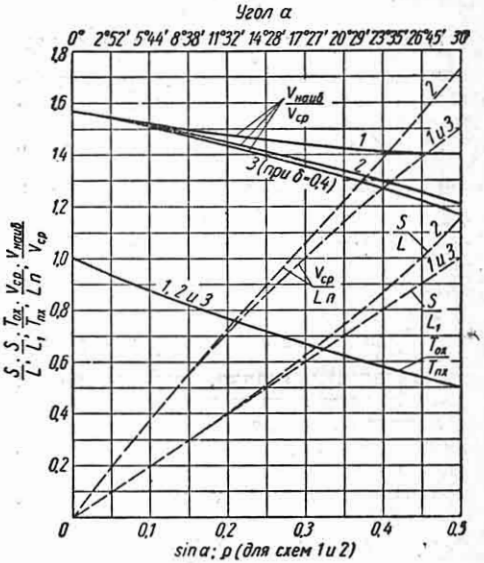
Механизмы *3* и *3а* (фиг. 47) характеризуются величиной $\delta = \frac{B}{L}$ и углом α. Для механизма *3*:

$$s = 2L\sin\alpha; \qquad v_{cp} = \frac{2}{\pi}L\omega\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}};$$

при $\omega = 2\pi n$ мин.$^{-1}$ $\quad v_{cp} = 4Ln\frac{\sin\alpha}{1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}};$

$$\frac{v_{max}}{v_{cp}} = \frac{\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\right)(\cos\alpha-\delta)}{1+\sin\alpha\cos\alpha-\delta(1+\sin\alpha)}.$$

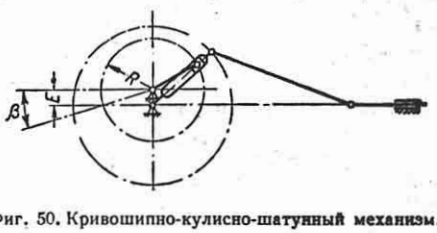
На фиг. 49 приведен график изменения $\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$, s, v_{cp} и $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ в зависимости от α и ρ для различных схем механизма. Для механизма *3* кривая $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ построена при значении $\delta = 0{,}4$, чаще всего встречающемся на практике. $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ получается наибольшим в механизме *1*,



Фиг. 49. Основные характеристики кривошипно-кулисных механизмов.

при переходе к схеме *2* это отношение снижается на величину до 13,5%, при переходе от схемы *2* к схеме *3* — до 3%. Таким образом, с увеличением значений ρ и α все более выгодными против схем *1* и *1а* с точки зрения производительности станка становятся схемы *2* и *2а* и особенно схемы *3* и *3а*.

Шестизвенные кривошипно-кулисно-шатунные механизмы и восьмизвенные кривошипно-кулисные механизмы. Шестизвенный кривошипно-кулисно-шатунный механизм (фиг. 50) получается

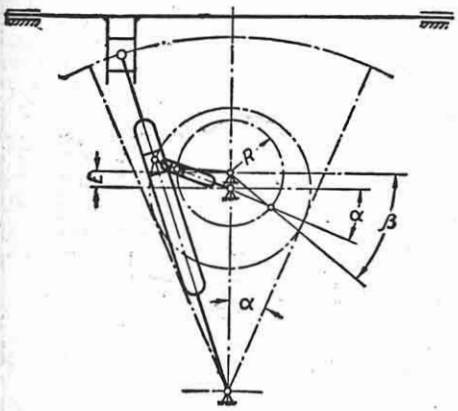


Фиг. 50. Кривошипно-кулисно-шатунный механизм.

из кривошипно-шатунного механизма (обычно центрального) заменой ведущего кривошипа механизмом вращающейся

кулисы (см. фиг. 41). Такая замена дает уменьшение скорости прямого хода ползуна за счет повышения скорости обратного хода.

Восьмизвенные кривошипно-кулисные механизмы (фиг. 51) получаются посредством такой же замены из шестизвенных кривошипно-кулисных механизмов (см. фиг. 47), что приводит к уменьшению времени обратного хода ведомого звена, средней скорости прямого хода



Фиг. 51. Восьмизвенный кривошипно-кулисный механизм.

и отношения наибольшей к средней скорости при прямом ходе.

Отношение времени обратного хода T'_{ox} к времени прямого хода T'_{nx} сложного механизма

$$\frac{T'_{ox}}{T'_{nx}} = \frac{90^\circ - \beta^\circ}{90^\circ + \beta^\circ} = K_1 \frac{T_{ox}}{T_{nx}},$$

где

$$K_1 = \frac{90^\circ - \beta^\circ}{90^\circ + \beta^\circ} \cdot \frac{90^\circ + \alpha^\circ}{90^\circ - \alpha^\circ};$$

$\frac{T_{ox}}{T_{nx}}$ — отношение времен для исходного механизма; α и β — см. фиг. 50 и 51.

Для механизма с $\alpha = 0$ (например, по фиг. 50) $\sin\beta = \varepsilon_1$. Для механизма с $\alpha \neq 0$ (например, по фиг. 51)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\beta - \varepsilon_1}{\cos\beta};$$

$$\sin\beta = \cos^2\alpha \left[\varepsilon_1 + \operatorname{tg}\alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon_1^2}\right],$$

где $\varepsilon_1 = \frac{E}{R}$ — относительная величина эксцентриситета. Средняя скорость прямого хода сложного механизма

$$v'_{cp} = K_2 v_{cp},$$

где

$$K_2 = \frac{90^\circ + \alpha^\circ}{90^\circ + \beta^\circ};$$

v_{cp} — средняя скорость прямого хода исходного механизма.

Отношение наибольшей скорости к средней для прямого хода сложного механизма

$$\frac{v'_{max}}{v'_{cp}} = K_3 \frac{v_{max}}{v_{cp}},$$

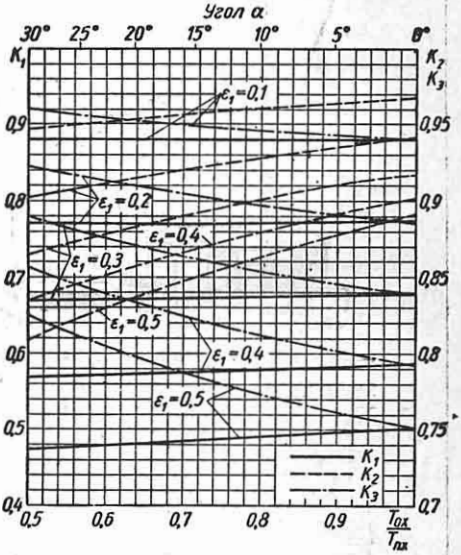
где

$$K_3 = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \cdot \frac{90^\circ + \beta^\circ}{90^\circ + \alpha^\circ},$$

а $\frac{v_{max}}{v_{cp}}$ — отношение скоростей для прямого хода исходного механизма.

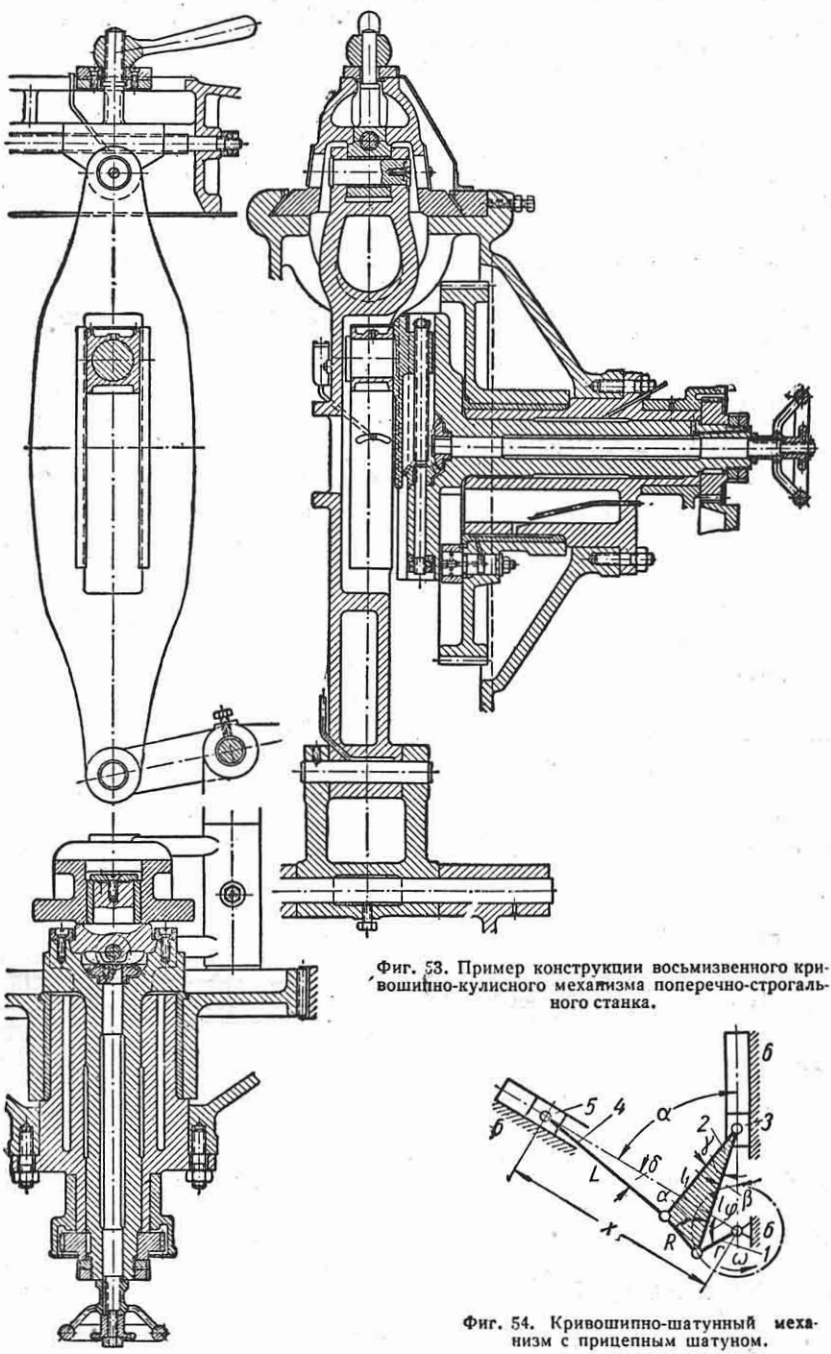
Значения K_1, K_2 и K_3 можно определить также по графику (фиг. 52).

Рекомендуется принимать $\varepsilon_1 \leqslant 0{,}5$.



Фиг. 52. Диаграмма для определения значений K_1, K_2 и K_3.

Проверку звеньев восьмизвенных кривошипно-кулисных механизмов на прочность и износ следует производить как при прямом рабочем ходе, так и при обратном холостом ходе, так как силы



Фиг. 53. Пример конструкции восьмизвенного кривошипно-кулисного механизма поперечно-строгального станка.

Фиг. 54. Кривошипно-шатунный механизм с прицепным шатуном.

инерции в этих механизмах могут достигать значительных величин.

Пример конструкции восьмизвенного кривошипно-кулисного механизма поперечно-строгального станка с регулированием длины хода ведомого звена приведен на фиг. 53.

Кривошипно-шатунный механизм с прицепным шатуном применяется в многоцилиндровых поршневых машинах (двигателях), в которых несколько цилиндров, расположенных под углом, работают на один кривошип коленчатого вала. Кинематический анализ основной части механизма *1—2—3—6* (фиг. 54) производится по соответствующим формулам для центрального кривошипно-шатунного механизма.

Положение и скорость ползуна *5* для механизма с углом расположения цилиндров α, равным углу шатуна при шарнире кривошипа, подсчитываются по формулам:

$$x = r\cos\varphi + R\cos\beta + L\cos\delta;$$

$$v_5 = \omega r\left\{\sin\varphi + \frac{r}{l^2}\left[\frac{R\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)}{\cos\beta} + \frac{l_1^2\sin(\varphi-\gamma)\cos(\varphi-\gamma)}{L\cos\delta}\right]\right\},$$

где

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2(\varphi+\alpha)};$$

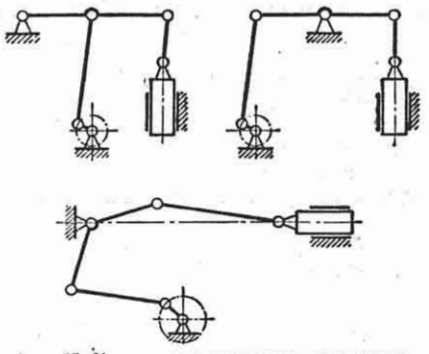
$$\cos\delta = \sqrt{1-\left(\frac{rl_1}{lL}\right)^2\sin^2(\varphi-\gamma)}.$$

Скорости и ускорения механизмов с прицепными шатунами легко определяются также построением планов скоростей и ускорений.

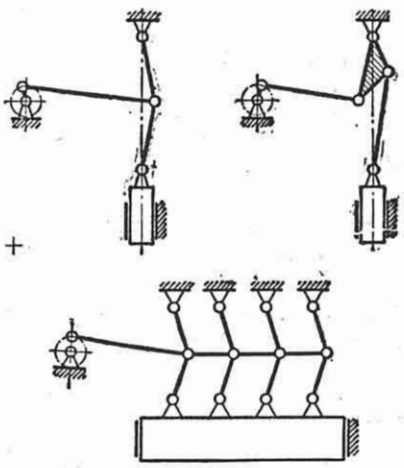
Кривошипно-рычажные механизмы служат для преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное. Применяются главным образом в прессах небольшой мощности (фиг. 55).

Кривошипно-коленные механизмы служат для преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное со значительным возрастанием усилия на ползуне в конце его хода. Применяются в различных зажимных приспособлениях и в прессах средней и большой мощности (фиг. 56).

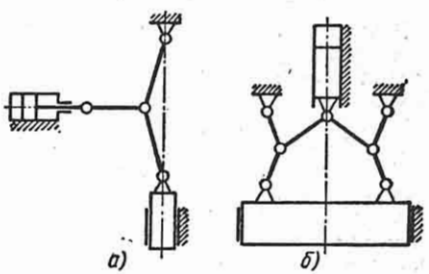
Ползунно-коленные механизмы служат для преобразования прямолинейно-поступательного движения ведущего звена в прямолинейно-поступательное движение ведомого ползуна со значительным выигрышем усилия в конце хода последнего. Применяются, например, в пневматических (фиг. 57, *а*) и



Фиг. 55. Кривошипно-рычажные механизмы.



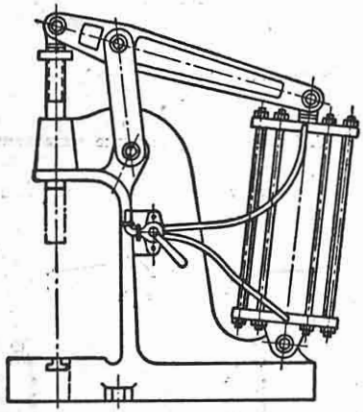
Фиг. 56. Кривошипно-коленные механизмы.



Фиг. 57. Ползунно-коленные механизмы.

гидравлических (фиг. 57, *б*) прессах, а также в различных зажимных устройствах.

Рычажные механизмы с качающимся цилиндром (кулисные) служат для преобразования прямолинейно-поступательного перемещения поршня относительно качающегося цилиндра в прямолинейно-поступательное движение ведо-



Фиг. 58. Пневматический пресс с качающимся цилиндром.

мого ползуна с выигрышем усилия. Такие механизмы применяются, например, в пневматических зажимных устройствах и в мелких пневматических прессах (фиг. 58).

ВИНТОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ С СООСНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР

Общие сведения

Назначение. Винтовые механизмы с соосным расположением кинематических пар пригодны для преобразования с постоянным отношением скоростей винтового, вращательного и прямолинейно-поступательного движений в любых сочетаниях. Основное использование — получение медленного прямолинейно-поступательного движения с большим выигрышем силы (домкраты, зажимные устройства) или с точным отсчетом пройденного пути (измерительные приборы, станки). В винтовых механизмах легко достигается самоторможение.

Структура. Звенья механизма могут соединяться винтовыми, вращательными и поступательными парами (V класса).

При составлении структурной схемы необходимо следить за тем, чтобы в механизме не образовалось групп звеньев с независимой подвижностью. Независимая подвижность одного звена получается при соединении его с соседними звеньями двумя поступательными, двумя вращательными или двумя винтовыми парами одинакового шага. Независимая подвижность группы из двух звеньев имеет место, например, при соединении их между собой поступательной и с соседними звеньями двумя вращательными парами или между собой вращательной и с соседними звеньями двумя поступательными парами.

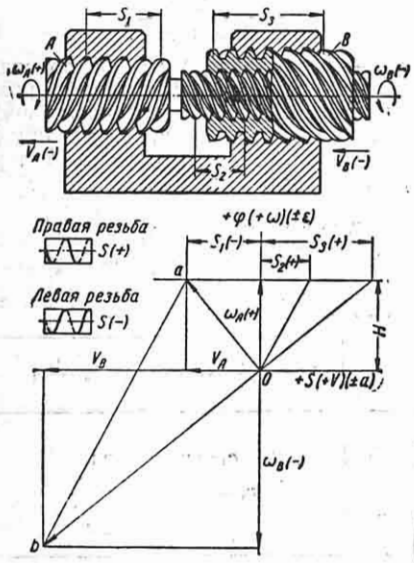
Число общих условий пассивных связей в механизме с одними парами V класса равно учетверенному числу неповторяющихся замкнутых контуров в схеме. Уменьшение числа пассивных условий связи может быть достигнуто путем замены некоторых пар V класса парами более низких классов без нарушения подвижности механизма. Вращательные пары могут быть заменены шаровыми, плоскостными (III класс) или высшими, поступательные — плоскостными или высшими, винтовые — высшими (например, в виде штифта, входящего в винтовую канавку).

Кинематика. Винтовое движение состоит из двух составляющих — вращения и осевого перемещения. В винтовом механизме с одной степенью свободы отношение между осевыми и угловыми перемещениями всех звеньев постоянно и равно отношению между соответствующими скоростями и ускорениями. В механизмах с несколькими степенями свободы та же зависимость наблюдается при постоянном отношении между сообщаемыми перемещениями, скоростями и ускорениями ведущих звеньев. Кинематический анализ и синтез выполняются аналитически или графически. Аналитический способ отличается простотой и практически любой точностью подсчетов, графический более нагляден.

На фиг. 59 приведено построение плана перемещений, скоростей и касательных ускорений винтового механизма. Шаги правых резьб (s_2, s_8) откладываются в положительном направлении оси абсцисс: $H = 2\pi r$, где r — радиус цилиндрической поверхности, к которой приводятся перемещения, скорости и ускорения. Масштабы по оси абсцисс

и оси ординат выбираются произвольно.

Осуществление винтового движения ведущего звена не вызывает затруднений при ручном приводе, но обычно требует дополнительных устройств при механическом приводе. Из винтового движения



Фиг. 59. Построение планов перемещений, скоростей и касательных ускорений для винтового механизма.

ведомого звена часто используется только одна его составляющая — осевое перемещение.

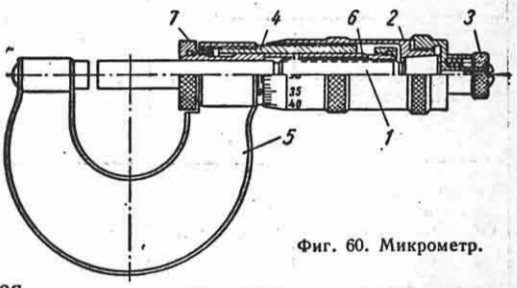
Двухзвенные механизмы

Механизм имеет стойку и одно подвижное звено. Использование отдельных составляющих винтового движения в качестве самостоятельных движений позволяет двухзвенный механизм применять для преобразования поступательного или вращательного движения в винтовое (направляющий механизм), вращательного — в поступательное.

Получение винтового движения часто требуется для обработки соответствующих поверхностей. Например, в зубодолбежных станках, работающих шестерней-инструментом, при нарезании винтовых зубчатых колес применяются винтовые направляющие для долбяка, в приспособлении для шлифования винтовых шлицевых валиков применяется направляющая гайка и так называемый мастер-винт.

В ряде механизмов в качестве ведущего движения, выполняемого от руки, используется вращательное, а в качестве ведомого — осевое прямолинейно-поступательное перемещение одного и того же подвижного звена. Значительная разница между перемещениями по оси и по окружности при малом шаге винта дает возможность просто осуществить точный отсчет меняющейся в значительных пределах координаты осевого положения подвижного звена; это широко используется в измерительных приборах с прямолинейной шкалой для отсчета целых миллиметров и шкалой по окружности для отсчета долей миллиметра.

Например, винтовой механизм микрометра (фиг. 60) имеет микрометрический винт *1* (с шагом 0,5 *мм*), на котором закреплен барабан *2* с круговой шкалой для отсчета сотых долей миллиметра



Фиг. 60. Микрометр.

и трещотка *3*, ограничивающая крутящий момент при вращении винта пальцами руки; стебель *4* с продольной шкалой для отсчета половин миллиметра закреплен в скобе *5* и несет гайку *6* и направляющую втулку со стопорным устройством *7*.

Трехзвенные механизмы

Трехзвенные винтовые механизмы имеют большое распространение.

Многозвенные механизмы с одной степенью свободы для удобства анализа, как правило, могут быть соответствующей разбивкой приведены к трехзвенным.

Рассматриваемые здесь механизмы служат для преобразования винтового движения в винтовое, винтового во вращательное или наоборот, винтового в прямолинейно-поступательное или наоборот, вращательного в прямолинейно-поступательное или наоборот.

Наиболее употребительные типы трехзвенных механизмов с различным взаимным расположением кинематических пар приведены в табл. 9.

Другие виды механизмов по приведенным в табл. 9 схемам могут быть получены путем обращения винтовых пар: охватывающий и охватываемый элементы меняются местами.

Механизмы по схеме 1 применяются редко, по схеме 2 находят применение при ведущем звене с вращательным движением, по схеме 3 применяются для получения очень малых поступательных перемещений за один оборот ведущего звена.

Механизмы по схемам 4 и особенно 5 имеют наиболее широкое применение на практике.

Потери на трение в поступательных парах сильно зависят от их конструктивного выполнения и расположения действующих внешних сил, поэтому учет этих потерь в общем виде затруднителен.

К. п. д. винтовой пары с одним неподвижным элементом

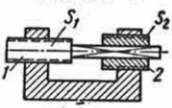
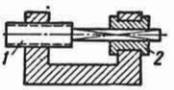
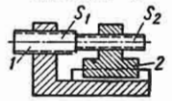
$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\varphi + \alpha)},$$

где α — угол подъема резьбы по среднему диаметру; φ — угол трения в резьбе, соответствующий приведенному коэффициенту трения. К. п. д. механизма по схеме 5 табл. 9 без учета потерь в поступательной паре

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\varphi + \alpha) + \frac{r_1}{r}\operatorname{tg}\varphi_1},$$

Таблица 9

Типы трехзвенных винтовых механизмов с одной степенью свободы

Тип механизма	Характер движения звеньев	Схема	Кинематические зависимости
Со средней поступательной парой	Винтовое и винтовое	Схема 1 	$n_1 = n_2;\ v_1 + v_2;$ $v_1 = s_1 n_1;\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{s_2}{s_1}$
С крайней вращательной и средней поступательной парами	Винтовое и вращательное	Схема 2 	$n_1 = n_2;\ v_2 = 0;$ $v_1 = s \cdot n_1$
С крайней поступательной парой	Винтовое и прямолинейно-поступательное	Схема 3 	$n_2 = 0;\ v_1 + v_2;$ $v_1 = s_1 n_1;\ \frac{v_2}{v_1} = \frac{s_1 - s_2}{s_1};$ $v_2 = (s_1 - s_2)\, n_1$
С крайней поступательной и средней вращательной парами		Схема 4	$n_2 = 0$ $v_1 = v_2$ $v_2 = s n_1$
С одной крайней вращательной и другой поступательной парами	Вращательное и прямолинейно-поступательное	Схема 5	$n_2 = 0$ $v_1 = 0$ $v_2 = s n_1$

Примечания: 1. Угловые перемещения φ и скорости n считаются положительными, если при рассматривании механизма слева вращение происходит по часовой стрелке. Линейные перемещения и скорости v считаются положительными при движении вправо. Величина шага s винтовой пары считается положительной при правой резьбе, отрицательной — при левой.

2. Приведенные кинематические зависимости справедливы также для перемещений за определенный отрезок времени и для ускорений.

где r — средний радиус резьбы; r_1 и φ_1—радиус приложения силы трения и угол трения в кольцевой опоре.

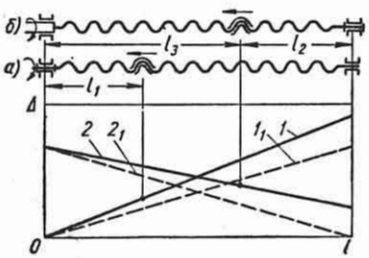
К. п. д. механизма по схеме 3 табл. 9 без учета потерь в поступательной паре

$$\eta = \frac{r_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - r_2 \operatorname{tg} \alpha_2}{r_1 \operatorname{tg} (\varphi_1 + \alpha_1) + r_2 \operatorname{tg} (\varphi_2 - \alpha_2)},$$

где α_1, φ_1 и r_1 — соответственно угол подъема резьбы по среднему диаметру, угол трения и средний радиус резьбы для винтовой пары, прилегающей к стойке; α_2, φ_2 и r_2 — то же, но для винтовой пары, соединяющей винт с ползуном.

Ошибки положения механизма по схеме 5 табл. 9, получающиеся вследствие деформации винта, зависят от характера и расположения опор.

Для механизма, в котором осевое усилие воспринимается опорой, расположенной со стороны привода винта (фиг. 61, *а*), ошибки положения от одного



Фиг. 61. Ошибки положения механизма вследствие деформаций ходового винта.

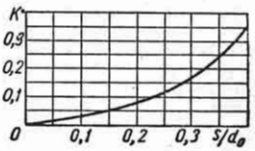
растяжения винта и от растяжения и скручивания изобразятся на графике соответственно наклонными прямыми 1_1 и 1. Для механизма, в котором осевое усилие воспринимается опорой, расположенной со стороны свободного конца винта (фиг. 61, *б*), ошибки положения от одного сжатия винта и от сжатия и скручивания изображаются на графике прямыми 2_1 и 2.

Если растяжению или сжатию подвержен тот же участок винта длиной l_1, который испытывает деформацию скручивания, то ошибка положения будет

$$\Delta = \frac{Pl_1}{EF}(1 + k),$$

где P — осевое усилие, действующее на винт; E — модуль упругости материала винта; F — площадь условного расчетного сечения винта диаметром, равным наружному диаметру винта за вычетом удвоенной рабочей высоты профиля; k — коэффициент.

Для механизма с нормальной трапецоидальной резьбой шага s и номинального наружного диаметра d_0 значение коэффициента k может быть взято по графику на фиг. 62; при учете к.п.д. винтовой пары приведенный угол трения принят равным 5°.



Фиг. 62. Диаграмма для определения коэффициента k.

Когда растяжению или сжатию подвержен один участок винта длиной l_2, а скручиванию другой — длиной l_3, то

$$\Delta = \frac{P}{EF}(l_2 + kl_3).$$

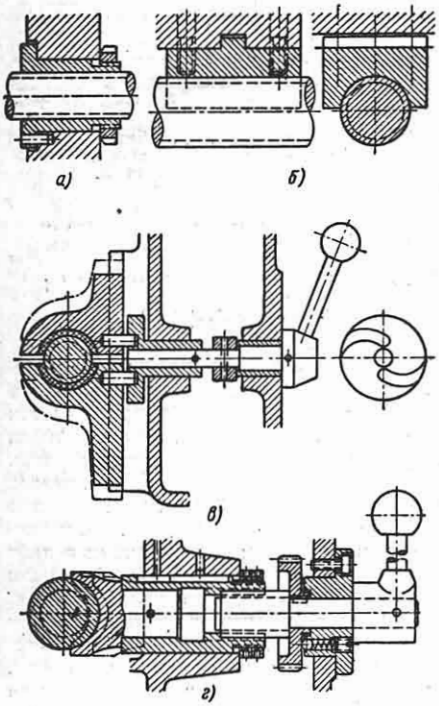
Винты обычно выполняются цельными, очень длинные — составными из нескольких секций. Резьба применяется чаще всего трапецоидального профиля, реже—прямоугольного и треугольного.

Прямоугольная резьба обеспечивает относительно высокий к. п. д. механизма и малую ошибку положения, вызываемую биением винта; однако такая резьба сложна в изготовлении (невозможно фрезерование) и быстро изнашивается. Применяется иногда в домкратах и в очень точных винтовых механизмах.

Треугольная резьба с малым шагом и углом при вершине профиля 30° или 60° применяется для точных ходовых винтов делительных и контрольных машин.

Гайки винтовых механизмов по схеме *5* выполняются закрытыми (фиг. 63, *а* и *в*) или открытыми (фиг. 63, *б* и *г*), постоянными (фиг. 63, *а* и *б*) или отключаемыми (фиг. 63, *в* и *г*). Закрытые гайки лучше направляют винт и дают осевое усилие по центру винта; открытые гайки позволяют применять промежуточные опоры для винта и часто упрощают сборку механизма. Осевой зазор в резьбе при постоянных открытых и отключаемых открытых и закрытых гайках может быть устранен регулированием их положения в поперечном направлении. В постоянных закрытых гайках возможность осевого смещения винта относительно гайки за счет зазора в резьбе устраняется регулированием или саморегулированием гаек. Такие

гайки выполняются двойными: одна часть закрепляется на салазках, а другая имеет возможность незначительно перемещаться относительно первой. Такое перемещение может быть осевым, угловым или винтовым и осуществляется подтягиванием установочных винтов, гаек



Фиг. 63. Типы гаек ходовых винтов.

или клиньев (регулирование) или под действием пружины, гидроцилиндра, самозатягивания (саморегулирование).

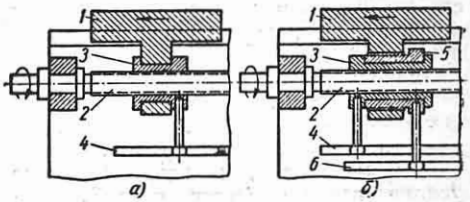
Винтовые механизмы с несколькими степенями свободы

Четырехзвенные механизмы, образованные из простой замкнутой кинематической цепи с винтовыми, вращательными и поступательными парами, имеют две степени свободы, пятизвенные — три, шестизвенные — четыре и т. д.

Практическое применение находят механизмы с двумя и с тремя степенями свободы; они используются, в частности:

а) для перемещения салазок от двух приводов, когда требуется независимость действия последних с целью сохранения определенного положения кинематической цепи одного привода при пользовании другим приводом; например, поперечная подача круга в шлифовальных станках — путем вращения гайки от механизма подачи и быстрый подвод и отвод круга — осевым перемещением гайки посредством гидравлического цилиндра ($W = 2$);

б) для компенсации ошибок ходовых винтов измерительных машин и некоторых точных станков при помощи



Фиг. 64. Винтовые механизмы с компенсацией ошибок по шагу ходового винта и его тепловых деформаций.

соответствующим образом спрофилированных коррекционных линеек.

В механизме по фиг. 64, *а* предусмотрена компенсация ошибок по шагу ходового винта, осуществляемая при перемещении салазок *1* путем поворота гайки *3*, от неподвижной линейки *4*, профиль которой соответствует ошибкам шага ходового винта *2* по длине. В механизме по фиг. 64, *б* предусмотрены компенсирующие поворот и осевое перемещение гайки *3* относительно корпуса салазок *1*. Поворот гайки *3* осуществляется от профильной линейки *4*, а компенсирующее осевое перемещение — посредством втулки *5* с резьбой и наклонной линейки *6* прямолинейного профиля (компенсация тепловых деформаций).

Возможно весьма большое число схем винтовых механизмов с $W = 2$ и $W = 3$, различающихся типами кинематических пар и их взаимным расположением.

ЗУБЧАТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Общие сведения

Назначение. Зубчатые механизмы делятся на плоские и пространственные.

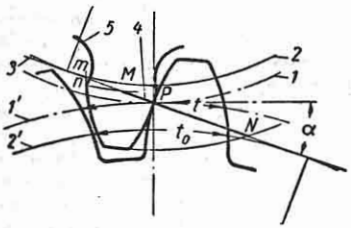
Зубчатые механизмы применяются преимущественно для передачи вращательного движения с постоянным отношением скоростей и для преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное и наоборот.

Зубчатые зацепления

Движение зубчатых колес, передающих вращение между двумя параллельными валами с постоянным передаточным отношением, можно представить как качение без проскальзывания двух цилиндрических поверхностей, называемых *начальными цилиндрами*. Проекции этих поверхностей на плоскость, перпендикулярную к осям вращения колес, называются *начальными окружностями*; точка касания их называется *полюсом зацепления*. траектория точки касания двух профилей зубьев — *линией зацепления*. Линия зацепления проходит через полюс зацепления. Профили зубьев должны удовлетворять следующему условию: *общая нормаль к точке касания профилей в любой момент зацепления должна проходить через полюс зацепления, или, иначе, профили зубьев должны быть взаимно огибаемыми в относительном движении зубчатых колес.*

Профили, удовлетворяющие указанному условию, называются *сопряженными*. Вообще говоря, почти для любого заданного профиля можно найти сопряженный. Однако практическое применение имеют только некоторые технологически удобные сопряженные профили: *эвольвентный*, *циклоидальный* и *цевочный*.

Эвольвентное зацепление. Боковые стороны зубьев очерчиваются по эвольвентам окружности, описываемым точками производящей прямой при ее качении без скольжения по основной



Фиг. 65. Эвольвентное зацепление.

окружности, концентричной начальной окружности колеса (фиг. 65), причем линия зацепления в этом случае получается прямой с рабочим участком MN; угол между линией зацепления и перпендикуляром к прямой, соединяющей центры колес, называется *углом зацепления*. Для нормальных зацеплений стандартная величина угла зацепления по ГОСТ 3058-45 $\alpha = 20°$.

Шаг зацепления — расстояние между двумя одноименными точками двух соседних зубьев, взятое по какой-либо окружности зубчатого колеса.

Дуга зацепления — дуга окружности, на которую поворачивается колесо одной парой сцепляющихся зубьев.

Степень или *коэффициент перекрытия* — отношение дуги зацепления к шагу зацепления.

Модуль зацепления — отношение шага зацепления к числу π. Величины модулей стандартизованы (ОСТ 1597): с 0,3 до 0,8 через 0,1 *мм*; с 1 до 4,5 через 0,25 *мм*; с 4,5 до 7 через 0,5 *мм*; с 7 до 16 через 1 *мм*; далее 18, 20, 22, 26, 28, 30, 33, 36, 39, 42, 45 *мм* и далее через 5 *мм*.

Делительной окружностью называется окружность, диаметр которой равняется произведению стандартной величины модуля на число зубьев колеса.

Головка зуба — часть зуба, выступающая за пределы начальной окружности. Высота головки $h_г = k_г \cdot m$; для нормального зуба $k_г = 1$, для укороченного $k_г = 0{,}8$.

Ножка зуба — часть зуба, расположенная внутри начальной окружности. Высота ножки $h_н = k_н \cdot m$; для нормального зуба $k_н = 1{,}25$, для укороченного $k_н = 1$.

На фиг. 65 показано нормальное эвольвентное зацепление двух зубчатых колес, одно из которых имеет подрезание ножки зуба *5* со снятием участка эвольвенты *mn*. Начальные окружности *1* и *1'* касаются друг друга в полюсе зацепления P, через который под углом зацепления α проходит линия зацепления *4* с рабочим участком MN. Производящая прямая *3* в изображенном на фиг. 65 положении совпадает с линией зацепления и касается обеих основных окружностей *2* и *2'*. Шаг по начальной окружности $t = \pi m$, шаг по основной окружности $t_0 = \pi m \cos \alpha$.

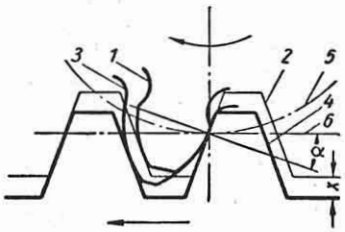
Свойства эвольвентного зацепления:

1. Эвольвентные колеса не являются парными — каждое колесо с зубьями нормального профиля при одном и том же модуле может сцепляться с колесом того же модуля, имеющим любое число зубьев (образуют серию определенного модуля).

2. При изменении расстояния между центрами колес правильность зацепления не нарушается, передаточное число сохраняется постоянным.

3. При бесконечно большом радиусе основной окружности эвольвента обращается в прямую, поэтому зуб рейки получается с прямолинейным профилем.

Это позволяет пользоваться сравнительно простым в изготовлении, точным и легко контролируемым инструментом прямолинейного профиля (гребенка, червячная фреза, шлифовальный круг) при обработке эвольвентных зубьев методом обкатки — копирования движений зубчато-реечной передачи (фиг. 66).



Фиг. 66. Корригирование эвольвентных зубьев смещением рейки-инструмента.

Движение инструмента относительно заготовки можно представить себе разложенным на две составляющие: одну, обеспечивающую движение режущих лезвий по плоскостям, ограничивающим объем воображаемой производящей рейки (например, прямолинейное возвратно-поступательное главное движение резания гребенки, имеющей профиль производящей рейки), и вторую, обеспечивающую зацепление производящей рейки с заготовкой (например, прокатывание заготовки по «неподвижной» производящей рейке в станках, работающих гребенкой).

Начальная окружность заготовки в ее зацеплении с производящей рейкой носит название делительной окружности колеса. В нормальных зацеплениях делительные и начальные окружности колес совпадают; в корригированных зацеплениях (см. ниже) эти окружности не совпадают.

Изготовление и контроль реек-деталей являются также достаточно простыми.

4. При нарезании зубьев методом обкатки одним и тем же рейкой-инструментом или шестерней-инструментом можно нарезать колеса одинаковых модулей с различными числами зубьев.

5. Легко выполняется корригирование профиля зуба, предпринимаемое с целью улучшения качества зацепления, в частности, для устранения подрезания ножки зуба в процессе обработки.

Подрезание ножки зуба заключается в образовании на ножке выемок, снимающих часть эвольвентного профиля и ослабляющих зуб в опасном сечении (см. фиг. 65). Срезание части эвольвенты при подрезании приводит к уменьшению коэффициента перекрытия ε, что неблагоприятно влияет на плавность работы, прочность и износоустойчивость передачи. Коэффициент ε желательно иметь по возможности большим (недопустимо $\varepsilon < 1$). Величина ε определяется аналитически или графически как отношение длины рабочего участка линии зацепления к шагу по основной окружности.

Опасность подрезания возникает при малом числе зубьев (см. т. 4 гл. VII).

Для профилирования корригированных зубьев пригодна производящая рейка нормального профиля. Корригирование профиля достигается смещением инструмента в направлении от центра (иногда к центру) заготовки.

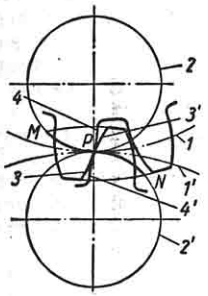
На фиг. 66 показано положение *2* производящей рейки при нарезании зуба *1* нормального эвольвентного зацепления (с подрезанием ножки зуба) и сдвинутое на величину x положение *4* той же производящей рейки при нарезании зуба *3* корригированного профиля. В обоих случаях делительная окружность *5* и делительная прямая *6* остаются неизменными.

Величины смещений при обработке обоих колес выбираются с таким расчетом, чтобы, достигнув необходимого корригирования профиля, не получить в то же время слишком большого окружного зазора между зубьями сцепляющихся колес.

При проверке корригированных зубьев на отсутствие подрезания k_z берется соответствующим высоте головки зуба рейки-инструмента, измеренной от делительной прямой до конца зуба (дает несколько завышенное значение $z_{\min}$) или до начала закругления вершины зуба (дает несколько уменьшенное значение $z_{\min}$).

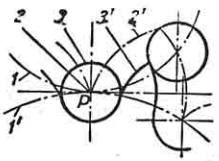
Циклоидальное зацепление (фиг. 67). Головка зуба очерчивается по эпициклоиде *3* (или *3'* для другого колеса), ножка — по гипоциклоиде *4* (или *4'*), т. е. по кривым, которые описываются точками производящих окружностей *2'* и *2* (или *2* и *2'*) при их качении без скольжения соответственно по наружной или по внутренней стороне началь-

ной окружности *1* (или *1'*) колеса. Линия зацепления *MPN* состоит из двух дуг окружности. Колеса с зубьями циклоидального профиля — парные. Каждое колесо может правильно сцепляться только с тем зубчатым колесом, на работу с которым оно рассчитано. Циклоидальный профиль, приближенно очерченный дугами окружностей, имеет применение в механизмах часов и других приборов.



Фиг. 67. Циклоидальное зацепление.

Цевочное зацепление (фиг. 68). Если профиль зуба одного колеса представляет собой точку *2*, то профиль зуба сопряженного с ним колеса очерчивается эпициклоидой *2'*, получающейся при качении начальной окружности *1* первого колеса по начальной окружности *1'* второго. После замены этих теоретических профилей практически выполнимыми эквидистантными профилями получаем на первом колесе профиль зуба в виде окружности *3* (сечение цевки — штифта или ролика) и на втором колесе — с боковыми сторонами по эквидистантным к эпициклоидам кривым *3'*. Профиль зуба второго колеса обычно очерчивается приближенно дугами окружностей.



Фиг. 68. Цевочное зацепление.

Цевочное зацепление имеет ограниченное применение. Оно используется главным образом для передач с большой редукцией в общем машиностроении и в точной механике.

Типы зубчатых пар

Различают пары для передачи вращательного движения (зубчатые передачи) и пары для преобразования вращательного движения в прямолинейно-поступательное или наоборот (реечные передачи).

Зубчатые передачи делятся на передачи между параллельными, пересекающимися и скрещивающимися валами.

Во всех случаях передаточное отношение

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости; z_1 и z_2 — числа зубьев соответствующих колес.

В передачах между параллельными валами зубчатые колеса имеют цилиндрическую форму и снабжаются прямыми, косыми, угловыми или шевронными зубьями.

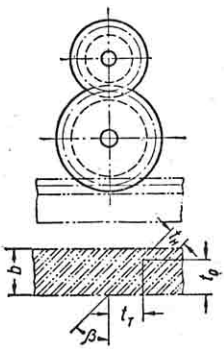
Прямые зубья имеют направление по образующим цилиндра.

Передачи с прямозубыми эвольвентными колесами получили наибольшее распространение в практике.

Косые зубья — наклонные на производящей или рабочей рейке, винтовые на колесе (фиг. 69) — дают касание сопряженных зубьев по линии.

Преимущество передач косозубыми колесами — повышенная плавность работы.

Недостаток — наличие осевых усилий.



Фиг. 69. Передача цилиндрическими колесами с косыми зубьями

Угловые или *шевронные зубья* состоят из двух (или более) участков косых зубьев с противоположными углами наклона к образующей. Осевое усилие в передаче отсутствует. Одно колесо обычно делают самоустанавливающимся в осевом направлении. Недостаток передач — сложность обработки зубьев и невозможность их шлифования производительными методами.

В передачах между пересекающимися валами зубчатые колеса обычно имеют коническую форму. Работа передачи может быть представлена как качение без проскальзывания двух начальных конусов с вершинами в общей точке. Колеса снабжаются прямыми, косыми или криволинейными зубьями.

Прямые зубья имеют направление по образующей конуса, касание сопряженных зубьев — по прямой. Боковые стороны зубьев ограничены некруглыми коническими поверхностями. Теоретически точный эвольвентный профиль

может быть построен методами сферической геометрии. Для графического построения и исследования профилей пользуются приближенным методом, заключающимся в замене сферической поверхности двумя дополнительными конусами с последующей разверткой их на плоскость (фиг. 70, *а*). Дополнительные конусы имеют углы при вершине

$$2\gamma_1' = 180° - 2\gamma_1 \text{ и } 2\gamma_2' = 180° - 2\gamma_2$$

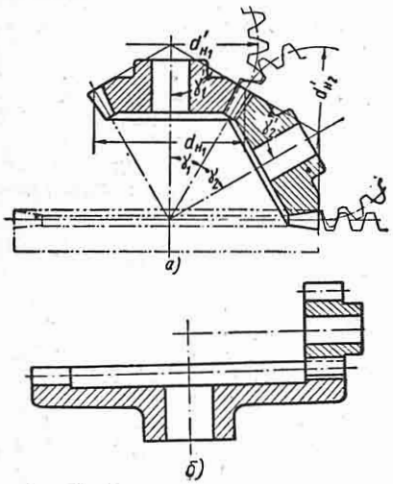
(где $2\gamma_1$ и $2\gamma_2$ — углы при вершине начальных конусов соответствующих колес) и касаются сферы по линиям ее пересечения с начальными конусами, что обеспечивает удовлетворительное совпадение дополнительных конусов со сферой в зоне, прилегающей к линии касания. Развертка дополнительных конусов позволяет рассматривать профили зубьев конических колес как цилиндрических с диаметрами начальных окружностей

$$d'_{н_1} = d_{н_1} : \cos\gamma_1 = mz_1 : \cos\gamma_1$$

и

$$d'_{н_2} = d_{н_2} : \cos\gamma_2 = mz_2 : \cos\gamma_2,$$

где $d_{н_1}$ и $d_{н_2}$ — диаметры начальных окружностей конических колес (фиг. 70, *а*). У колес с углом при вершине начального конуса 180° (плоское колесо) дополнительный конус обращается в цилиндр, а профиль зубьев на развертке последнего соответствует прямолинейному профилю зубьев рейки.



Фиг. 70. Коническая и плоско-цилиндрическая передачи между пересекающимися валами.

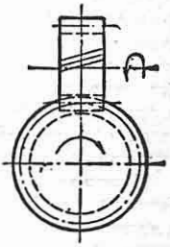
Широкое практическое применение имеют колеса с теоретически неточными зубьями, спрофилированными плоским производящим колесом (на фиг. 70, *а* показано штрихпунктирными линиями) с прямолинейным профилем зубьев и углом при вершине начального конуса, равным или близким к 180°. Обработка таких колес возможна инструментом с прямолинейной режущей кромкой.

Косые и *криволинейные зубья* обеспечивают большую плавность работы передачи. Название зуба соответствует его форме на плоском производящем колесе. Средние линии косых (тангенциальных) зубьев касаются некоторой концентрической окружности на плоском колесе. Из криволинейных зубьев технологически наиболее удобным является круговой, допускающий производительные методы нарезания и шлифования зубьев.

Плоско-цилиндрическая передача (фиг. 70, *б*) состоит из цилиндрического колеса и сопряженного с ним плоского колеса, зубья которого имеют сложную форму и нарезаются шестерней-долбяком, соответствующим цилиндрическому зубчатому колесу передачи. В плоско-цилиндрической передаче касание зубьев происходит по линии. Такая передача применяется, например, в токарных зажимных патронах.

Передачи между скрещивающимися валами выполняются винтовыми колесами, гипоидными колесами, червячной парой, глобоидной червячной парой.

Винтовые колеса (фиг. 71) имеют цилиндрическую форму и снабжены винтовыми зубьями, геометрическая характеристика которых та же, что и косых (см. выше). Передача работает с большим относительным скольжением зубьев, имеющих точечное касание. Поэтому такие колеса используются главным образом для передачи малых усилий. Оси колес могут скрещиваться под любым углом.



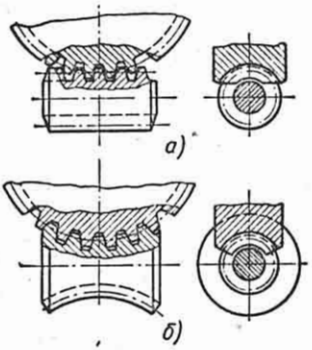
Фиг. 71. Передача винтовыми колесами.

Гипоидные колеса представляют собой конические винтовые колеса. Передачи с типоидными колесами применяются главным образом в автомобилях.

Червячная передача (фиг. 72, *а*) состоит из цилиндрического винта (червяка) и сопряженного с ним зубчатого (червячного) колеса. Ось червяка перпендикулярна оси колеса. Профиль резьбы архимедова червяка соответствует профилю стандартной рейки, шаг резьбы

$$s = \pi m z_ч,$$

где m — модуль, $z_ч$ — число заходов. Зубья червячного колеса имеют сложную форму — нарезаются червячной фрезой, получающей относительно заготовки такое же движение, какое должен



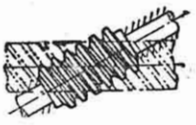
Фиг. 72. Червячные передачи.

иметь червяк относительно червячного колеса. В передаче касание зубьев происходит по линии; скольжение трущихся поверхностей — значительное. Передача применяется для малых и средних мощностей при значительной редукции.

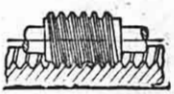
Глобоидная червячная передача (фиг. 72, *б*) имеет червяк, начальная поверхность которого выполнена по глобоиду. Благодаря большому числу находящихся в соприкосновении зубьев и хорошему их контакту такая передача при одинаковых габаритах может передавать значительно бо́льшую мощность, чем обыкновенная червячная передача. Глобоидная червячная передача находит применение главным образом в транспортных машинах.

Реечные передачи различных типов получаются из зубчатых при обращении одного колеса в рейку (при увеличении радиуса его начальной окружности до бесконечности). Передача, в которой ось шестерни перпендикулярна направлению движения рейки, получается из передачи между параллельными валами. Выполняется с прямыми, косыми, иногда с угловыми зубьями.

Передача с расположением оси шестерни под острым углом к направлению движения рейки получается из передачи винтовыми колесами. При малом числе зубьев шестерни (1—6) обращается в пару *червяк — зубчатая рейка* (фиг. 73).



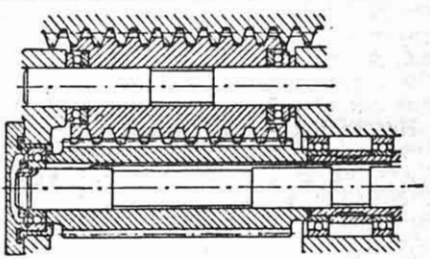
Фиг. 73. Передача червяк—зубчатая рейка.



Фиг. 74. Передача червяк — червячная рейка.

Такие передачи отличаются повышенной плавностью хода и могут обеспечить малое перемещение рейки за один оборот червяка.

Передачи с осью червяка, параллельной к направлению движения рейки, получаются из червячной передачи. Пара *червяк — червячная рейка* (фиг. 74) является разновидностью винтовой — с коротким винтом и длинной открытой гайкой. Такие передачи, как и винтовые, отличаются хорошей плавностью хода. Недостаток передачи — трудность размещения на оси червяка приводной шестерни достаточно большого диаметра, так как над шестерней проходит червячная рейка; иногда (в металлорежущих станках) отказываются от отдельной



Фиг. 75. Непосредственный привод червяка в передаче по фиг. 74.

приводной шестерни и нарезают зубья непосредственно на червяке, что позволяет несколько увеличить диаметр их начальной окружности (фиг. 75).

Зубчатые механизмы с неподвижными осями колес

Механизмы имеют одну степень свободы. Делятся на непереключаемые (например, редукторы) и переключаемые (например, коробки передач).

При анализе зубчатых механизмов с неподвижными осями принято включать в кинематическую цепь только подвижные звенья (валы) без учета их связи со стойкой.

Непереключаемые механизмы характеризуются передачей движения всегда через одни и те же звенья.

Различают механизмы с простой открытой, разветвленной и замкнутой кинематическими цепями.

Механизмы с простой открытой цепью передают движение от ведущего к ведомому валу через несколько последовательно соединенных зубчатых передач. Общее передаточное отношение механизма

$$i = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \ldots,$$

где i_1, i_2, i_3... — передаточные отношения отдельных передач. Применяются для уменьшения числа оборотов в минуту (редукторы), для передачи вращения между далеко друг от друга и неудобно расположенными валами, а также между валами, установленными на движущихся друг относительно друга звеньях (в таких случаях используются скользящие вдоль вала или уширенные шестерни).

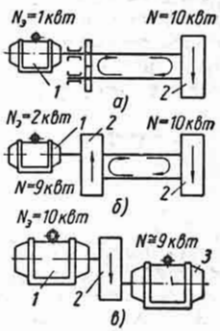
Механизмы с разветвленной цепью передают движение от ведущего к ведомому валу через несколько параллельных ветвей кинематической цепи. При симметричной конструкции дают уравновешивание усилий, действующих на центральные валы в месте разветвления и соединения параллельных ветвей.

Недостаток — необходимость принимать меры для равномерного распределения передаваемой мощности между отдельными ветвями (за счет точности изготовления или применения промежуточных упругих элементов).

Применение — в компактных редукторах средней и большой мощности.

Механизмы с замкнутой цепью (фиг. 76, *а* и *б*) позволяют иметь большую циркулирующую мощность при малой мощности приводного электродвигателя *1*, равной потерям в цепи. Обеспечивают привод вводного и одновременное нагружение выводного вала обкатываемой (испытуемой) передачи *2*. Целесообразны для испытания передач большой мощности со сравнительно высоким к. п. д. Особенно удобны для одновременной обкатки двух одинаковых передач (фиг. 76, *б*). На фиг. 76, *в* для сравнения показана схема обыкновенной испытательной установки с приводным электродвигателем *1* большой мощности и тормозным устройством *3* в виде генератора.

При обкатке передач с жесткой кинематической связью в цепи создается натяг обычно за счет деформации упругих звеньев (закручивания валов). При обкатке передач, работающих с проскальзыванием, регламентированная нагрузка может быть создана выбором такого передаточного отношения цепи, которое обеспечивает определенную постоянную величину проскальзывания обкатываемой передачи; этот способ неприменим при включении в замкнутую цепь двух передач, работающих с проскальзыванием.



Фиг. 76. Схемы испытательных установок с замкнутой и открытой кинематической цепью.

Рассмотренная схема применяется в испытательных установках — производственных и лабораторных — и для выполнения некоторых технологических процессов (обкатка зубчатых колес, предварительная обкатка механизмов).

Переключаемые механизмы характеризуются передачей движения через различные звенья при разных включениях. Механизмы особенно часто используются для изменения скорости вращения выводного вала (коробка передач) или направления его вращения (реверсивные механизмы). Переключения осуществляются разобщением одних ветвей кинематической цепи и замыканием других ветвей.

Разобщение кинематических цепей производится: 1) размыканием зубчатых зацеплений и 2) разобщением в месте соединения зубчатых колес с валами или валов между собой.

Размыкание зубчатых зацеплений осуществляется:

а) поступательным перемещением зубчатого колеса вдоль вала; применяется для цилиндрических прямозубых колес, иногда для конических колес;

б) винтовым перемещением зубчатого колеса по валу с винтовыми шлицами; шаг винтовой линии шлицев должен

быть равен шагу винтовой линии зубьев колеса, что обеспечивает легкое переключение без относительного поворота валов; применяется для цилиндрических косозубых колес;

в) радиальным (поперечным) перемещением зубчатого цилиндрического колеса обычно с прямыми зубьями.

Разобщение в месте соединения зубчатых колес с валами или валов между собой осуществляется:

а) зубчатыми или кулачковыми муфтами;

б) фрикционными муфтами;

в) вытяжными шпонками.

Переключение путем размыкания зацеплений способствует повышению к.п.д. механизма и уменьшению его износа за счет устранения работы передач вхолостую.

Применение фрикционных муфт позволяет производить переключения на ходу без каких-либо мер предосторожности, в то время как другие способы переключения требуют предохранения от поломок зубьев на шестернях и кулачков на муфтах, для чего приходится производить переключения только при малых скоростях вращения, вводить синхронизаторы и т. п.

Зубчатые коробки передач дают ступенчатое изменение скорости ведомого вала. В приводе шпинделей металлорежущих станков целесообразно принимать ряд скоростей или передаточных отношений по геометрической прогрессии:

$$n_1,\ n_2 = n_1\varphi,\ n_3 = n_1\varphi^2 \ldots, n_к = n_1\varphi^{k-1}.$$

Такой ряд обеспечивает одинаковый относительный перепад скоростей при переходе от любой скорости к соседней на всем диапазоне регулирования

$$Д = \frac{n_к}{n_1} = \varphi^{k-1}.$$

Значения коэффициента (знаменателя) геометрических рядов нормализованы: $\varphi = 1{,}12;\ 1{,}26;\ 1{,}41;\ 1{,}58;\ 1{,}78;\ 2{,}00$.

Геометрический ряд передаточных отношений в коробках передач обычно выдерживается приближенно. Иногда требуется получение точных передаточных отношений по арифметическому или другому ряду. Для этой цели пригодны только некоторые схемы коробок передач.

Коробки со сменными шестернями являются простейшими типами коробок передач. Они выполняются с постоянными или с регулируемыми межосевыми расстояниями.

Двухваловая коробка с постоянным межосевым расстоянием для получения K различных передаточных отношений требует: а) $2K$ сменных шестерен при одних замедляющих или одних ускоряющих передачах, б) K сменных шестерен при симметричном диапазоне регулирования (когда для получения каждой ускоряющей передачи меняются местами сменные шестерни соответствующей замедляющей передачи) и отсутствии передачи 1 : 1; в) $K + 1$ сменных шестерен при симметричном диапазоне регулирования и наличии передачи 1 : 1.

Часто число замедляющих передач $K_з$ превышает число ускоряющих $K_у$, тогда для получения $K = K_з + K_у$ различных передаточных отношений требуется $2K_з$ шестерен (передача 1 : 1 включается в число замедляющих).

Практически приемлемый диапазон регулирования двухваловой коробки доходит до 8—12.

Трехваловая коробка с постоянными межосевыми расстояниями представляет собой две последовательно включенные двухваловые передачи. Сменные шестерни одной передачи могут быть использованы также для второй. Диапазон регулирования практически доходит до 50—100.

Коробки передач со сменными шестернями и регулируемыми межосевыми расстояниями выполняются с так называемой гитарой — поворотной деталью, в пазах которой в нужном положении закрепляются одна или две оси с надетыми на них втулками, несущими по две сменные шестерни. Такая конструкция позволяет использовать значительно большее число различных комбинаций шестерен и обычно применяется для подбора точных передаточных отношений (например, в металлорежущих станках).

Коробки передач со скользящими вдоль валов шестернями выполняются с числом скоростей до 36 и более. Диапазон регулирования не ограничен.

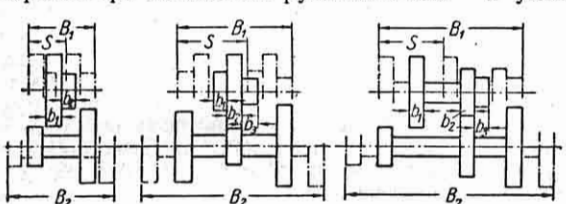
Оценка степени сложности коробок передач, выполненных по различным схемам, но с одним и тем же числом ступеней скорости, может быть произведена путем сопоставления чисел валов и шестерен.

По принципу построения схем различают два следующих типа коробок передач:

1. *Коробки с передачей движения через одни и те же валы при включениц любой скорости.* Такая схема может быть условно разделена на ряд последовательно соединенных двухваловых групп. Каждая группа характеризуется числом передач K_l и коэффициентом φ_l геометрического ряда их передаточных отношений. Пронумеровав группы в порядке возрастания φ_l, получаем для первой группы K_1 и $\varphi_1=\varphi$, для второй — K_2 и $\varphi_2=\varphi^{K_1}$, для третьей — K_3 и $\varphi_3=\varphi^{K_1K_2}$ и т. д. Общее число скоростей коробки $K=K_1K_2\ldots$; диапазон регулирования $Д=\varphi^{K-1}$.

Варианты схем получаются различным разложением K на множители и изменением последовательности расположения найденных групп. Обычно группы располагаются в порядке возрастания φ_l. Наибольший приемлемый диапазон регулирования между двумя валами $Д'=8$ (при ускоряющей передаче 2 : 1 и замедляющей 1 : 4).

Различные передачи между двумя валами могут включаться посредством одного или нескольких зубчатых блоков. При наличии нескольких блоков возможность поломки зубьев вследствие одновременного включения двух передач («замок») должна быть устранена конструкцией механизма управления (блокировка при нескольких рукоятках или согласованное переключение нескольких зубчатых блоков одной рукояткой).



Фиг. 77. Осевой размер пространства, необходимого для переключения зубчатых блоков.

Двухвенцовые зубчатые блоки допускают управление коробкой передач с *выборочным включением* — возможен непосредственный переход с любой скорости на любую другую без промежуточных включений.

Трех- и четырехвенцовые блоки дают определенную последовательность перехода от одной скорости к другой. *Последовательное включение* скоростей приводит к ненужным промежуточным включениям — к потере времени на переключения и повышенному износу торцов зубьев на шестернях.

Осевой размер пространства, необходимого для переключения двухвенцового блока (фиг. 77, *а*), обыкновенного трехвенцового (фиг. 77, *б*) и трехвенцового для переключения передач в порядке увеличения или уменьшения передаточных отношений (фиг. 77, *в*), получается меньше при перемещении блоков с близко расположенными венцами (размер B_1) и больше при перемещении блоков с расставленными венцами (размер B_2), несмотря на одинаковую длину S полного осевого перемещения зубчатого блока в том и другом случаях.

2. *Коробки, в которых при включении разных скоростей изменяются число и последовательность валов, передающих движение.*

При конструировании таких коробок стремятся:

а) чтобы в передаче движения на каждой скорости участвовало наименьшее число зубчатых зацеплений и валов;

б) чтобы зацепления и валы, не передающие нагрузку, полностью отключались.

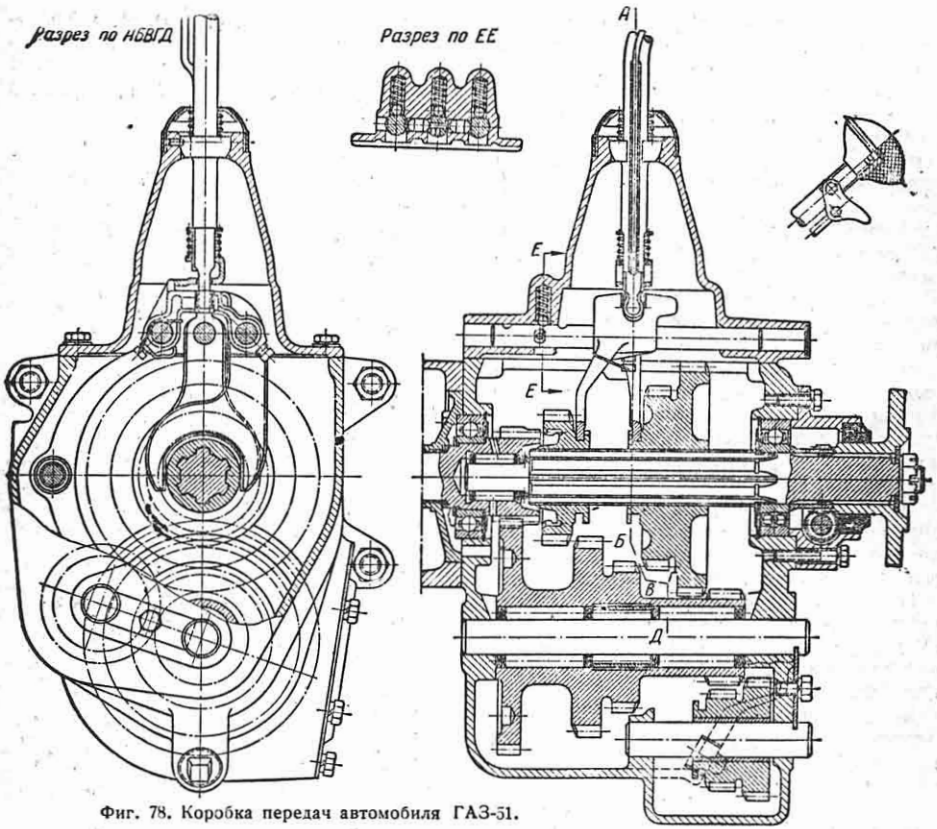
Это приводит к повышению к. п. д. и уменьшению износа деталей.

Указанные факторы имеют особое значение:

а) для быстроходных коробок с большим диапазоном регулирования, когда большое число передач требуется для осуществления необходимой редукции лишь при малых скоростях выводного вала, а сокращение числа передач при больших скоростях дает существенное увеличение к. п. д.;

б) для коробок, условия эксплуатации которых предусматривают длительную работу на одной или нескольких основных скоростях и кратковременную работу на других, меньших скоростях.

Примером такой коробки может служить типичная автомобильная коробка передач (фиг. 78), у которой основная



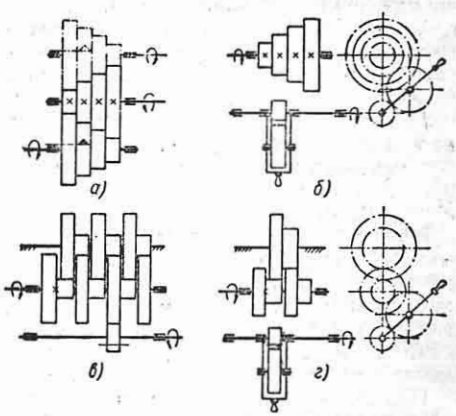
Фиг. 78. Коробка передач автомобиля ГАЗ-51.

скорость включается муфтой „напрямую". Коробка передач с включением „напрямую" должна иметь не менее трех валов.

Коробки передач с вытяжной шпонкой, накидной шестерней и многократными ступенями возврата применяются главным образом в коробках подач металлорежущих станков.

Переключаемые передачи с вытяжной шпонкой и двумя валами (фиг. 79, *а*) для получения K различных передаточных отношений требуют $2K$ шестерен. Такие же передачи с тремя валами и двумя вытяжными шпонками без повторяющихся передаточных отношений требуют меньшего числа шестерен, равного $3\sqrt{K}$. Перемещение шпонки выключает предыдущую пару шестерен и подготовляет включение новой, которое осуществляется при вращении ведущего вала заскакиванием шпонки под действием пружины в паз шестерни.

Переключаемые передачи с зубчатым конусом и накидной шестерней (фиг. 79, *б*) требуют $K+2$ шестерен для получения



Фиг. 79. Схемы переключаемых передач с вытяжными шпонками, накидными шестернями и многократными ступенями возврата.

K различных передаточных отношений. Переключение передач производится выборочно путем отвода накидной шестерни в поперечном направлении, перемещения ее вместе с рычагом в осевом направлении и ввода в зацепление с новой шестерней зубчатого конуса поперечным перемещением. Эти операции выполняются одной рукояткой, закрепленной на поворачивающемся и перемещающемся вдоль вала рычаге или двумя органами управления, один из которых выполняет поворот, а другой — осевое перемещение рычага (применяется в коробках закрытой конструкции).

Переключаемые передачи с многократными ступенями возврата („меандр") и скользящей по валу шестерней (фиг. 79, *в*) требуют не менее $4K - 2$ шестерен для получения K различных передаточных отношений.

Переключение передач происходит в определенной последовательности. Передачи выполняются для большого φ (см. стр. 499), обычно равного 2.

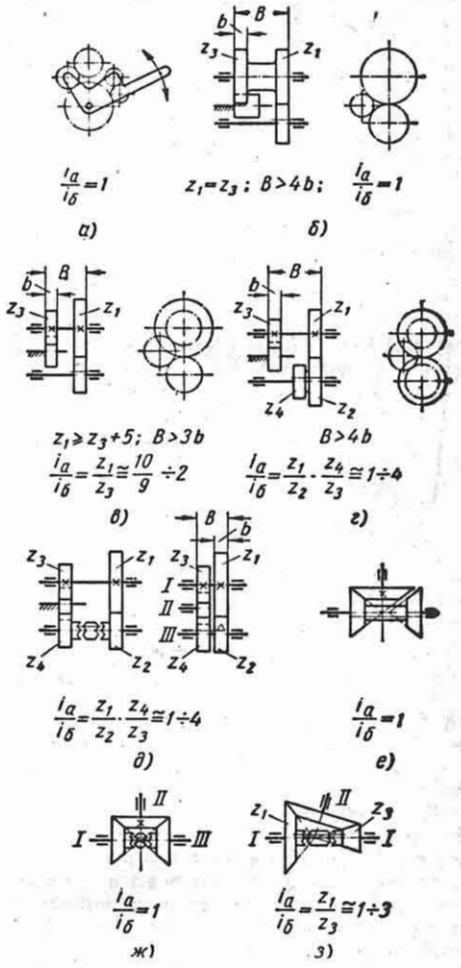
Передачи с многократными ступенями возврата и накидной шестерней (фиг. 79, *г*) требуют не менее $2K$ шестерен для получения K передаточных отношений.

Во всех многовальных коробках скоростей число шестерен увеличивается при наличии повторяющихся передаточных отношений и уменьшается при использовании одних и тех же шестерен для переключаемых передач между разными валами.

Простые реверсивные механизмы служат для изменения направления вращения ведомого вала при неизменном направлении вращения ведущего. На практике применяются главным образом механизмы с цилиндрическими прямозубыми (фиг. 80, *а — д*) или коническими (фиг. 80, *е — з*) зубчатыми колесами, с переключением посредством перемещения шестерен вдоль вала (фиг 80, *б*, *в*, *г*, *е*) или при помощи муфт (фиг. 80, *д*, *ж*, *з*).

Реверсивные механизмы с цилиндрическими колесами должны иметь не менее трех валов, а при одном включении „напрямую" — не менее четырех валов; механизмы с коническими колесами должны иметь соответственно не менее двух или трех валов.

Помимо своего прямого назначения рассматриваемые механизмы часто осуществляют также изменение величины передаточного отношения при реверсировании (фиг. 80, *в*, *г*, *д*, *з*), характеризуемое частным от деления передаточного отношения i_a прямой передачи на передаточное отношение $i_б$ обратной передачи.



Фиг. 80. Типы зубчатых реверсивных механизмов.

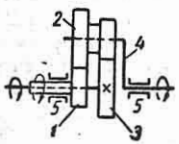
Реверсивные механизмы реже выполняются в виде самостоятельных механизмов, чаще встраиваются в коробки передач (см. фиг. 78).

Зубчатые механизмы с подвижными осями колес (дифференциальные и планетарные)

Зубчатый механизм с подвижными геометрическими осями колес по простейшей схеме (фиг. 81) состоит из

следующих звеньев: поводка или водила *4*, планетных колес или сателлитов *2*, центральных или солнечных колес *1* и *3*, стойки *5*. Поводком называется вращающееся звено, несущее оси сателлитов, которые находятся в зацеплении с центральными колесами. Различают дифференциальные и планетарные зубчатые механизмы.

Дифференциальным называется механизм с несколькими степенями свободы. Например, механизм по фиг. 81 имеет две степени свободы: принудительное движение одного из звеньев *1*, *3* и *4* получается при определенном движении двух других.



Фиг. 81. Схема дифференциального зубчатого механизма.

Планетарным называется механизм с подвижными осями колес и одной степенью свободы. Планетарный механизм получается из дифференциального в результате наложения дополнительных условий связи — закреплением одного из центральных колес или соединением передачами центральных колес и поводков (замкнутая планетарная передача). Например, механизм по фиг. 81 может быть обращен в планетарный закреплением звена *1* или *3*, а также соединением передачей звеньев *1* и *3*, *1* и *4* или *3* и *4*.

Если закрепление звена производить управляемым тормозом, то механизм может заменить муфту включения. Если в планетарный механизм включить передачу с бесступенчато изменяемым в небольших пределах передаточным отношением, то можно получить планетарный вариатор с кинематически неограниченным диапазоном регулирования.

Все механизмы удобно подразделить для рассмотрения на неуправляемые и управляемые.

Неуправляемые механизмы характеризуются неизменными структурой и кинематической характеристикой. К ним относятся зубчатые дифференциалы и планетарные редукторы.

Дифференциальные механизмы практически используются для следующих целей:

а) сложения нескольких движений в одно — применяется в металлорежущих станках для получения независимых кинематических настроек на различные элементы изделий (например, на число зубьев и на угол наклона зубьев нарезаемой косозубой шестерни), в универсальных делительных устройствах для облегчения настройки на заданное число делений, в счетно-решающих механизмах для суммирования параметров;

б) разложения одного движения на слагаемые — применяется в приводе ведущих колес автомобиля для устранения проскальзывания их относительно дороги вследствие различной длины пути, проходимой правым и левым колесами на поворотах и неровностях дороги, а также вследствие некоторой разницы в диаметрах колес.

Для дифференциального механизма с одним поводком соотношения между угловыми скоростями звеньев выражаются формулой

$$\frac{\omega_1 - \omega_n}{\omega_\kappa - \omega_n} = i'_{1\kappa}$$

или

$$\omega_1 - i'_{1\kappa}\omega_\kappa + \left(i'_{1\kappa} - 1\right)\omega_n = 0,$$

где ω_1 — угловая скорость первого центрального колеса *1*; ω_n — угловая скорость поводка; ω_κ — угловая скорость второго центрального колеса κ; $i'_{1\kappa}$ — передаточное отношение между звеньями *1* и κ при неподвижном поводке:

$$i'_{1\kappa} = \frac{\omega'_1}{\omega'_\kappa} = \pm \frac{z_2 z_4 \dots z_\kappa}{z_1 z_3 \dots z_{\kappa-1}}.$$

Угловые скорости следует подставлять в формулы с учетом знака (направления вращения); $i'_{1\kappa}$ имеет знак плюс, если направления вращения звеньев *1* и κ одинаковы при остановленном поводке, знак минус — если направления их вращения различны. Формула остается справедливой, если вместо ω_1 и ω_κ подставить угловые скорости любых промежуточных зубчатых колес, взяв соответствующее $i'_{1\kappa}$.

Распространенные типы дифференциальных механизмов приведены в табл. 10. Благодаря своей компактности наибольшее применение имеет механизм по схеме 3.

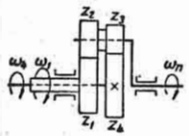
В обычных случаях применения дифференциальных механизмов (см. выше) их к. п. д. не имеет большого значения.

Простые планетарные редукторы делятся на две группы в зависимости от знака передаточного

Таблица 10

Типы зубчатых дифференциальных механизмов

Схема 1



$$\omega_1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\omega_4 + \left(\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} - 1\right)\omega_n = 0.$$

Должно быть

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \neq 1$$

(при $\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 1$ получается независимая подвижность поводка $\omega_1 = \omega^4$)

Схема 2

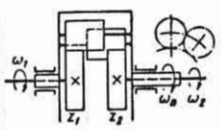
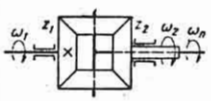


Схема 3



$$\omega_1 + \frac{z_2}{z_1}\omega_2 - \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)\omega_n = 0.$$

Обычно $z_1 = z_3$, и тогда

$$\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_n = 0.$$

Схема 4

$$v_1 + v_2 - 2v_n = 0$$

отношения $i'_{1\kappa}$ между центральными колесами при остановленном поводке.

Редукторы с отрицательным $i'_{1\kappa}$ (схемы 1 и 2 табл. 11) пригодны для небольшого снижения угловой скорости (до 1 : 10), имеют высокий к. п. д.; применяются в качестве многосателлитных компактных редукторов средней и большой мощности, например, в авиационных двигателях. При подборе чисел зубьев шестерен учитывают возможность и удобство сборки; должны быть соблюдены условия

$$\sin\frac{180^\circ}{K} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}$$

и

$$\frac{z_1 z_3 + z_2 z_4}{z_3 K} = C_1;$$

желательно также выдержать

$$\frac{z_2}{z_3} = C_2.$$

Здесь K — число сателлитов; C_1 и C_2 — целые числа; z_1, z_2, z_3, z_4 — числа зубьев шестерен в редукторе по схеме 1 табл. 11.

Редукторы по схеме 2 (редукторы Джемса) имеют большее распространение, чем по схеме 1.

Редукторы с положительным $i'_{1\kappa}$ (схемы 3 и 4 табл. 11) пригодны для значительного уменьшения угловой скорости (передаточное отношение до 1 : 10 000); вследствие низкого к. п. д. применяются для передачи малых мощностей, например в приборах.

Кинематические возможности редукторов по схеме 3 приведены в табл. 12.

Несколько бóльшую унификацию шестерен в редукторах с некорригированными зубьями одного модуля можно получить при $z_1 = z_3$ и $z_2 = z_4$; тогда

$$i = \frac{(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)}{z_2^2},$$

и при нечетном числе $(z_1 + z_2)$, обозначаемом далее через $2z_0$,

$$i_{\min} = \frac{2z_0}{(z_0 + 0{,}5)^2} \approx \frac{2}{z_0 + 1};$$

$$z_1 = z_0 - 0{,}5 \text{ и } z_2 = z_0 + 0{,}5.$$

В редукторах с некорригированными зубьями разного модуля при нечетных числах

$2z_0$ и $2z'_0 = 2\frac{m_1}{m_2}z_0$ (см. табл. 12):

$$i_{\min} = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)z_0}{2\frac{m_1}{m_2}z_0^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)z_0 - 0{,}5},$$

если

$$z_1 = z_0 - 0{,}5;$$

$$z_2 = z_0 + 0{,}5;\ z_3 = \frac{m_1}{m_2}z_0 + 0{,}5$$

и

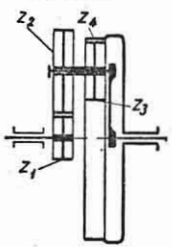
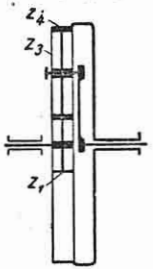
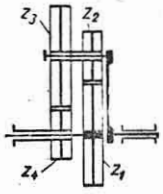
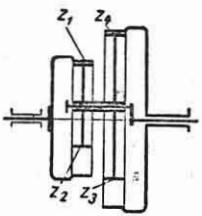
$$z_4 = \frac{m_1}{m_2}z_0 - 0{,}5.$$

Подбор нужных $2z_0$ и $2z'_0$ производится следующим образом: отношение модулей записывается в виде простой дроби с числителем C_1 и знаменателем C_2 — целыми числами, не содержащими общих множителей; принимая различные значения множителя C, подбирают нужные значения $2z'_0 = C_1 C$ и $2z_0 = C_2 C$:

$$\frac{2z'_0}{2z_0} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1 C}{C_2 C}.$$

Таблица 11

Простые планетарные редукторы

Назначение и характеристика	Схемы	Формулы передаточных отношений	Формулы для к. п. д. редуктора с закрепленным звеном 4 *
Для небольшой редукции с высоким к. п. д. (не ниже к. п. д. обыкновенной зубчатой передачи, как правило, $\eta > 90\%$). Обычно применяется несколько сателлитов	Схема 1  Схема 2 	Закреплен поводок Сх. 1) $\frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ Сх. 2) $\frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_1}$ Закреплено звено 4 Сх. 1) $\frac{\omega_1}{\omega_n} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ Сх. 2) $\frac{\omega_1}{\omega_n} = 1 + \frac{z_4}{z_1}$ Закреплено звено 1 Сх. 1) $\frac{\omega_4}{\omega_n} = 1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$ Сх. 2) $\frac{\omega_4}{\omega_n} = 1 + \frac{z_1}{z_4}$	Сх. 1) $\eta = 1 - \left(\frac{\Delta}{r_1} + \frac{\Delta + \rho}{r_3} + \frac{\rho}{r_1 + r_3}\right)$ Сх. 2) $\eta = 1 - \left(\frac{\Delta + \rho_ц}{r_3} - \frac{\rho_ц}{r_1 + r_3} - \frac{\Delta}{r_4}\right)$ $\rho_ц = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{Q_ц}{Q}\right)^2}$, где $Q_ц$ — центробежная сила сателлита; Q — окружное усилие на оси сателлита. Для тихоходных редукторов $\rho_ц = \rho$
Для большой редукции значение к. п. д. низкое (может оказаться меньше 1%). Обычно ставится один сателлит	Схема 3  Схема 4 	Закреплен поводок $\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ Закреплено звено 4 $\frac{\omega_1}{\omega_n} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ Закреплено звено 1 $\frac{\omega_4}{\omega_n} = 1 - \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$	Сх. 1) $\eta \approx \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_1 + 2\Delta + 2\rho}$ Сх. 2) $\eta \approx \frac{r_3 - r_1}{r_3 - r_1 + 2\Delta + 2\rho\frac{r_1 + r_3}{r_1 - r_1}}$ ρ для опор центральных колес и сателлитов приняты одинаковыми

* По способу проф. Л. Н. Решетова.

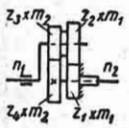
Примечания: 1. Величина смещения окружного усилия $\Delta = \frac{\pi}{2} mf$, точнее $\Delta = \frac{\pi}{2} mf\varepsilon$ при $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ и $\Delta = \frac{\pi}{2} mf\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon}$ при $\varepsilon_1 >$ или $< \varepsilon_2$ здесь m — модуль зацепления; f — коэффициент трения в зубьях; ε_1 — коэффициент перекрытия за полюсом зацепления; ε_2 — то же, но перед полюсом; $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — полный коэффициент перекрытия.

2. Радиус круга трения $\rho = f_{пр} r_ц$, где $f_{пр}$ — приведенный коэффициент трения; $r_ц$ — радиус цапфы.

3. r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы начальных окружностей шестерен.

Таблица 12

Передаточные отношения простого планетарного редуктора с внешним зацеплением при четном $2z_0$

Схема	Исполнение	Передаточное отношение $i = \frac{n_2}{n_1} = 1 - \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$			
		Формула для наименьшего значения	Наименьшая величина при z_0		
			30	60	100
	Модули одинаковые $m_1 = m_2$ $z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = 2z_0$	$i_{min} = \frac{2}{z_0+1}$ при $z_1 = z_2 = z_0$; $z_3 = z_0 - 1$; $z_4 = z_0 + 1$	$\frac{1}{15,5}$	$\frac{1}{30,5}$	$\frac{1}{50,5}$
	Модули различные $m_1 > m_2$ $z_1 + z_2 = 2z_0$ $z_3 + z_4 = 2\frac{m_1}{m_2} z_0$ $\left(2\frac{m_1}{m_2} z_0 \text{ должно быть целым четным числом}\right)$	$i_{min} = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) z_0}{\frac{m_1}{m_2} z_0^2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) z_0 - 1} \approx \approx \frac{2}{z_0}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$ при $z_1 = z_0 - 1$; $z_2 = z_0 + 1$ $z_3 = \frac{m_1}{m_2} z_0 + 1$; $z_4 = \frac{m_1}{m_2} z_0 - 1$	$\frac{1}{90,42}$ при $\frac{m_1}{m_2} = 1,2$	$\frac{1}{180,46}$ при $\frac{m_1}{m_2} = 1,2$	$\frac{1}{300,475}$ при $\frac{m_1}{m_2} = 1,2$
	Модули одинаковые, зубья корригированные $m_1 = m_2$ $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$	$i_{min} = \frac{1}{z_0^2}$ при $z_1 = z_4 = z_0$; $z_1 = z_0 - 1$; $z_3 = z_0 + 1$	$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{3600}$	$\frac{1}{10000}$

Для получения четного $2z_0'$ один или оба множителя C_1 и C должны быть четными, для получения нечетного $2z_0'$ оба множителя C_1 и C — нечетные. Те же правила относятся к $2z_0$.

В редукторах с корригированными зубьями для упрощения конструкции иногда объединяют оба сателлита в одну шестерню (принимают $z_2 = z_3$). Тогда

$$z_4 = z_1 \pm 1 \text{ и } i = \pm\frac{1}{z_4}.$$

Кинематические возможности редукторов с внутренним зацеплением по схеме 4 (табл. 11) удобно оценивать по формуле

$$i = \frac{n_1}{n_n} = \frac{\Delta z_{12} \cdot \Delta z_{41}}{z_1^2 - z_1(\Delta z_{12} - \Delta z_{41})} =$$

$$= \frac{\Delta z_{12} \cdot \Delta z_{41}}{(z_4 - \Delta z_{12})(z_4 - \Delta z_{41})},$$

где

$$\Delta z_{12} = z_1 - z_2 = z_4 - z_3;$$

$$\Delta z_{41} = z_4 - z_1 = z_3 - z_2.$$

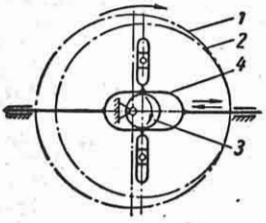
Закреплено колесо с числом зубьев z_4. Для получения возможно малых i желательно Δz_{12} и Δz_{41} иметь наименьшими. На выбор Δz_{41} никаких конструктивных ограничений не налагается, оно может быть взято равным 1. Величина Δz_{12} при неисправленных эвольвентных зубьях не может быть взята сколь угодно малой вследствие интерференции зубьев, т. е. внедрения зубьев одного колеса в зубья другого; в цевочных зацеплениях и корригированных эвольвентных Δz_{12} может быть взято сколь угодно малым.

Разработанный советскими учеными способ корригирования внутреннего эвольвентного зацепления для получения малой разницы в числах зубьев сцепляющихся колес [25] позволил получить передачу с $\Delta z_{12} = 1$, более про-

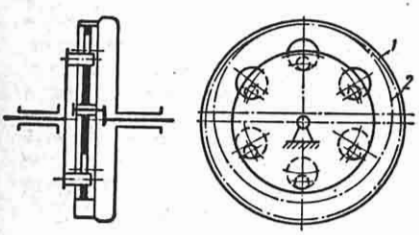
стую в изготовлении, чем цевочная передача.

Редукторы по схеме 4 (табл. 11) пригодны для значительного уменьшения угловой скорости. Например, при $z_1 = 60$, $z_4 = 61$, $\Delta z_{41} = 1$ и $\Delta z_{12} = 6$ (зубья некорригированные) получаем $i = 1 : 550$, а при $\Delta z_{12} = 1$ (зубья корригированные) $i = 1 : 3600$.

Частным видом планетарного редуктора с внутренним зацеплением является его исполнение с одной парой зубчатых колес.



а)



б)

Фиг. 82. Планетарные редукторы с одной парой зубчатых колес внутреннего зацепления.

Если бы в механизме по схеме 4 табл. 11 с неподвижным солнечным колесом *4* принять $z_3 = z_4$, что́ при обыкновенном зацеплении практически невыполнимо, то угловая скорость сателлита будет равна нулю, и колеса *3* и *4* можно заменить механизмом плавающей муфты, связав им звено *2* со стойкой и обеспечив таким образом круговое поступательное движение сателлита *2*. Полученный редуктор (фиг. 82, *а*) состоит из центрального ведомого колеса *1*, сателлита *2*, ведущего эксцентрика-поводка *3* и промежуточного звена *4* механизма плавающей муфты, которое совершает прямолинейное возвратно-поступательное движение.

Передаточное отношение редуктора

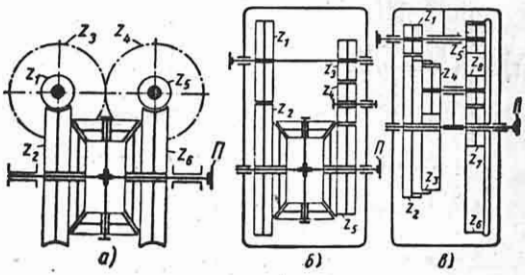
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{z_1 - z_2}{z_1};$$

например, при $z_1 = 60$ и $z_2 = 54$ получаем $i = 1 : 10$, при $z_1 = 60$ и $z_2 = 59$ получаем $i = 1 : 60$. Редукторы по такой схеме применяются в грузоподъемных механизмах, в текстильных машинах и т. п.

Если в схеме 4 табл. 11 с неподвижным солнечным колесом *4* принять $z_1 = z_3$ и заменить эту пару колес муфтой, допускающей относительное круговое поступательное движение связываемых звеньев, то получится редуктор по распространенной схеме (фиг. 82, *б*). Муфта имеет пальцы, входящие в отверстия сопряженного звена, диаметр которых превышает диаметр пальцев на двойную величину эксцентриситета ведущего поводка.

Передаточное отношение редуктора

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_n} = -\frac{z_1 - z_2}{z_2}.$$



Фиг. 83. Замкнутые планетарные редукторы.

Замкнутые планетарные редукторы получаются из дифференциального механизма обычно путем соединения центральных колес постоянной передачей. Редукторы дают возможность получать чрезвычайно сильное уменьшение скорости, но при очень низком к. п. д. Центральные колеса получают вращения с близкими по величине угловыми скоростями, на поводок дифференциала передается их разность.

Примерами таких редукторов служат:

а) редуктор с центральными колесами, связанными шестеренной и двумя червячными передачами (фиг. 83, *а*), для которого при $z_1 = z_5 = 1$

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{z_4 z_6 - z_3 z_5}{2 z_2 z_4 z_6} \geqslant \frac{1}{2 \cdot 10^6};$$

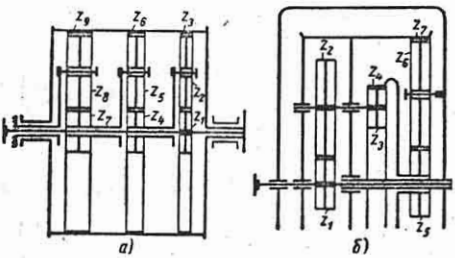
б) редуктор Гуляева (фиг. 83, *б*), для которого

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{z_2 z_3 - z_1 z_5}{2 z_2 z_5} \geqslant \frac{1}{10^4};$$

в) редуктор Гоммеля (фиг. 83, *в*), для которого

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{z_9 z_4 z_5 z_7 - z_1 z_3 z_6 z_8}{z_2 z_6 (z_3 z_8 + z_4 z_7)} \geqslant \frac{1}{10^6}.$$

Сложные планетарные редукторы образуются посредством объединения нескольких простых редукторов в один механизм. Цель — получение достаточно большой редукции (до 1 : 300) при высоком к. п. д. Иногда удается получить некоторое упрощение механизма путем использования зубчатых колес одной передачи в качестве колес следующей.



Фиг. 84. Сложные планетарные редукторы.

Примеры сложных планетарных редукторов, применяемых в электроталях, приведены на фиг. 84.

Для редуктора по фиг. 84, *а*:

$$\frac{\omega_9}{\omega_1} = -\frac{z_1 z_4 z_7}{z_1 z_4 z_9 + (z_7 + z_9)(z_1 z_6 + z_3 z_4 + z_3 z_6)} \geqslant \frac{1}{300}.$$

Для редуктора по фиг. 84, *б*:

$$\frac{\omega_7}{\omega_1} = \frac{z_1 z_3 z_5}{z_1 z_3 z_5 + (z_5 + z_7) z_2 z_4} \geqslant \frac{1}{250}.$$

Управляемые механизмы служат: а) для включения и переключения кинематических цепей — планетарные механизмы включения; б) для изменения знака передаточного отношения — реверсивные механизмы; в) для ступенчатого изменения величины передаточного отношения — планетарные коробки передач; г) для бесступенчатого изменения величины передаточного отношения в больших пределах — планетарные вариаторы.

Практически применяемые механизмы часто выполняют не одну, а несколько указанных функций.

Управление механизмами осуществляется: а) включением и выключением привода отдельных звеньев — обычно индивидуальных электродвигателей; б) торможением и освобождением отдельных звеньев механизма; в) соединением и разъединением некоторых звеньев муфтами включения — обычно фрикционными; г) изменением передаточного отношения между некоторыми звеньями — обычно фрикционными бесступенчатыми передачами.

Планетарные механизмы включения служат для соединения и разобщения кинематической цепи посредством тормоза. Механизм получается из дифференциала путем присоединения двух звеньев к валам и одного — к тормозу. При освобожденном тормозе механизм имеет две степени свободы, и передача движения от одного вала к другому не происходит. При включенном тормозе механизм имеет одну степень свободы — движение от одного вала к другому передается. В этом случае механизм работает как планетарный (если тормоз действует на центральное зубчатое колесо) или как передача с неподвижными осями (если тормозится поводок).

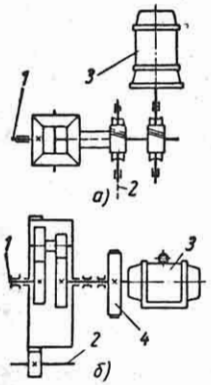
В зависимости от схемы механизма и его кинематической характеристики: а) передача вращения может происходить с изменением или без изменения направления и величины угловой скорости, б) тормозной момент может быть меньше передаваемого, что облегчает управление и сокращает размеры тормоза. Например, для часто применяемого механизма по схеме 2 табл. 11 с воздействием тормоза на звено *1* тормозной момент $M_1 < M_4$.

Применение планетарных механизмов включения вместо простых фрикционных муфт может оказаться целесообразным там, где желательно одновременно получить уменьшение (увеличение) угловой скорости или изменение направления вращения, а также при наличии особо высоких требований к надежности и легкости управления.

Дифференциальные механизмы быстрых перемещений используются в рабочих машинах (например, в станках) для выполнения вспомогательных движений частей машины, имеющих сравнительно медленные рабочие движения — подачу, с повышенной скоростью.

В механизме используется дифференциал, одно из звеньев которого присоединяется к кинематической цепи перемещения соответствующей части машины, другое приводится от цепи рабочего движения, третье — от привода быстрых перемещений.

Привод быстрых перемещений, как правило, состоит из отдельного электродвигателя, соединенного с соответствующим звеном дифференциала: 1) посредством самотормозящейся червячной передачи — фиг. 85, *а*; 2) непосредственно или через несамотормозящуюся передачу — фиг. 85, *б*.



Фиг 85. Схемы дифференциальных механизмов быстрых перемещений.

В первом случае быстрое вращение вала *1* может быть получено от электродвигателя *3* независимо от цепи привода рабочего движения (фиг. 85, *а*). Во втором случае в цепь привода вводится одно из следующих устройств: а) муфта обгона, допускающая передачу движения только от вала электродвигателя к дифференциалу; б) тормоз, автоматически включающийся при выключении тока электродвигателя; в) тормоз, управляемый самостоятельно (фиг. 85, *б*).

Муфта обгона и тормоз, включающийся при выключении тока, дают возможность включать быстрое перемещение электродвигателем независимо от цепи привода рабочих движений и изменять направление быстрого перемещения за счет реверсирования электродвигателя. Тормоз, управляемый самостоятельно, кроме того, дает возможность разобщать цепь привода рабочих движений: передача рабочего движения от вала *2* к валу *1* прекращается при выключении электродвигателя *3* и освобождении тормоза *4* (фиг. 85, *б*).

Удобство дифференциальных механизмов быстрых перемещений заключается в легкости и простоте управления.

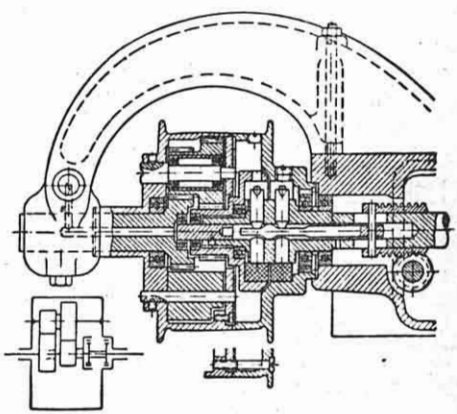
Планетарные реверсивные механизмы служат для изменения направления вращения выводного вала при постоянном направлении вращения вводного. Реверсирование обычно сопровождается изменением передаточного отношения.

Переключения осуществляются фрикционными муфтами и тормозами. Конструкция тормоза может быть выполнена проще, чем фрикционной муфты, так как позволяет переключающие движения сосредоточить на невращающихся деталях; подвод тока в электромагнитный тормоз не требует контактных колец.

Схемы с одним простым планетарным механизмом не дают возможности обойтись без фрикционных муфт.

Пример конструкции механизма, выполненного в виде реверсивного шкива, управляемого муфтами с разжимными кольцами, приведен на фиг. 86.

Реверсивные механизмы с переключением муфты и тормоза строятся на базе различных дифференциалов. Преимущественное применение имеет механизм по схеме 2 табл. 11, у которого тормоз действует на поводок, а фрикционная муфта может соединять любые два звена. При включении тормоза такой механизм работает как простая передача с неподвижными осями; момент торможения



Фиг. 86. Пример конструкции планетарного реверсивного шкива.

$$M_m = M_1 + M_4,$$

где M_1 и M_4 — крутящие моменты соответственно на вводном и на выводном валах. При выключении тормоза и включении муфты получаем вращение выходного вала в другую сторону, относительное движение

звеньев *1*, *4* и подводка отсутствует; момент на муфте при ее установке между поводком и ведущим звеном *1*

$$M_м = M_1 \frac{z_1 + z_4}{z_2},$$

между поводком и ведомым звеном *4*

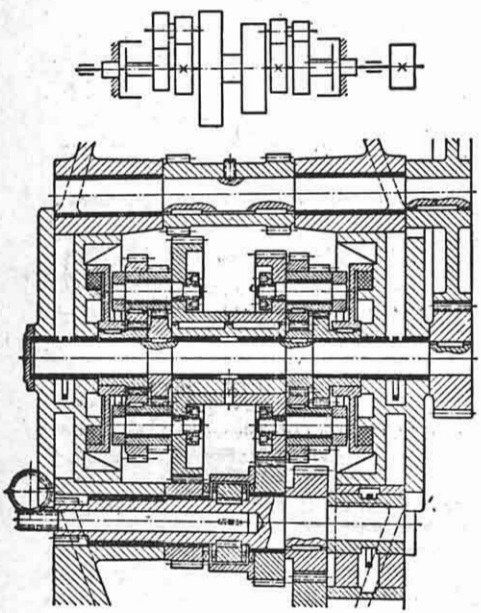
$$M_м = M_1 \frac{z_1 + z_2}{z_1},$$

между звеньями *1* и *4*

$$M_м = M_1.$$

При выключении тормоза и муфты движение от вводного вала к выводному не передается.

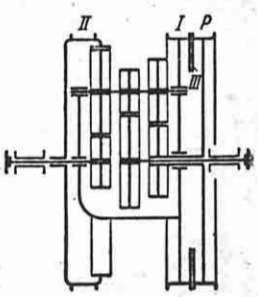
Реверсивные механизмы с переключением посредством двух тормозов (без муфт) наиболее удобны в управлении. Однако это удобство достигается за счет значительного усложнения системы передающих зубчатых колес. Поэтому такие механизмы применяются на практике редко. Пример конструктивного выполнения механизма, управляемого двумя электромагнитными тормозами, показан на фиг. 87.



Фиг. 87. Пример конструкции планетарного реверсивного механизма, управляемого посредством двух электромагнитных тормозов.

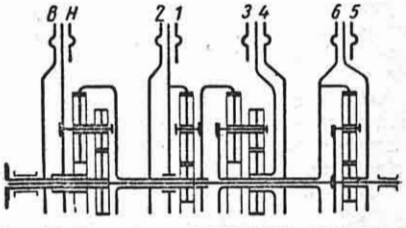
Планетарные коробки передач служат для ступенчатого изменения передаточного отношения. Переключения производятся тормозами и фрикционными муфтами. Различают две основные схемы механизма.

1. *Схема простого планетарного механизма*, имеющего более двух центральных колес и соответствующее число сателлитов, закрепленных на подвижной оси (фиг 88). Два из центральных звеньев (центральные колеса и поводок) соединяются с вводным и выводным валами. Торможением каждого из оставшихся центральных звеньев устанавливается соответствующее передаточное отношение. Кроме того, добавлением одной фрикционной муфты может быть дополнительно получена передача „напрямую". Таким образом, общее число ступеней будет равно числу центральных колес, число переключающих тормозов и муфт — числу передаточных отношений. По такой схеме выполняются коробки передач на малую мощность и небольшое число ступеней. На фиг. 88 приведен пример четырехскоростной коробки передач, различные передаточные отношения которой включаются тормозами *I*, *II*, *P* и муфтой *III*.



Фиг. 88. Схема четырехскоростной планетарной коробки передач.

2. *Схема с последовательным соединением простых планетарных механизмов*, каждый из которых дает два различных передаточных отношения путем переключения фрикционной муфты и тормоза, приведена на фиг. 89. Коробка пере-



Фиг. 89. Схема восьмискоростной планетарной коробки передач с реверсом.

дач, построенная по этой схеме, обеспечивает большие кинематические возможности: общее число различных передаточных отношений коробки равно двум в степени, равной числу последовательно соединенных простых планетарных механизмов. Например, коробка передач по фиг. 89 дает реверсирование включением муфты *B* или тормоза *H*, а также восемь различных передаточных отношений включением тормозов и муфт *1—3—5*, *1—3—6*, *1—4—5*, *1—4—6*, *2—3—5*, *2—3—6*, *2—4—5* и *2—4—6*.

Планетарные вариаторы служат для изменения угловой скорости (часто и направления вращения) выводного вала при постоянной угловой скорости вводного вала.

Применение планетарной схемы дает возможность кинематически неограниченного расширения диапазона регулирования входящей в вариатор бесступенчатой передачи.

Существенным недостатком планетарных вариаторов является их низкий к. п. д. при малых угловых скоростях выводного вала.

Различают вариаторы по простой и по замкнутой планетарной схеме (подробнее см. главу X «Фрикционные передачи и вариаторы» в т. 4).

Зубчатые пары с переменным передаточным отношением

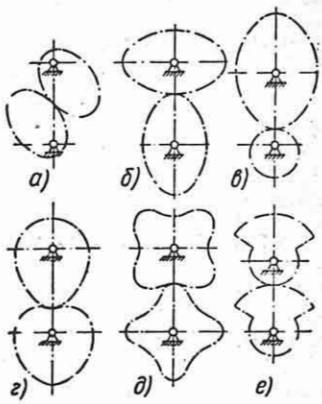
Передачи с циклически изменяющимся передаточным отношением выполняются за редким исключением между параллельными осями.

Различают передачи с постоянным и с изменяющимся межцентровым расстоянием.

Передачи с постоянным межцентровым расстоянием бывают: 1) с некруглыми колесами эллиптической или другой криволинейной формы; передаточное отношение изменяется плавно; средняя его величина за цикл должна выражаться простой дробью 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3; примеры схем см. на фиг. 90, *а—д*; передачи сложны в изготовлении и поэтому имеют ограниченное применение на практике; 2) с колесами, состоящими из нескольких концентрических круговых зубчатых секторов (фиг. 90, *е*), характеризуются скачкообразным изменением передаточного отношения; пригодны только для малых скоростей; 3) с круглыми по форме зубчатыми колесами, имеющими некруглые начальные цилиндры, что достигается соответствующим профилированием зубьев.

Передачи с циклически изменяющимся межцентровым расстоянием дают возможность не только плавного изменения величины передаточного отношения, но и его знака.

Практический интерес представляют частные виды таких передач, входящие в механизмы для преобразования вращательного движения в прямолинейное

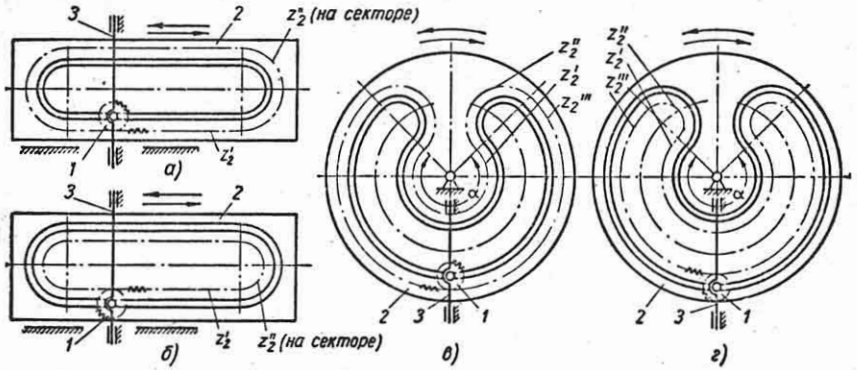


Фиг. 90. Типы передач некруглыми зубчатыми колесами.

возвратно-поступательное (фиг. 91, *а* и *б*) или в качательное (фиг. 91, *в* и *г*) с жесткой кинематической связью между ведущей шестерней *1* и ведомым звеном *2*. Шестерня *1* помещается на ползуне *3* и приводится во вращение через вертикальный шлицевый валик и коническую зубчатую передачу или другим способом. Вспомогательный ползун *3* получает движение от замкнутой канавки на звене *2*, в которую входит ролик, сидящий на конце вала шестерни *1*.

Зубчатый элемент звена *2* может быть составлен из отдельных реек и зубчатых секторов, что облегчает его изготовление.

1. Механизмы по схемам *а* и *б* (фиг. 91) при равномерном вращении ведущей шестерни обеспечивают: а) движение ведомого ползуна в обоих направлениях с постоянными и равными по величине скоростями на среднем участке длины хода; б) реверсирование ползуна на сравнительно коротких участках пути с изменением скорости по закону гармонических колебаний.



Фиг. 91. Схемы зубчатых механизмов для преобразования равномерного вращательного движения в прямолинейное возвратно-поступательное или качательное движение.

Время одного двойного хода ползуна

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}\left(\frac{z_2}{z_1} \mp 1\right) \text{ сек.},$$

где ω_1 и z_1 — угловая скорость и число зубьев ведущей шестерни; z_2 — полное число зубьев на ведомом звене. Знак плюс относится к механизму с наружным зацеплением (схема *б*), знак минус — к механизму с внутренним зацеплением (схема *а*).

Для участка равномерного движения:

длина хода ведомого ползуна *2*

$$s = \pi m z_2';$$

время движения

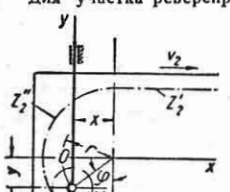
$$T' = \frac{2\pi}{\omega_1}\frac{z_2'}{z_1};$$

скорость ползуна

$$v = \frac{\omega_1 m z_1}{2},$$

где m — модуль зацепления.

Для участка реверсирования (обозначения см. на фиг. 92):



Фиг. 92. Работа механизма по фиг. 91, *а* на участке реверсирования.

длина участка реверсирования ползуна *2* (см. фиг. 91)

$$s_2 = r;$$

длина хода ползуна *3*

$$s_3 = 2r;$$

время реверсирования

$$T'' = \frac{2\pi r}{\omega_1 r_1};$$

координата положения ползуна *2*

$$x = r \sin\varphi;$$

скорость ползуна *2*

$$v_2 = k\omega_1 r\cos\varphi = k\omega_1\sqrt{r^2 - x^2};$$

ускорение ползуна *2*

$$a_2 = -k^2\omega_1^2 r\sin\varphi = -k^2\omega_1^2 x;$$

для ползуна *3*

$$y = -r\cos\varphi;$$

$$v_3 = k\omega_1 r\sin\varphi = k\omega_1 x;$$

$$a_3 = k^2\omega_1^2 r\cos\varphi = k^2\omega_1^2\sqrt{r^2 - x^2}.$$

В приведенных формулах $r = m\left(z_2'' \pm \frac{z_1}{2}\right)$, $\varphi = k\omega_1 t$, где t — время, отсчитываемое с момента начала реверсирования; $k = \frac{z_1}{z_1 \pm 2z_2''}$. Знак плюс берется при наружном зацеплении, знак минус — при внутреннем. Положительными считаются линейные перемещения, скорости и ускорения, направленные горизонтально вправо и вертикально вверх, а угловые скорости — с направлением по движению часовой стрелки.

2. Механизмы по схемам *в* и *г* (фиг. 91) дают постоянные, но не одинаковые при прямом и при обратном ходе передаточные отношения на среднем участке (α) угла качания и реверсирование ведомого звена на сравнительно небольших участках угла качания с плавным изменением скорости.

Зависимость между углом равномерного поворота ведомого звена, числами зубьев и радиусами начальных окружностей секторов выражается формулами (см. фиг. 91, *в* и *г*)

$$\alpha^\circ = 90^\circ\frac{z_2''' - z_2'}{z_2''};\quad r_2' = \frac{180^\circ}{\alpha^\circ}mz_2';$$

$$r_2'' = mz_2'';\quad r_2''' = \frac{180^\circ}{\alpha^\circ}mz_2''',$$

где z_2' и r_2' — число зубьев и радиус начальной окружности малого центрального сектора; z_2''' и r_2''' — то же, но большого центрального сектора; z_2'' и r_2'' — то же, но смещенного реверсирующего сектора с углом 180°.

Время одного двойного качания ведомого звена определяется по приведенной выше формуле для времени двойного хода механизмов по схемам *а* и *б*.

Для участка быстрого равномерного поворота: время поворота

$$T' = \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \frac{r_2'}{r_1};$$

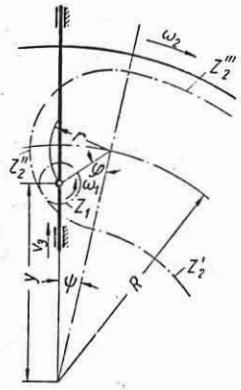
угловая скорость ведомого звена *2*

$$\omega_2 = \pm\, \omega_1 \frac{r_1}{r_2'}.$$

Для участка медленного равномерного поворота:

$$T''' = \frac{\alpha}{\omega_1} \cdot \frac{r_2'''}{r_1}; \qquad \omega_2 = \pm\, \omega_1 \frac{r_1}{r_2'''}.$$

В формулах верхние знаки относятся к механизму по схеме *в*, а нижние — к механизму по схеме *г*; α подставляется в радианах.



Фиг. 93. Работа механизма по фиг. 91, *в* на участке реверсирования.

Для участка реверсирования (обозначения см. на фиг. 93):

угол реверсирования ведомого звена

$$\alpha' = \arcsin \frac{r}{R};$$

длина хода ползуна *3*

$$S_3 = 2r;$$

время реверсирования

$$T'' = \frac{2\pi r}{\omega_1 z_1};$$

координаты положений звеньев

$$y = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi};$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{r\sin\varphi}{R - r\cos\varphi} = \arcsin \frac{r\sin\varphi}{y};$$

скорости звеньев:

$$\omega_2 = k\omega_1 r \frac{R\cos\varphi - r}{y^2}; \qquad v_3 = k\omega_1 \frac{R \cdot r\sin\varphi}{y};$$

ускорения звеньев:

$$\varepsilon_2 = k^2\omega_1^2 Rr \sin\varphi \frac{R^2 - 2y^2}{y^4};$$

$$a = k^2\omega_1^2 Rr \left[\frac{\cos\varphi}{y} - \frac{Rr}{y^3}\sin^2\varphi\right].$$

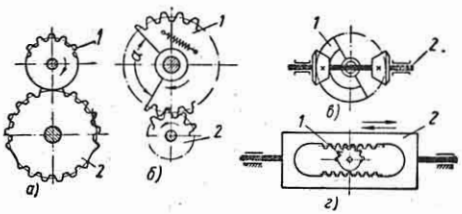
Значения r, φ и k — те же, что и для механизмов по схемам *а* и *б*.

Конструкция механизмов по схемам *б* и *г* может быть упрощена применением цевочного зацепления. Тогда зубчатый элемент поступательно-движущегося или качающегося звена выполняется в виде одного ряда цевок, а ведущая шестерня — с соответствующим профилем зубьев (см. фиг. 68).

Если требуется получить одинаковые скорости равномерного движения при качании в обе стороны, то механизм строят на базе конического зацепления. Такой механизм применяется, например, в станке для нарезания угловых и шевронных зубьев.

Зубчатые передачи с неполнозубыми колесами

Такие передачи дают возможность получать периодическое вращение (фиг. 94, *а* и *б*), а также качательное (фиг. 94, *в*) и прямолинейное возвратно-поступательное (фиг. 94, *г*) движение ведомого звена *2* при непрерывном вращении ведущего звена *1*.



Фиг. 94. Примеры зубчатых передач с неполнозубыми колесами.

Зубчатые колеса во время работы расцепляются и снова входят в зацепление. Чтобы не произошло поломки зубьев, необходимо обеспечить определенное относительное положение ведущего и ведомого звеньев в начале зацепления. В механизме по фиг. 94, *а* предусмотрено запирающее устройство в виде цилиндрической поверхности на ведущем колесе *1* и дуговых лысок на ведомом колесе *2*. В механизме по фиг. 94, *б* на ведущем звене *1* предусмотрен свободно поворачивающийся сектор; после того как ведомое колесо *2* вступит в зацепление с подвижным сектором, движение ведомому валу не будет передаваться, пока ведущее звено не повернется на угол α и не начнет толкать сектор.

Рассматриваемые передачи работают с толчками и не пригодны для больших скоростей.

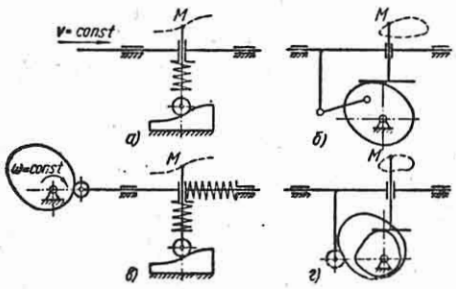
КУЛАЧКОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Общие сведения

Назначение. Кулачковые механизмы характеризуются наличием одной или нескольких высших кинематических пар кулачкового типа; остальные пары обычно выполняются вращательными и посту-

пательными, иногда в виде зубчатых зацеплений и др.

Кулачковые механизмы дают возможность воспроизводить движение ведомых звеньев, вообще говоря, по любым заданным законам. Это свойство механизмов, а также сравнительная простота синтеза (профилирования кулачков) обеспечили широкое их использование в различных отраслях машиностроения. Наибольшее распространение получили



Фиг. 95. Схемы кулачковых механизмов для получения движения точки M по заданной кривой с необусловленной или обусловленной скоростью.

плоские трехзвенные механизмы с одной парой кулачкового типа, а из пространственных кулачковых механизмов — трехзвенные с барабанными или торцевыми кулачками.

Структура. Необходимое в механизме число пар кулачкового типа равно числу функциональных зависимостей между параметрами движения звеньев. Так, если требуется воспроизвести движение точки по определенной плоской кривой, то задание в прямоугольной системе координат выражается одной функциональной зависимостью $y = f(x)$; для получения нужного движения достаточно иметь механизм с одной высшей парой кулачкового типа (фиг. 95, *а* и *б*), обеспечивающей движение точки M по заданной кривой с необусловленной скоростью.

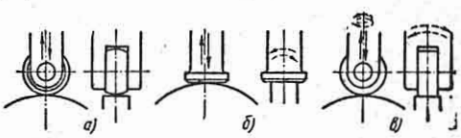
Если же требуется воспроизвести движение точки по определенной плоской кривой с постоянной скоростью, то задание выразится любыми двумя зависимостями из числа следующих:

$$y = f(x);\quad x = f_1(t);\quad y = f_2(t),$$

где t — время. Для воспроизведения такого движения требуется механизм с двумя высшими парами кулачкового типа (фиг. 95, *в* и *г*), обеспечивающий движение точки M по заданной кривой с постоянной скоростью.

Кинематическая пара кулачкового типа имеет линейчатый или точечный контакт. Элемент пары на ведомом звене обычно выполняется по технологически простой поверхности — круглой цилиндрической или плоской, реже по шаровой или бочкообразной. Элемент на ведущем звене имеет более или менее сложную форму поверхности, которая определяется заданным относительным движением связываемых звеньев. Такое звено называется кулачком. В наиболее распространенной плоской паре кулачкового типа (относительное движение звеньев совершается в одной плоскости) элемент кулачка имеет некруглую цилиндрическую поверхность. Сечение кулачка указанной плоскостью называется его *профилем*.

При точечном контакте элементов кулачковая пара налагает одно условие связи; при контакте по прямой линии плоского элемента с сопряженным цилиндрическим — два условия связи; при контакте по прямой линии неплоских элементов — три условия связи. Однако из этих условий связи для ограничения свободы движения связываемых звеньев в каждой паре может быть удобно использовано лишь одно, а именно устраняющее относительное движение элементов по общей нормали к поверхностям в точке их контакта. Остальные условия связи относятся к общим пассивным, приводя к нарушению правильного контакта при недостаточно точном соблюдении соответствия между основными размерами звеньев или при деформации последних (перекосы и т. п.).



Фиг. 96. Разновидности кинематических пар кулачкового типа.

Основные разновидности кинематических пар кулачкового типа: с бочкообразным роликом или пальцем (фиг. 96, *а*), с плоским элементом (фиг. 96, *б*), с цилиндрическим роликом или пальцем (фиг. 96, *в*). Сплошными стрелками на фиг. 96 показаны движения, возможность которых устраняется активными условиями связи; пунктирными стрелками показаны движения,

обычно не устраняемые парой, но приводящие к нарушению правильного контакта элементов (в механизмах являются пассивными условиями связи).

Применение бочкообразного ролика устраняет пассивные связи в контуре, замыкаемом парой кулачкового типа.

Кинематика. Кинематический анализ ставит своей целью определение положений, скоростей и ускорений ведомого звена при работе имеющегося или спроектированного кулачкового механизма. Решение начинается с построения кинематической диаграммы путь — время или, что то же, путь — перемещение равномерно движущегося ведущего звена. Построение производится рассмотренным далее графическим способом, а при заданном уравнении кривой профиля кулачка (например, при круглом эксцентрике) может быть выполнено аналитически.

Выявление скоростей и ускорений ведомого звена в различных положениях механизма и построение диаграмм скорость — время и ускорение — время производятся следующими способами:

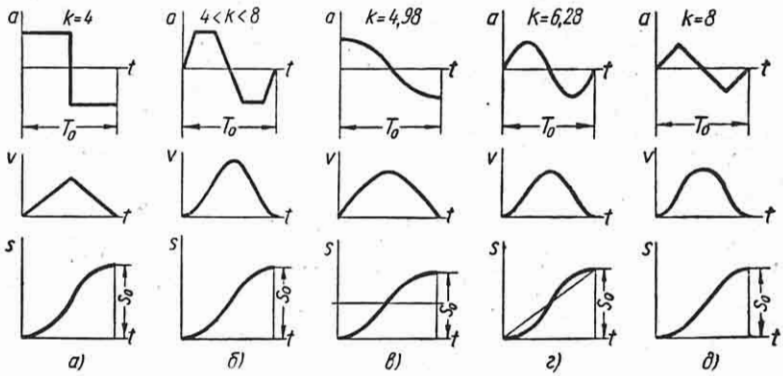
а) двукратным графическим дифференцированием; недостаток — низкая точность результатов вследствие накопления ошибок при вычерчивании;

б) построением планов скоростей и ускорений, для чего в каждом положении кулачковый механизм заменяется кинематически эквивалентным механизмом с шарнирами и поступательными парами; недостаток — необходимость определять радиусы кривизны профиля, что обычно затруднительно;

в) построением диаграммы скорость — время посредством планов скоростей (без определения радиусов кривизны профиля) и диаграммы ускорение — время однократным графическим дифференцированием;

г) расчетным путем с использованием или без использования номограмм; этот способ рассмотрен далее.

Большинство указанных способов достаточно полно разработано только для плоских кулачковых механизмов.



Фиг. 97. Различные типы диаграмм: ускорение — время, скорость — время и путь — время.

Кинематический синтез заключается в правильном выборе диаграммы путь — время и в построении по ней профиля кулачка.

Кулачок обычно имеет рабочие и холостые участки. На рабочих участках характер движения ведомого звена определяется рабочим процессом в машине (например, технология обработки на металлорежущих станках обычно требует постоянства скорости подачи). На участках холостого хода выполняются вспомогательные движения; здесь желательно произвести перемещение ведомого звена за возможно более короткое время при наименьшем перемещении ведущего звена (кулачка); препятствием к сокращению времени перемещения являются динамические условия, которые могут привести к неспокойной работе механизма.

Диаграмму путь — время для участка холостого хода получают двукратным графическим или аналитическим интегрированием принятой диаграммы ускорение — время. Употребительные виды диаграмм показаны на фиг. 97. Во всех

случаях отсутствуют удары первого рода — скачкообразное изменение скорости, в результате которого ускорения и силы инерции теоретически возрастают до бесконечности. Диаграммы *а* и *в* приводят к удару второго рода — скачкообразное изменение ускорения и силы инерции на конечную величину Диаграммы *б* и *д* дают скачкообразное изменение производной от ускорения. Наиболее плавную работу обеспечивает диаграмма *г*.

Здесь, так же как и в дальнейшем изложении, звенья механизма приняты за абсолютно жесткие. В действительном механизме процесс передачи движения от кулачка к ведомому звену осложняется упругой деформацией звеньев, что приводит к некоторому искажению кинематических диаграмм.

Максимальная величина ускорения $a_{max} = k\frac{s_0}{T_0^2}$ (обозначения см. на фиг. 97). На фиг. 97 диаграммы расположены в порядке возрастания k, т. е. возрастания величины, характеризующей инерционное воздействие движущихся звеньев на механизм. Для изготовления кулачков диаграммы *в* и *г* (тригонометрические) более удобны.

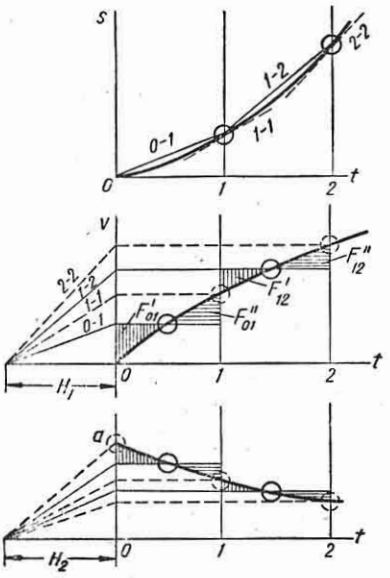
Графическое дифференцирование и интегрирование

Применяются два способа графического дифференцирования (фиг. 98).

1. Способ касательных: на диаграмме $s—t$ проводят касательные *1—1*, *2—2*,..., а на диаграмме $v—t$ — параллельные им лучи *1—1*, *2—2*,... (H_1 выбирается произвольно с учетом желательного масштаба построений); из точек пересечения лучей с осью v проводят горизонтали до пересечения с разделяющими вертикалями *1*, *2*,...; через полученные точки проводят кривую $v—t$. Построения, относящиеся к рассмотренному способу, показаны пунктирными линиями. Подобным же образом строится диаграмма $a—t$ по полученной диаграмме $v—t$.

2. Способ хорд: на диаграмме $s—t$ вместо касательных проводят хорды *0—1*, *1—2*,..., а на диаграмме $v—t$ — параллельные им лучи *0—1*, *1—2*,..., из точек пересечения которых с осью v проводят горизонтали; кривую $v—t$ ведут через середины отрезков горизонталей между соответствующими разделяющими вертикалями или, точнее, таким образом, чтобы площади F'_{01} и F''_{01}, F'_{12} и F''_{12} ... были на глаз равны между собой. Построения, относящиеся к этому способу, показаны сплошными линиями.

Подобным же образом строится диаграмма $a—t$ по полученной диаграмме $v—t$.



Фиг. 98. Графическое дифференцирование.

Графическое интегрирование производится в обратном порядке: сначала по заданной диаграмме $a—t$ строят $v—t$, а затем по $v—t$ строят $s—t$. В обоих случаях построения выполняются одинаковыми приемами.

Рассмотрим в качестве примера построение диаграммы $s—t$ по $v—t$ (фиг. 98). На диаграмме проводят разделяющие линии *1*, *2*,..., а затем горизонтали с таким расчетом, чтобы на глаз $F'_{01} = F''_{01}$, $F'_{12} = F''_{12}$ ...; далее выбирают произвольно H_1 с учетом желательного масштаба построений и проводят лучи *0—1*, *1—2*,..., параллельно которым на диаграмме $s—t$ проводят отрезки прямых *0—1*, *1—2*... и по полученным в пересечениях с разделяющими прямыми точкам строят кривую $s—t$.

Формулы для определения масштабов диаграмм:

при графическом дифференцировании

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H_1}; \quad \mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t H_2} = \frac{\mu_s}{\mu_t^2 \cdot H_1 H_2};$$

при графическом интегрировании

$$\mu_v = \mu_a \cdot \mu_t \cdot H_2; \quad \mu_s = \mu_v \mu_t \cdot H_1 = \mu_a \mu_t^2 H_1 H_2,$$

где μ_t, μ_s, μ_v и μ_a — масштабы, равные соответственно числу сек., *м*, *м/сек* и *м/сек*^{2}, содержащихся в 1 *мм* чертежа; H_1 и H_2 — полюсные расстояния в *мм*.

Плоские трехзвенные кулачковые механизмы

Структура и классификация. Из кулачковых механизмов наибольшее распространение получили плоские трехзвенные механизмы, имеющие одну пару кулачкового типа и две низшие пары — вращательную и поступательную или обе вращательные. Ведущим звеном, как правило, является кулачок, редко — сопряженное с ним звено.

В механизмах с кулачковой парой по фиг. 96, *а* пассивные условия связи отсутствуют, в механизмах с парой по фиг. 96, *б* имеется одно и по фиг. 96, *в* — два общих пассивных условия связи.

Для удобства анализа и синтеза из многозвенных кулачковых механизмов часто оказывается возможным выделить плоские трехзвенные.

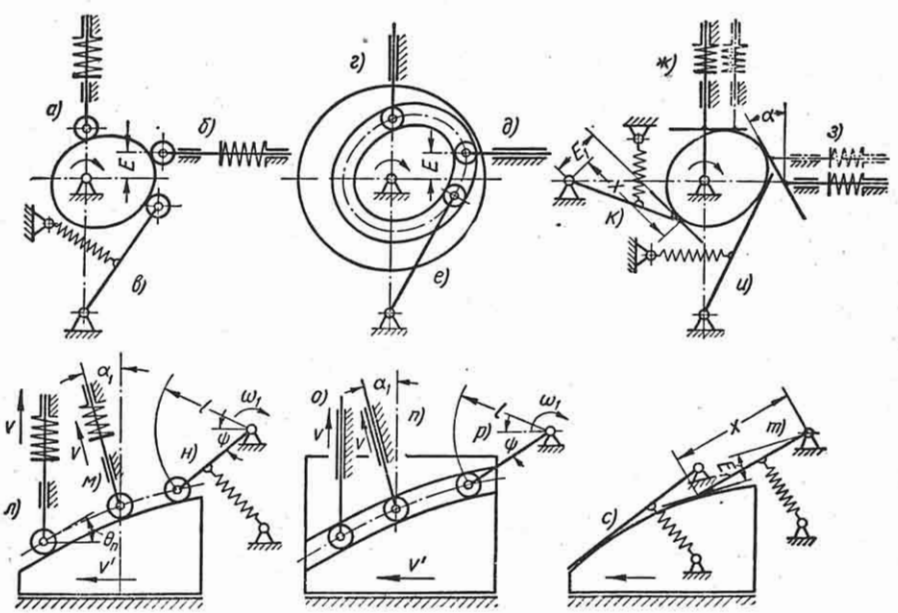
Трехзвенные кулачковые механизмы (фиг. 99) разделяются:

1) *по характеру движения ведущего звена* — на механизмы с вращающимся (*а—и*), качающимся или поступательно-движущимся (*л—т*) кулачком;

2) *по характеру движения ведомого звена* — на кулачково-ползунные (с поступательно движущимся ведомым звеном — *а, б, г, д, ж, з, л, м, о, п*) и кулачково-коромысловые (с качающимся относительно неподвижной точки ведомым звеном — остальные исполнения на фиг. 99);

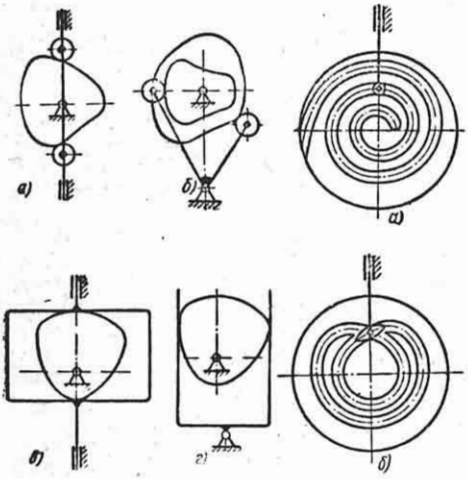
3) *по выполнению элемента кулачковой пары у ведущего звена* — на механизмы с открытым кулачком (все, кроме *г, д, е, о, п, р*) и с пазовым кулачком (геометрически замкнутые механизмы — *г, д, е, о, п, р*);

4) *по выполнению элемента кулачковой пары у ведомого звена* — на механизмы с плоским толкателем (*ж, з, и, к, с, т*) и с круглым толкателем (остальные исполнения на фиг. 99). Толкатели более сложного, а также заостренного профиля применяются редко;



Фиг. 99. Различные типы трехзвенных кулачковых механизмов.

5) *по расположению элемента кулачковой пары ведомого звена относительно осей вращения и направлений поступательного движения как ведущего, так и ведомого звеньев* — на центральные (*а*, *г*) и смещенные (*б*, *д*), с прямоугольным (*ж*) и косоугольным (*з*) толкателем, с центральным (*и*, *с*) и смещенным (*к*, *т*) коромыслом, с передачей поступательного движения под прямым (*л*, *о*) и косым (*м*, *п*) углом.



Фиг. 100. Примеры геометрически замкнутых механизмов с открытыми кулачками.

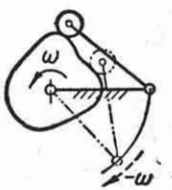
Фиг. 101. Схемы механизмов с многооборотными кулачками.

В механизмах с плоским толкателем и с поступательным движением кулачка и ведомого звена касание элементов кулачковой пары происходит всегда в одной точке профиля кулачка. Такой кулачковый механизм вырождается в механизм для передачи прямолинейно-поступательного движения с постоянным отношением скоростей, т. е. кинематически становится идентичным механизму с одними низшими поступательными парами.

При открытых кулачках геометрическое замыкание может быть достигнуто выполнением элемента кулачковой пары ведомого звена с двумя поверхностями круглого (фиг. 100, *а* и *б*) или прямолинейного (фиг. 100, *в* и *г*) профиля. В этих случаях профиль кулачка должен обеспечить постоянное касание с ведомым звеном в двух точках.

Если цикл работы механизма должен совершаться за два и более оборотов кулачка, то паз последнего выполняется с соответствующим числом оборотов незамкнутым (фиг. 101, *а*) или замкнутым (фиг. 101, *б*). Первое исполнение пригодно, если кулачок делает несколько оборотов в одном, а затем в противоположном направлении. Второе исполнение требует специальных мер против попадания ведомого ролика в другую ветвь в месте пересечения пазов; наиболее просто это достигается применением вместо круглого ролика башмака продолговатой формы (фиг. 101, *б*).

Кинематика. Профилирование кулачков по имеющейся диаграмме пути выполняется графическим построением огибающей последовательных положений профиля ведомого звена (толкателя) в его движении относительно ведущего. Для этого используется метод обращения движения: вращающийся или поступательно движущийся кулачок условно останавливают, а стойке сообщают движение со скоростью кулачка, но в противоположном направлении (фиг. 102).



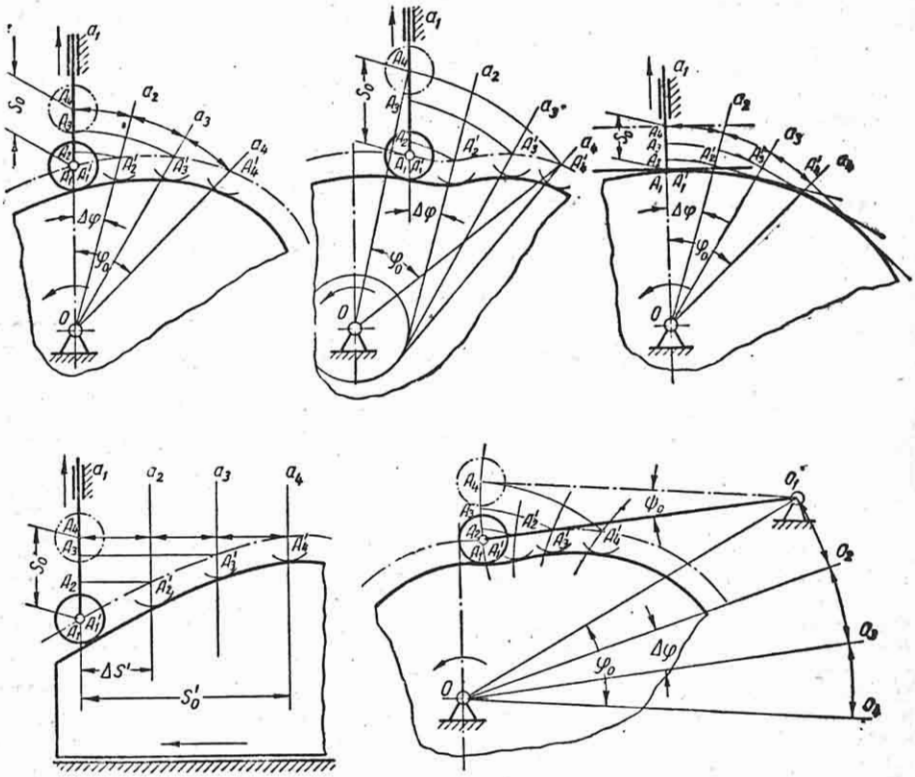
Фиг. 102. Обращение движений в кулачковом механизме.

При практическом применении указанного метода ограничиваются построением необходимого минимума линий (фиг. 103). Построение разделяется на следующие этапы:

а) пользуясь имеющейся диаграммой пути $s = f_1(\varphi)$, $s = f_2(s')$, $\psi = f_3(\varphi)$ или $\psi = f_4(s')$ на дуговой или прямолинейной траектории движения характерной точки A ведомого звена, наносят положения A_1, A_2,..., которые эта точка будет занимать через равные приращения угла поворота $\Delta\varphi$ или линейного перемещения $\Delta s'$ кулачка;

б) наносят положения O_1, O_2,..... центра неподвижного шарнира ведомого коромысла или положения a_1, a_2,... прямых, проходящих через A в направлении поступательной пары ведомого ползуна в обращенных положениях механизма;

в) определяют положения A'_1, A'_2,... точки A в обращенном движении как пересечение дуговых засечек из центра O вращающегося кулачка (или прямолинейных засечек, параллельных направлению движения поступательно пере-



Фиг. 103. Профилирование кулачков.

мещающегося кулачка) и дуговых засечек из O_1, O_2,... при ведомом коромысле (или прямолинейных засечек a_1, a_2,... при ведомом ползуне);

г) базируясь на точки A_1', A_2',..., наносят положения дугового или прямолинейного профиля ведомого звена; огибающая этих положений и будет искомым профилем кулачка.

При толкателе круглого профиля кривая, проведенная через A_1', A_2',..., называется *теоретическим* (*центровым*) *профилем* кулачка. Действительный профиль кулачка является эквидистантным теоретическому. Выпуклый участок теоретического профиля и вогнутый действительного не должны иметь радиусов кривизны, меньших чем радиус ролика.

Построение диаграммы пути при кинематическом анализе кулачкового механизма производится теми же приемами (фиг. 103), что и профилирование кулачка, но выполняется в обратном порядке, а именно:

а) наносят положения O_1, O_2,... или a_1, a_2,...;

б) по имеющимся профилям кулачка и ведомого звена строят A_1', A_2',...;

в) по точкам A_1', A_2',... строят положения A_1, A_2,... на действительной траектории движения точки A; пользуясь A_1, A_2..., строят диаграмму пути.

При одном и том же профиле кулачка плоский прямоугольный толкатель (см. фиг. 99, *ж*) имеет одинаковое движение независимо от того, будет ли ось поступательной пары ведомое звено — стойка проходить через центр вращения кулачка или будет смещена относительно него; косоугольный толкатель (фиг 99, *з*) будет иметь тот же закон движения ведомого звена, но увеличенную в $\frac{1}{\cos\alpha}$ раз длину хода.

Аналитический способ определения скоростей и ускорений в кулачковом механизме [22] основан на следующих формулах:

скорость ведомого звена

$$v = v_e \xi_v;$$

ускорение ведомого звена

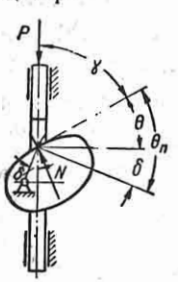
$$a = v_e^2 \xi_a = v_e^2 \left(\frac{X}{\rho} + \frac{Y}{R} + \frac{Z}{l} \right);$$

$$\xi_v = \frac{\sin \theta_n}{\cos \theta}; \quad X = \frac{\cos^2 (\theta_n - \theta)}{\cos^3 \theta};$$

$$Y = \frac{2 \cos (\theta_n - \theta) - \cos \theta \cos \theta_n}{\cos^2 \theta};$$

$$Z = \operatorname{tg} \theta \frac{\sin^2 \theta_n}{\cos^2 \theta} = \xi_v^2 \operatorname{tg} \theta,$$

где $v_e = \omega R$ — окружная скорость кулачка в месте его касания с ведомым звеном; ω — угловая скорость кулачка (считается положительной при подъеме ведомого звена, отрицательной при опускании); ρ — радиус кривизны профиля в точке касания (положительный при вогнутом профиле и отрицательный при выпуклом); R — радиус-вектор кулачка, т. е. расстояние от центра его вращения до точки касания; l — длина ведомого коромысла от точки касания до центра поворота (считается положительной, если при своем движении радиус-вектор стремится удалиться от центра качания коромысла, и отрицательной — если стремится приблизиться к нему); θ_n — угол подъема кривой кулачка (считается всегда положительным); θ — угол давления (считается всегда положительным — см. далее); $\theta_n - \theta = \delta$ — угол смещения между R и направлением движения ведомого звена эталонного механизма (фиг. 104).



Фиг. 104. Схема эталонного механизма.

Для упрощения расчетов удобно пользоваться номограммами (фиг. 105). Во многих частных случаях кулачкового механизма расчет сильно упрощается.

Углы передачи и углы давления. Углом передачи γ называется угол между направлением движения ведомого звена и направлением общей касательной к профилям в точке их соприкосновения; углом давления θ — угол между перпендикуляром к направлению движения ведомого звена и направлением общей касательной (фиг. 104);

$$\gamma + \theta = 90°.$$

Величина угла передачи или угла давления должна одновременно возможно полнее удовлетворять двум противоречивым требованиям:

с точки зрения сокращения размеров кулачкового механизма выгодно уменьшать γ или увеличивать θ;

с точки зрения надежности механизма против заклинивания, т. е. самоторможения при передаче движения от ведущего звена (кулачка) к ведомому, выгодно увеличивать γ или уменьшать θ. Надежность работы механизма характеризуется коэффициентом надежности $k = \frac{\operatorname{ctg} \gamma_з}{\operatorname{ctg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \theta_з}{\operatorname{tg} \theta}$, где $\gamma_з$ и $\theta_з$ — углы, при которых начинается заклинивание механизма.

С точки зрения к. п. д. механизма выгодно, чтобы предельные значения γ и θ находились в некоторой средней зоне, не подходя близко ни к 0°, ни к 90°.

На фиг. 106 [27] приведен график изменения к. п. д. эталонного кулачкового механизма (см. фиг. 104) в зависимости от угла давления θ, а также коэффициентов трения между кулачком и ведомым звеном (f_1) и между ведомым звеном и его опорами (f_2).

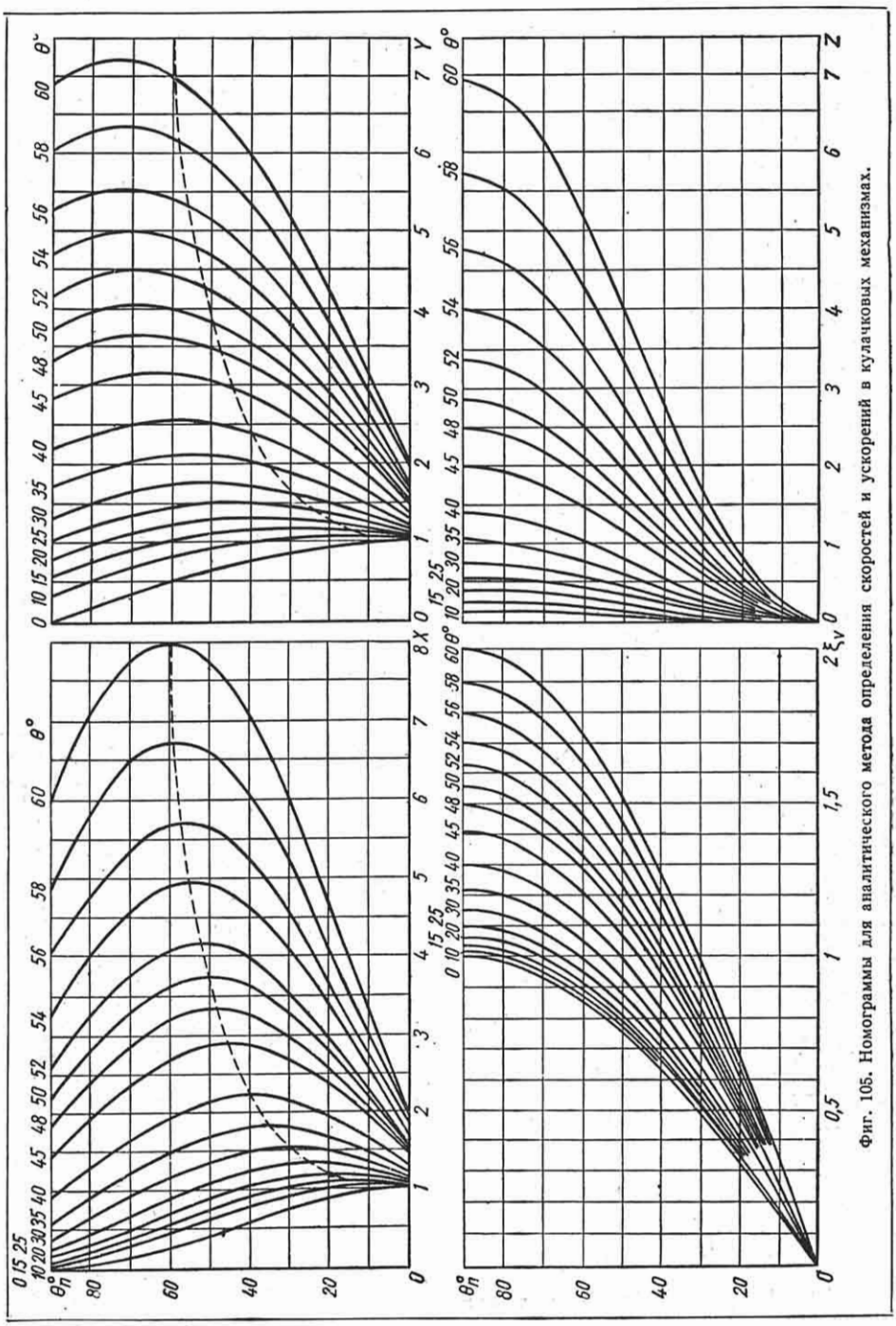
К. п. д. центрального кулачково-ползунного механизма

$$\eta = \frac{1 - f_{1пр} f_{2пр} - (f_{1пр} + f_{2пр}) \operatorname{tg} \theta}{1 + f_{1пр} \operatorname{ctg} \theta}.$$

К. п. д. смещенного кулачково-ползунного или кулачково-коромыслового механизма

$$\eta = \frac{1 - f_{1пр} f_{2пр} - (f_{1пр} + f_{2пр}) \operatorname{tg} (\theta_n - \delta)}{1 + f_{1пр} \operatorname{ctg} \theta_n},$$

где $f_{1пр}$ и $f_{2пр}$ — коэффициенты трения, приведенные при отклонении механизма от эталонной схемы (см. фиг. 104),



Фиг. 105. Номограммы для аналитического метода определения скоростей и ускорений в кулачковых механизмах.

между кулачком и толкателем и между ведомым звеном и стойкой.

При проектировании неответственных механизмов можно руководствоваться неравенствами:

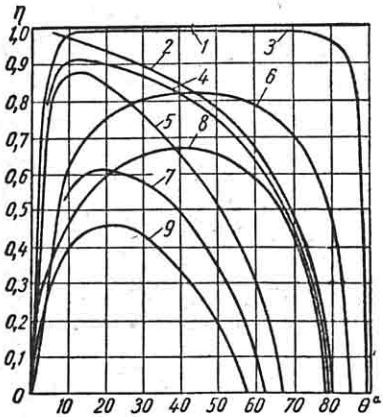
для кулачково-ползунных механизмов

$$\gamma \geqslant 60° \text{ или } \theta \leqslant 30°;$$

для кулачково-коромысловых механизмов

$$\gamma \geqslant 45° \text{ или } \theta \leqslant 45°.$$

При проектировании ответственных кулачковых механизмов оптимальное



Фиг. 106. Изменение к. п. д. кулачкового механизма в зависимости от угла давления, при значениях коэффициентов трения f_1 и f_2:

Кривые	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_1	0	0	0,01	0,01	0,01	0,1	0,1	0,2	0,2
f_2	0	0,2	0	0,2	0,4	0	0,4	0	0,4

значение θ_0 предельного угла давления θ_{max} следует выбирать в зависимости от коэффициентов трения $f_{1пр}$ и $f_{2пр}$ по номограмме [27], предложенной проф. Г. А. Шаумяном (фиг. 107). Углы θ_0, найденные по номограмме, обеспечивают достаточно хорошие показатели всех основных свойств механизма

$$k_0 = \frac{\operatorname{tg}\theta_э}{\operatorname{tg}\theta_0},$$

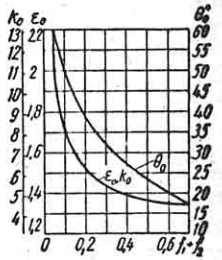
$$\varepsilon_0 = \frac{N}{P}$$

(см. фиг. 104) и хороший к. п. д. при сравнительно малых размерах кулачка.

При наличии ролика на ведомом звене приведенный коэффициент трения

$$f_{1пр} = \frac{d \cdot f + 2k}{D} \approx \frac{d}{D} f,$$

где D — диаметр ролика; d — диаметр его отверстия под цапфу; f — коэффициент трения скольжения в цапфе; k — коэффициент трения качения ролика по поверхности кулачка.



Фиг. 107. Номограмма для выбора оптимального значения предельного угла давления.

При выполнении ведомого звена отличающимся от ведомого звена эталонного механизма (фиг. 108) приведенный коэффициент трения

$$f_{2пр} = \frac{2l}{a} f$$

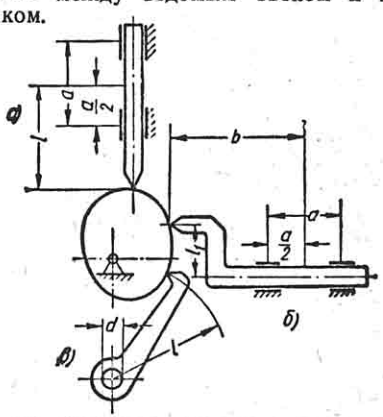
(фиг. 108, *а*);

$$f_{2пр} = \frac{2}{a}\left[l + l_1 \operatorname{ctg}(\theta + \varphi)\right] f$$

(фиг. 108, *б*);

$$f_{2пр} = \frac{d}{2l} f$$

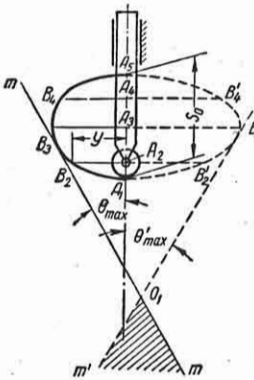
(фиг. 108, *в*), где $\varphi = \operatorname{arctg} f_{1пр}$ — угол трения между ведомым звеном и кулачком.



Фиг. 108. Схема для определения приведенного коэффициента трения между ведомым звеном и стойкой.

Проектирование механизма по выбранному предельному значению угла передачи γ_{min} или угла давления θ_{max} производится из условия, чтобы ни в од-

б) от точек A_1, A_2, . . . по горизонтали откладывают отрезки $y = \frac{v}{\omega}$, где v — линейная скорость ведомого звена в данном положении, принимается за положительную при направлении вверх и за отрицательную при направлении вниз; ω — угловая скорость кулачка считается положительной при вращении по часовой стрелке и отрицательной при вращении против часовой стрелки; положительные отрезки откладываются вправо от точек A_1, A_2, . . . , отрицательные — влево;



Фиг. 109. Определение зоны возможного расположения оси кулачка по предельным значениям углов давления.

в) точки B_1, B_2 . . . и B_1', B_2' . . . соединяют плавной замкнутой кривой. При вращении кулачка против движения часовой стрелки участок кривой, проведенный сплошной линией, соответствует подъему ведомого звена, а проведенный пунктирной линией— опусканию. При вращении кулачка по движению часовой стрелки подъему ведомого звена соответствует участок, проведенный пунктирной линией, опусканию — сплошной линией;

г) проводят касательные mm и $m'm'$ к кривой под предельно допустимыми углами давления θ_{max} и θ'_{max} к вертикали.

Центр вращения кулачка может располагаться в любой точке заштрихованной области (фиг. 109). Наиболее компактный механизм получается при выборе центра в точке O_1 пересечения касательных.

Для пазовых кулачков (см. фиг. 99, *г* и *д*) и открытых кулачков, работающих с вращением в обе стороны, берется $\theta_{max} = \theta'_{max}$. Для открытых кулачков с вращением в одну сторону угол давления, соответствующий опусканию ведомого звена под действием пружины, может быть выбран бо́льшим: $\theta_{max} < \theta'_{max}$.

Если ведомое звено перемещается проектируемым кулачком только в одну сторону, а возвращается в исходное положение каким-либо другим устройством при отсутствии соприкосновения ролика с кулачком, то область возможных положений центра вращения кулачка ограничивается только одной касательной. Например, для механизма со скоростью v, направленной вверх, и угловой скоростью ω против движения часовой стрелки эта область лежит по левую сторону линии mm (фиг. 109).

Кулачково-коромысловые механизмы.

1. В механизмах с поступательным движением кулачка (см. фиг. 99, *н* и *р*)

$$\theta = \theta_n - \psi;$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega' l}{v'} \cdot \frac{1}{\cos\psi} - \operatorname{tg}\psi.$$

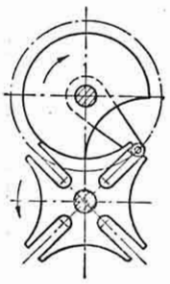
Подбор основных размеров механизма при проектировании рекомендуется производить путем пробных вычерчиваний с последующей проверкой по приведенным формулам.

2. В механизмах с вращающимся кулачком (см. фиг. 99, *в* и *е*) положение центра последнего определяется графически. От описанного выше построения (фиг. 109) рассматриваемый случай отличается следующим: траектория центра ролика вместо прямой является дугой окружности; отрезки y откладываются в радиальных направлениях; вместо одной касательной mm приходится проводить ряд прямых m_1m_1, m_2m_2. . . через точки B_1, B_2, . . . под углом $\gamma_{min} = 90° - \theta_{max}$ к радиальному направлению. Эти прямые образуют ломаную линию (в пределе — кривую), которая и ограничивает область допустимых положений центра вращения кулачка. Таким же образом строится вторая граничная линия вместо касательной $m'm'$.

ПРОЧИЕ МЕХАНИЗМЫ

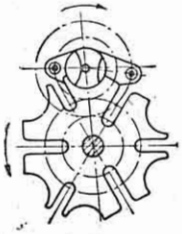
Мальтийские механизмы

Механизмы служат для прерывистого поворота ведомого звена (креста) при постоянном вращении ведущего звена (кривошипа). Наибольшее распространение получили так называемые правильные механизмы (фиг. 110), характеризующиеся поворотом ведомого звена на равные углы с постоянной продолжительностью поворотов и остановок. Для безударной работы механизма требуется, чтобы направление скорости центра ролика или пальца кривошипа при входе в прорезь креста и при выходе из нее совпадало с направлением оси прорези. При соблюдении этого условия отношение между временем поворота и временем остановки будет зависеть только от числа прорезей на кресте.



Фиг. 110. Мальтийский механизм для поворота ведомого звена на равные углы.

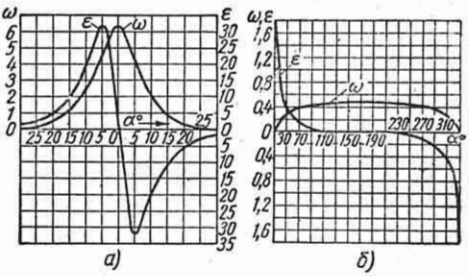
Если требуется сократить время остановок, применяют кривошипы с двумя и более роликами, равномерно расположенными по окружности. Если требуются различные продолжительности остановок, ролики на кривошипе размещают неравномерно. При необходимости получить неодинаковые углы поворота креста ролики располагают на разных расстояниях от оси вращения кривошипа, а крест выполняют неправильной (несимметричной) формы (фиг. 111). Наконец, если нужно значительно увеличить продолжительность остановок, кривошип периодически останавливается, когда крест находится в положении покоя.



Фиг. 111. Мальтийский механизм для поворота ведомого звена на различные углы.

Фиг. 112. Мальтийский механизм с внутренним зацеплением.

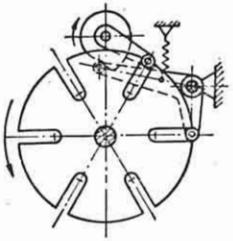
Мальтийские механизмы с внутренним зацеплением (фиг. 112) отличаются от механизмов с наружным зацеплением (фиг. 110) большей плавностью поворота. Это достигается за счет уменьшения времени остановки и увеличения времени поворота, а также лучшего соответствия траектории движения ролика движению прорези (вращение ведущего и ведомого звеньев происходит в одном направлении).



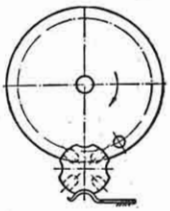
Фиг. 113. Диаграммы изменения скорости и ускорения ведомого звена в мальтийских механизмах с наружным и с внутренним зацеплением.

На фиг. 113 показаны диаграммы изменения угловой скорости ω и углового ускорения ε трехпазового креста с наружным (фиг. 113, *а*) и с внутренним (фиг. 113, *б*) зацеплением за время поворота на одно деление в зависимости от угла поворота кривошипа α.

Фиксация ведомого звена во время его остановки осуществляется: а) по-



Фиг. 114. Мальтийский механизм с принудительной фиксацией ведомого звена.



Фиг. 115. Мальтийский механизм с пружинной фиксацией ведомого звена.

средством концентрически расположенных цилиндрической поверхности на

Таблица 13

Расчетные зависимости для правильных мальтийских механизмов с наружным зацеплением
(см. фиг. 110)

Искомая величина	Обозначение	Число прорезей				
		3	4	5	6	8
Радиус креста	R	$0{,}577r$	r	$1{,}376r$	$1{,}732r$	$2{,}414r$
Расстояние между осями	a	$1{,}154r$	$1{,}414r$	$1{,}701r$	$2{,}000r$	$2{,}613r$
Время поворота креста на одно деление	t сек.	$10/n$	$15/n$	$18/n$	$20/n$	$22{,}5/n$
Время остановки креста при равномерном вращении кривошипа	t_1 сек.	$50/n$	$45/n$	$42/n$	$40/n$	$37{,}5/n$
Наибольший момент на кресте для преодоления сил инерции	M *кгсм*	$0{,}345J_{пр}n^2$	$0{,}060J_{пр}n^2$	$0{,}025J_{пр}n^2$	$0{,}015J_{пр}n^2$	$0{,}0077J_{пр}n^2$
Наибольший момент на кривошипе для преодоления сил инерции	M_1 *кгсм*	$1{,}80J_{пр}n^2$	$0{,}110J_{пр}n^2$	$0{,}027J_{пр}n^2$	$0{,}011J_{пр}n^2$	$0{,}0034J_{пр}n^2$
Наибольшее усилие на ролике для преодоления сил инерции	P	$1{,}96\frac{J_{пр}n^2}{r}$	$0{,}125\frac{J_{пр}n^2}{r}$	$0{,}031\frac{J_{пр}n^2}{r}$	$0{,}013\frac{J_{пр}n^2}{r}$	$0{,}0043\frac{J_{пр}n^2}{r}$
Момент на кривошипе от постоянного момента сопротивления на кресте M_c (для положения механизма, в котором M_1 наибольший)	M_{1c}	$5{,}40M_c$	$2{,}02M_c$	$1{,}17M_c$	$0{,}80M_c$	$0{,}49M_c$
Усилие на ролике от постоянного момента сопротивления на кресте M_c (для положения механизма, в котором P наибольшее)	P_1	$5{,}81\frac{M_c}{r}$	$2{,}20\frac{M_c}{r}$	$1{,}28\frac{M_c}{r}$	$0{,}90\frac{M_c}{r}$	$0{,}56\frac{M_c}{r}$

Обозначения: r—радиус кривошипа в *см*; n—число оборотов кривошипа в минуту; $J_{пр}$—момент инерции ведомых звеньев, приведенный к валу мальтийского креста, в *кгсмсек*^{2}.

Таблица 14

Расчетные зависимости для правильных мальтийских механизмов с внутренним зацеплением
(см. фиг. 112)

Искомая величина	Обозначение	Число прорезей				
		3	4	5	6	7
Внутренний радиус креста	R	$0{,}577r$	r	$1{,}376r$	$1{,}732r$	$2{,}414r$
Расстояние между осями	a	$1{,}154r$	$1{,}414r$	$1{,}701r$	$2{,}000r$	$2{,}613r$
Время поворота креста на одно деление	t сек.	$50/n$	$45/n$	$42/n$	$40/n$	$37{,}5/n$
Время остановки креста при равномерном вращении кривошипа	t_1 сек.	$10/n$	$15/n$	$18/n$	$20/n$	$22{,}5/n$
Наибольший момент на кресте от сил инерции, имеющий место в начале зацепления	M *кгсм*	$0{,}019J_{пр}n^2$	$0{,}011J_{пр}n^2$	$0{,}008J_{пр}n^2$	$0{,}0063J_{пр}n^2$	$0{,}0046J_{пр}n^2$

Обозначения: r—радиус кривошипа в *см*; n—число оборотов кривошипа в минуту; $J_{пр}$—момент инерции ведомых звеньев, приведенный к валу мальтийского креста, в *кгсмсек*^{2}.

кривошипе и соответствующих выемок на кресте; б) посредством специальных фиксаторов, например принудительно действующих (фиг. 114) или пружинных (фиг. 115).

Второй способ обеспечивает большую точность и надежность фиксации, а поэтому применяется преимущественно в ответственных механизмах.

Зависимости для геометрического, кинематического и динамического расчета мальтийских механизмов приведены в табл. 13 и 14.

Кроме рассмотренных основных типов мальтийских механизмов, существует значительное число различных вариантов их исполнения. В частности, в приборах и тихоходных малонагруженных машинах применяются механизмы, у которых условие безударности работы не выполнено (фиг. 115).

Храповые механизмы

Механизмы допускают свободное относительное движение звеньев в одном направлении и препятствуют относительному движению в противоположном направлении. Храповые механизмы используются: а) для преобразования качательного или прямолинейного возвратно-поступательного движения в прерывистое вращательное или прямолинейно-поступательное, а при многозвенных механизмах — в непрерывное вращательное с пульсирующей скоростью; б) для устранения возможности перемещения какого-либо звена в одном направлении — запирающие устройства в подъемных механизмах и т. п.; в) для обеспечения свободного проворачивания связанных звеньев в одном направлении — муфты обгона (муфты свободного хода).

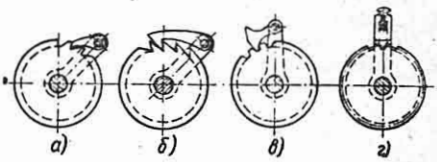
Различают зубчатые и фрикционные храповые механизмы.

Зубчатые храповые механизмы состоят из зубчатого храпового колеса

Фиг. 116. Типы зубчатых храповых механизмов.

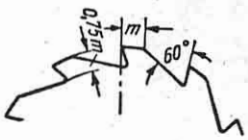
или зубчатой рейки и коромысла или ползуна с закрепленной на них собачкой.

Храповое колесо выполняется с наружными, внутренними или торцевыми зубьями (фиг. 116). Профиль зуба берется: несимметричным трапецоидальным (фиг. 117, *а*) или треугольным (фиг. 117, *б*) при работе механизма в одну сторону; симметричным трапецоидальным (фиг. 117, *в*) для работы механизма в обе стороны; эвольвентным (фиг. 117, *г*) при одновременном использовании храпового колеса в качестве шестерни зубчатой передачи.



Фиг. 117. Храповые механизмы с собачками различного типа и зубьями различного профиля.

Собачки выполняются чаще поворотными — прямыми (фиг. 117, *а*), обратными (фиг. 117, *б*) или перекидными двусторонними (фиг. 117, *в*), реже с расцеплением посредством поступательного перемещения (фиг. 117, *г*). В последнем исполнении направление работы механизма может быть изменено на обратное поворотом собачки вокруг собственной оси на 180°. Прижатие собачек к храповому колесу выполняется пружинами, иногда собственным весом собачки. Для устранения возможности отхода собачки под нагрузкой положение оси ее поворота выбирается так, чтобы нормальное усилие на ее рабочую поверхность создавало крутящий момент, прижимающий собачку к колесу. Выполнение этого условия и желание устранить радиальную нагрузку на колесо (важно для сильно нагруженных механизмов) приводит к необходимости поднутрения зуба. На фиг. 118 показан профиль поднутренного зуба, предназначенного для больших нагрузок; размеры зуба даны в зависимости от модуля m, соответствующего наружному диаметру колеса.



Фиг. 118. Профиль зуба храпового колеса для больших нагрузок.

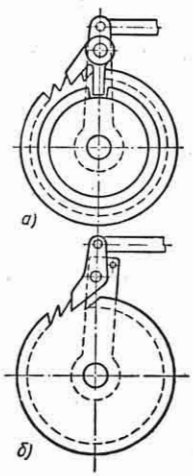
Если ось качания коромысла совпадает с осью поворота храпового колеса или направление движения ведущего ползуна совпадает с направлением

движения храповой рейки, то при рабочем ходе собачка не имеет движения относительно колеса или рейки, что создает благоприятные условия работы механизма. При невозможности выдержать указанное соответствие, например при поступательном движении одного звена и вращательном — другого, необходимо стремиться к возможно меньшим отклонениям действительной траектории движения центра поворота собачки от наивыгоднейшей траектории. Отрицательное влияние поворота собачки относительно зубьев можно отчасти уменьшить увеличением радиуса закругления рабочего конца собачки и дна впадины между зубьями на колесе.

Регулирование угла поворота храпового колеса за одно качание коромысла производится: а) изменением угла качания коромысла, б) перестановкой щитка (фиг. 119).

Устранение шума от прыгания собачки по зубьям при обратном ходе обычно осуществляется: а) пробуксовывающим пружинным кольцом, надетым с натягом на неподвижный цилиндр (фиг. 120. *а*): б) ведущим шатуном (фиг. 120, *б*).

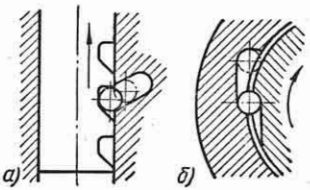
Фиг. 119. Храповой механизм с регулировочным щитком.



Фиг. 120. Схемы механизмов с отводом собачки от храпового колеса при обратном ходе.

Устанавливая K собачек с относительным смещением каждой на $\frac{1}{K}$ шага, можно уменьшить угол поворота храпового колеса до $\frac{1}{Kz}$ оборота, где z — число зубьев храповика.

Кроме рассмотренных зубчатых механизмов обычного типа, встречаются специальные конструкции, как, например, с цевочным храповым колесом и вильчатой собачкой, с собачкой в виде цилиндрического ролика; они применяются в запирающем реечном механизме домкрата (фиг. 121, *а*), в нефрикционном механизме муфты обгона с выемками на обоих звеньях (фиг. 121, *б*).



Фиг. 121. Храповые механизмы с собачкой в виде цилиндрического ролика.

Фрикционные храповые механизмы применяются при больших скоростях и необходимости обеспечить возможность сцепления связываемых звеньев при их любом угловом относительном положении.

Механизмы характеризуются выполнением элемента одного из связываемых звеньев по поверхности, геометрически не препятствующей относительному движению последнего в обоих направлениях. Возможность движения в одном направлении устраняется силами трения на указанной (фрикционной) поверхности, возникающими при заклинивании промежуточных звеньев. Фрикционные поверхности звеньев с вращательным движением выполняются большей частью цилиндрическими, причем фрикционную поверхность предпочтительнее делать с внутренней стороны, так как это уменьшает габариты механизма и облегчает обработку обычно более сложной поверхности сопряженного звена.

Различают роликовые, кулачковые, колодочные и пружинные фрикционные храповые механизмы

Роликовые механизмы (фиг. 122, *а* и *б*) применяются главным образом в муфтах обгона и в бесступенчатых импульсных вариаторах. При назначении размеров механизма необходимо соблюдать неравенство

$$\alpha \leqslant 2\varphi,$$

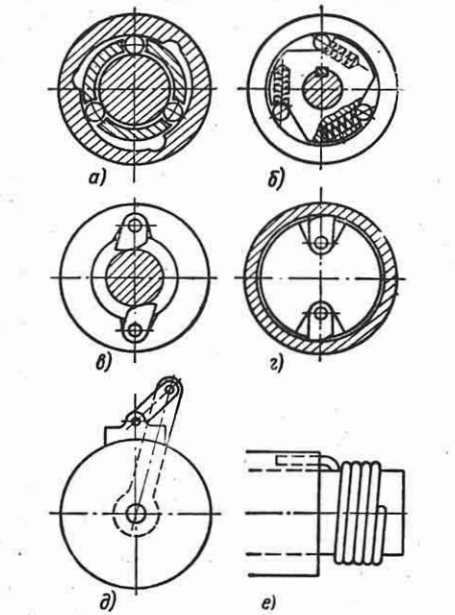
где α — см. фиг. 123; φ — меньший из углов трения между роликом и соприкасающимися с ним поверхностями.

Для случая по фиг. 123

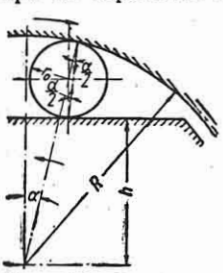
$$h = (R - r_0)\cos\alpha - r_0;\ \cos\alpha = \frac{h + r_0}{R - r_0}.$$

Обычно для муфт обгона принимают $\alpha \approx 7°$.

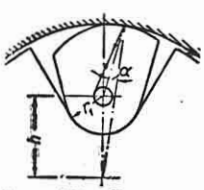
Храповые механизмы с кулачками или эксцентриками (фиг. 122, *в* и *е*) применяются, например, для зажима деталей при их обработке на станках.



Фиг. 122. Типы фрикционных храповых механизмов.



Фиг. 123. Основные размеры роликового храпового механизма.



Фиг. 124. Основные размеры кулачкового храпового механизма.

При назначении размеров этих механизмов необходимо соблюдать неравенство (фиг. 124)

$$\alpha \leqslant \varphi - \frac{4fr_1}{\pi r_{min}},$$

где φ — угол трения на фрикционной поверхности; f — коэффициент трения между кулачком и осью или гнездом; r_1 — радиус оси или опорной поверхности кулачка; r_{min} — наименьшая величина радиуса-вектора кулачка.

Колодочные механизмы (см. фиг. 122, *д*) имеют ограниченное применение. Они отличаются от всех остальных фрикционных храповых механизмов тем, что имеют контакт рабочих поверхностей по площади.

Пружинные фрикционные храповые механизмы (фиг. 122, *е*) пригодны для легких условий работы; они применяются, например, для закрепления валика рукоятки патефона.

Основной деталью механизма является витая пружина, прикрепленная своим концом к одному звену и посаженная с некоторым натягом на наружную поверхность другого звена.

Блокирующие механизмы

Блокирующие механизмы служат для предохранения машины от несовместимых включений или самовключений (например, от одновременного включения двух скоростей в коробке передач автомобиля, одновременного включения продольной и поперечной подач в обыкновенном токарном станке), а также от неправильной последовательности включений (например, от включения главного привода машины при невключенной системе смазки).

Блокирующие механизмы запирающего действия широко используются в устройствах управления (переключения).

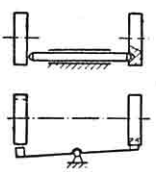
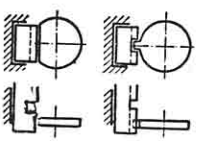
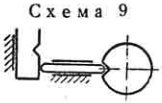
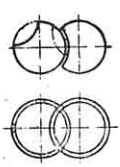
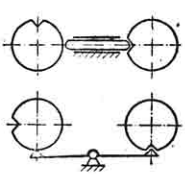
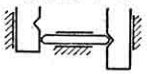
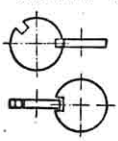
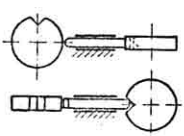
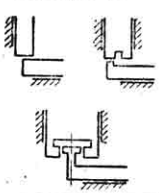
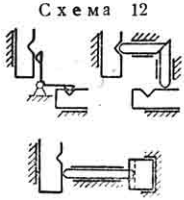
При двух блокируемых звеньях и малом расстоянии между ними промежуточных звеньев обычно не требуется. Каждое звено снабжается элементами двух запирающих кинематических пар. Когда оба звена находятся в блокируемых (средних) положениях, элементы не соприкасаются. При перемещении одного из звеньев в соприкосновение входят элементы пары, допускающей движение этого звена и препятствующей движению другого. Выполнение механизмов без промежуточных звеньев возможно при любом взаимном расположении блокируемых звеньев, кроме соосного для поворотных и параллельного для поступательно-перемещающихся. Классификация механизмов для блокирования двух звеньев приведена в табл. 15.

Первые варианты схем 2 и 8 (табл. 15) не обеспечивают двустороннюю фиксацию одного звена при всех положениях другого. Различные варианты схемы 11 дают одностороннюю фиксацию обоих звеньев, одностороннюю одного звена и двустороннюю другого, двустороннюю обоих звеньев.

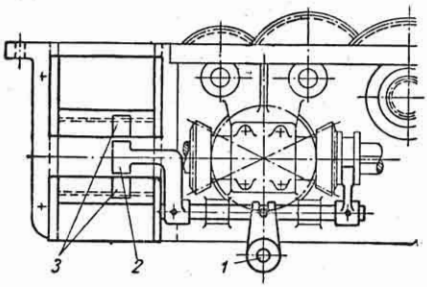
Пример выполнения блокирующего механизма в фартуке токарно-винторезного станка показан на фиг. 125. Механизм устраняет возможность одновременного включения подач от ходового валика и от ходового винта. Подача от ходового валика включается рукояткой, сидящей на валу *1* и связанной с блокирующим упором *2*, который препятствует замыканию сходящихся половинок гайки ходового винта при включенной подаче и не позволяет включить подачу при замкнутой гайке, когда блокирующие пазы *3* надвинуты на упор *2*.

Таблица 15

Блокирующие механизмы запирающего действия для двух звеньев

Примеры принципиальных схем		Примеры принципиальных схем	
Без промежуточных звеньев (расстояние между блокируемыми звеньями небольшое)	**С промежуточными звеньями типа фиксаторов** (расстояние между блокируемыми звеньями большое)	**Без промежуточных звеньев** (расстояние между блокируемыми звеньями небольшое)	**С промежуточными звеньями типа фиксаторов** (расстояние между блокируемыми звеньями большое)
Оба звена поворотные Оси поворота звеньев совпадают Схема 1 		*Одно звено поворотное, другое с прямолинейно-поступательным движением* Оси поворотных и направления перемещений поступательно движущихся звеньев параллельны Схема 6 	Схема 7
		Оси поворотных и направления перемещений поступательно движущихся звеньев перпендикулярны Схема 8 	Схема 9 
Оси поворота звеньев параллельны Схема 2 	Схема 3 	*Оба звена с прямолинейно-поступательным движением* Направления перемещений поступательно движущихся звеньев параллельны Схема 10 	
Оси поворота звеньев скрещиваются Схема 4 	Схема 5 	Направления перемещений поступательно движущихся звеньев перпендикулярны Схема 11 	Схема 12 

При большом расстоянии между блокируемыми звеньями механизмы выполняются с промежуточными звеньями, обычно в виде поступательно перемещающихся стержней-фиксаторов или поворотных рычагов-фиксаторов с конусными или клиновыми концами, входящими в соответствующие гнезда блокируемых звеньев (табл. 15).



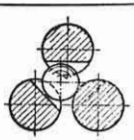
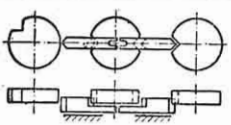
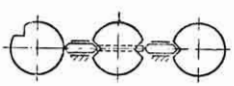
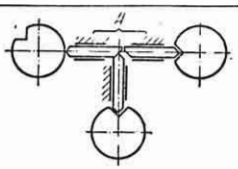
Фиг. 125. Блокирующий механизм в фартуке токарно-винторезного станка.

В табл. 16 приведены схемы механизмов для блокирования трех звеньев. Механизмы допускают перемещение одного из звеньев лишь при определенных положениях двух других.

Пример конструктивного выполнения механизма см. на фиг. 78, стр. 501.

Таблица 16

Блокирующие механизмы запирающего действия для трех звеньев

Характеристика устройства	Примеры принципиальных схем	Область возможного применения схемы
С одним промежуточным звеном		Пригодна для блокирования поступательно-перемещающихся звеньев в параллельных направлениях. При изменении формы промежуточного звена может быть использована для блокирования поворотных звеньев
С двумя промежуточными звеньями		Пригодна для блокирования поворотного звена (среднего на схеме) и двух поступательно перемещающихся или поворотных звеньев. Линии кратчайших расстояний между осью среднего звена и осью каждого крайнего звена должны пересекаться в одной точке оси среднего звена
С тремя промежуточными звеньями		Пригодна для блокирования поступательно-перемещающихся и поворотных звеньев. Оси звеньев должны помещаться в параллельных плоскостях, линии кратчайших расстояний между осями должны совпадать
		Пригодна для блокирования поступательно перемещающихся и поворотных звеньев. Линия кратчайшего расстояния между осями верхних (на схеме) звеньев и линия кратчайшего расстояния между указанной линией и осью нижнего звена должны пересекаться в зоне *A*

ЛИТЕРАТУРА И ИСТОЧНИКИ К ГЛАВАМ XIX И XX

1. Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, Гостехиздат, 1940, 1953.
2. Артоболевский И. И., Курс теории механизмов и машин, Гостехиздат, 1945.
3. Артоболевский И. И., Структура, кинематика и кинетостатика многозвенных плоских механизмов, Гостехиздат, 1939.
4. Артоболевский И. И., Механизмы (пособие для инженеров, конструкторов и изобретателей), изд. АН СССР, т. I, II и III, 1947—1951.
5. Артоболевский И. И., Блох З. Ш. и Добровольский В. В., Синтез механизмов, Гостехиздат, 1944.
6. Баранов Г. Г., Кинематика и динамика механизмов, Госэнергоиздат, ч. I, 1932; ч. II, 1938.
7. Бородачев Н. А., Обоснование методики расчета допусков и ошибок кинематических цепей, изд. АН СССР, 1943.
8. Бруевич Н. Г., Точность механизмов, Гостехиздат, 1946.
9. Вяхирев С. В., Автоматы и полуавтоматы, Машгиз, 1939.

10. Добровольский В. В., Система механизмов, Машгиз, 1943.
11. Добровольский В. В., Теория механизмов, Машгиз, 1951.
12. Доброгурский С. О., Соколов Р. А. и Захарова Е. И., Механизмы (справочное руководство). Машгиз, 1947.
13. Житков А. А., Методы и оборудование, применяемые в США для балансирования вращающихся деталей, „Американская техника и промышленность" № 9, 1947.
14. Зиновьев Вячеслав, Аналитические методы расчета плоских механизмов, Гостехиздат, 1949.
15. Калашников Н. А., Исследование зубчатых передач, Машгиз, 1941.
16. Кетов Х. Ф. и Колчин Н. И., Теория механизмов и машин, Машгиз, 1939.
17. Кобринский Н. Е., Кинематические и динамические ошибки плоских механизмов, „Известия АН СССР, Отделение технических наук", № 3, 1944, а также № 6, 1944 и № 2, 1946.
18. Кудинов В. А., Определение моментов инерции цилиндрических многоступенчатых деталей по чертежу, „Исследования в области металлорежущих станков", Машгиз, 1952.
19. Лапидус А. С., Данные по износу и методу повышения износостойкости направляющих металлорежущих станков. ЦБТИ, 1950.
20. Левит Г. А., Коэффициент полезного действия быстроходных станков и способы его повышения, ЦБТИ, 1950.
21. Малышев А. П., Кинематика механизмов, Гизлегпром, 1933.
22. Проников А. С., Новые методы кинематического проектирования кулачковых механизмов, „Вестник машиностроения" № 5, 1949.
23. Решетов Л. Н., Кулачковые механизмы, Машгиз, 1953.
24. Руденко Н. Ф., Планетарные передачи, Машгиз, 1947.
25. Скворцова Н. А., Внутреннее зубчатое эвольвентное зацепление при разности чисел зубьев колес, равной единице Труды семинара по теории механизмов и машин, т. VII, вып. 25, изд. АН СССР, 1949.
26. Труды семинара по теории машин и механизмов за 1947—1952 гг., изд. АН СССР.
27. Шаумян Г. А., Основы теории проектирования станков-автоматов и автоматических линий, Машгиз, 1949.
28. Элементы механизмов, Оборонгиз, 1944.
29. Энциклопедический справочник „Машиностроение", т. 2, главы I—IV, Машгиз, 1948 и 1951.
30. Энциклопедический справочник „Машиностроение", т. 9, гл. II и XIII, Машгиз, 1949.

ПРИЛОЖЕНИЕ*

МЕРЫ И ЕДИНИЦЫ

Приставки для образования кратных и дольных единиц измерения (по ГОСТ 7663-55)

Кратность и дольность	Приставки	Сокращенные обозначения		Кратность и дольность	Приставки	Сокращенные обозначения	
		русскими буквами	латинскими (греческими) буквами			русскими буквами	латинскими (греческими) буквами
10^{12}	тера . .	*Т*	T	10^{-1}	деци . .	*д*	d
10^{9}	гига . .	*Г*	*G*	10^{-2}	санти . .	*с*	c
10^{6}	мега . .	*М*	M	10^{-3}	милли . .	*м*	m
10^{3}	кило . .	*к*	*k*	10^{-6}	микро . .	*мк*	μ
10^{2}	гекто . .	*г*	*h*	10^{-9}	нано . .	*н*	n
10^{1}	дека . .	*да*	da	10^{-12}	пико . .	*п*	*p*

I. МЕЖДУНАРОДНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

1. Меры длины

Основная единица — метр

Название	Сокращенные обозначения		Величина	В степенях *см*	Отношение к основной единице	В старых русских мерах
	Русское	Латинское				
Микромикрон	—	mμ	0,001 μμ	10^{-10}	10^{-12}	
Миллимикрон	—	mμ	0,001 μ	10^{-7}	10^{-9}	
Микрон	*мк*	μ	0,000001 *м*=0,001 *мм*	10^{-4}	10^{-6}	
Ангстрем	Å	Å	0,0000001 *мм*	10^{-8}	10^{-10}	
Миллиметр	*мм*	mm	1000 μ; 1 000 000 000 μμ	10^{-1}	10^{-3}	0,39370 линии;
Сантиметр	*см*	cm	0,01 *м* = 10 *мм*	1	10^{-2}	0,46869 сотки ($^1/_{100}$ саж.) = = 0,22497 врш. = = 0,39370 дм.
Дециметр	*дм*	dm	0,1 *м* = 10 *см* = = 10^{2} *мм*	10	10^{-1}	2,24972 врш. = = 3,93701 дм.
Метр	*м*	m	100 *см* = 1000 *мм* 1 000 000 μ	10^{2}	1	0,46869 саж. = = 1,40607 арш. = = 22,1972 врш. = = 3,28084 фт. = = 39,37008 дм.
Километр	*км*	km	1000 *м*; 1 000 000 *мм*	10^{5}	10^{3}	0,937383 врс. = = 468,6915 саж.
Мириаметр	—	μm	10 *км* = 10 000 *м*	10^{3}	10^{4}	9,37383 врс.

* Литература и источники к приложению:
1. Энциклопедический справочник „Машиностроение", т. 1, кн. 1-я, Машгиз, 1947.
2. Краткий технический справочник ГГТИ, 1949.

Продолж. приложения

Название	Сокращенные обозначения: Русское	Сокращенные обозначения: Латинское	Величина	В степенях $см^2$	Отношение к основной единице	В старых русских мерах
2. Меры поверхности						
Квадратный миллиметр	*мм²*	mm²	0,000001 *м²*	10^{-2}	10^{-6}	0,15500 кв. лн.
„ сантиметр	*см²*	cm²	0,0001 *м²* = 100 *мм²*	1	10^{-4}	0,05061 кв. врш. = = 0,15500 кв. дм.
„ дециметр	*дм²*	dm²	0,01 *м²* = 100 *см²* = = 10 000 *мм²*	10^2	10^{-2}	5,06123 кв. врш. = = 15,500 кв. дм.
„ метр	*м²*	m²	10 000 *см²* = = 1 000 000 *мм²*	10^4	1	0,21967 кв. саж. = = 1,97704 кв. арш.
„ декаметр (ар)	*а*	a	100 *м²*	10^6	10^2	21,9672 кв. саж.
Квадратный гектометр (гектар)	*га*	ha	100 *а* = 10 000 *м²*	10^8	10^4	0,915299 дес.
Квадратный километр	*км²*	km²	1 000 000 *м²*	10^{10}	10^6	0,878687 кв. врс.
„ мириаметр	—	—	100 *км²*	10^{12}	10^8	
3. Меры объема и емкости						
Кубический миллиметр	*мм³*	mm³	0,000000001 *м³* = = 0,001 *см³*	10^{-3}	10^{-9}	0,06102 куб. лн.
„ сантиметр	*см³*	cm³	0,000001 *м³*	1	10^{-6}	0,01139 куб. врш.
„ дециметр	*дм³*	dm³	0,001 *м³* = = 1 000 000 *мм³* = 1 *л*	10^3	10^{-3}	11,3864 куб. врш. = = 61,0237 куб. дм.
„ метр (стер)	*м³*	m³	1000 *л* = 10 *гл*	10^6	1	0,102958 куб. саж. = =2,77987 куб. арш. = = 35,3147 куб. фт. = = 61023,7 куб. дм.
Килолитр	*кл*	kl	1000 *л*	10^6	10^3	2,033 бочки
Гектолитр	*гл*	hl	100 *л*	10^5	10^2	8,1305 ведра = = 0,476 четверти = = 3,811 четверика
Декалитр	*дкл*	dkl	10 *л*	10^4	10	0,813 ведра = =0,381 четверика = = 3,0489 гарнца
Литр	*л*	l	0,001 *м³* = 1000 *см³*	10^3	1	0,081 ведра = = 1,3009 вин. бут. = =1,6261 вод. бут. = = 0,3049 грн.
Децилитр	*дл*	dl	0,1 *л* = 100 *см³*	10^2	10^{-1}	0,813 чарки = = 0,008 ведра
Сантилитр	*сл*	cl	0,01 *л* = 10 *см³*	10^1	10^{-2}	
Миллилитр	*мл*	ml	0,001 *л* = 1 *см³*	1	10^{-3}	
Микролитр	—	—	0,000001 *л* = 1 *мм³*	10^{-3}	10^{-6}	
4. Меры веса						
Микрограмм	—	γ	0,000001 *Г* = 0,001 *мГ*	10^{-6}	10^{-9}	0,0000225 доли
Миллиграмм	*мГ*	mG	0,001 *Г* = 1000 γ	10^{-3}	10^{-6}	0,0225 доли
Сантиграмм	*сГ*	cG	0,01 *Г* = 10 *мГ*	10^{-2}	10^{-5}	0,225 доли
Дециграмм	*дГ*	dG	0,1 *Г* = 10 *сГ*	10^{-1}	10^{-4}	2,250 доли
Грамм	*Г*	G	10 *дГ* = 100 *сГ* = = 1000 *мГ*	1	10^{-3}	0,07814 лота = =0,23443 золотника = 22,50481 доли
Декаграмм	*дкГ*	dkG	10 *Г*	10^1	10^{-2}	2,3443 золотника
Гектограмм	*гГ*	hG	100 *Г*	10^2	10^{-1}	23,4425 золотника
Килограмм	*кГ*	kG	1000 *Г*	10^3	1	0,061048 пуда = = 2,441928 фунта = = 78,1417 лота
Центнер	*ц*	q	100 *кГ* = 100000 *Г*	10^5	10^2	6,1048 пуда
Тонна	*т*	t	1000 *кГ* = 10 *ц*	10^6	10^3	61,0482 пуда

II. СТАРАЯ РУССКАЯ СИСТЕМА МЕР

5. Меры длины

Основная единица — аршин

Название мер и единичные соотношения	Сокращенное обозначение	В метрических мерах
1 верста = 500 саженям	врс.	1,0668 *км*
1 сажень = 3 аршинам = 7 футам	саж.	2,13360 *м*
1 аршин = 16 вершкам = 28 дюймам	арш.	0,7112 *м* = 71,120 *см*
1 вершок = 1,75 дюйма	врш.	4,4450 *см* = 44,450 *мм*
1 фут = 12 дюймам	фт.	0,3048 *м* = 30,480 *см*
1 дюйм = 10 линиям	дм.	2,540 *см* = 25,4 *мм*
1 линия = 10 точкам	лн.	2,54 *мм*
1 точка	тчк.	0,254 *мм*
1 сотая часть сажени («сотка»)		2,134 *см*

6. Меры поверхности

1 кв. верста = 250 000 кв. саженям	кв. врс. = врс.^{2}	1,13806 *км*^{2}
1 десятина = 2400 кв. саженям	дес.	1,09254 *га* = 10925,4 *м*^{2}
1 кв. сажень = 9 кв. аршинам = 49 кв. футам	кв. с. = с.^{2}	4,55225 *м*^{2}
1 кв. аршин = 256 кв. вершкам	кв. а. = а.^{2}	0,505805 *м*^{2}
1 кв. вершок	кв. врш. = врш.^{2}	19,7580 *см*^{2}
1 кв. фут = 144 кв. дюймам	кв. фт. =фт.^{2}	9,2903 *дм*^{2} = 0,0929 *м*^{2}
1 кв. дюйм = 100 кв. линиям	кв. дм. =дм.^{2}	6,4516 *см*^{2}
1 кв. линия	кв. лн. =лн.^{2}	6,4516 *мм*^{2}

7. Меры объема

1 куб. сажень = 27 куб. аршинам = 343 куб. футам = 789,60 ведра = 46,266 четверти; вмещает 592,88 пуда воды[1]	куб. с.; с.^{3}	9,71268 *м*^{3}
1 куб. аршин = 4096 куб. вершкам = 21952 куб. дюймам	куб. а.; а.^{3}	0,35973 *м*^{3}
1 куб. вершок	куб. врш.; врш.^{3}	87,8244 *см*^{3}
1 куб. фут = 1728 куб. дюймам = 2,3020 ведра = = 1,07912 четверика, вмещает 69,140 фунта или 28,314 *кг* воды	куб. фт.; фт.^{3}	28,3168 *дм*^{3}
1 куб. дюйм = 1000 куб. линиям	куб. дм.; дм.^{3}	16,3871 *см*^{3}
1 куб. линия	лн.^{3}	16,3871 *мм*^{3}

[1] При наибольшей плотности (3,98° С).

8. Меры емкости (для жидкостей)

1 бочка = 40 ведрам	боч.	4,920 *гл*
1 ведро = 100 чаркам = 10 штофам = 20 пивным бутылкам = 16 винным бутылкам = =750,64 дм^3, вмещает 30,0343 фунта воды	в.	1,230 *дкл* = 12,2994 *л*
1 штоф = 1 кружке = 10 чаркам	шт.	1,230 *л*
1 чарка = 0,01 ведра = 2 шкаликам	—	0,123 *л*
1 винная или молочная бутылка = $^1/_{16}$ ведра	—	0,7687 *л*
1 водочная или пивная бутылка = $^1/_{20}$ ведра	—	0,6150 *л*
1 шкалик = $^1/_{200}$ ведра	—	0,0615 *л*

9. Меры емкости (для сыпучих тел)

1 четверть = 8 четверикам	чт.	2,0991 *гл*
1 четверик = 8 гарнцам = 1601,4 *дм*^{3}, вмещает 64,0731 фунта воды	чк.	2,6239 *дкл* = 26,2387 *л*
1 гарнец	грн.	3,2798 *л*

10. Меры веса

1 берковец = 10 пудам	бер.	0,164 *т* = 1,638 *ц*
1 пуд = 40 фунтам	п.	0,016 *т* = 0,164 *ц* = 16,3805 *кГ*
1 фунт = 32 лотам	фн.	0,40951241 *кГ* = 409,512*Г*
1 лот = 3 золотникам	л.	12,797 *Г*
1 золотник = 96 долям	з.	4,266 *Г*
1 доля = $^1/_{9216}$ фунта	дл.	44,435 *мГ*

III. АНГЛИЙСКАЯ СИСТЕМА МЕР

11. Меры длины

Основная единица — ярд

Название мер и единичные соотношения	Английское название	В метрических мерах
1 англ. миля = 1760 ярдам	statute mile	1,6093 *км*
1 ярд = 3 футам = 36 дюймам	yard	0,9144 *м*
1 фут = 12 дюймам = русскому футу	foot (ft)	0,3048 *м*
1 дюйм = русскому дюйму	inch (in)	2,5400 *см*
1 англ. морская миля = 6080 футам = 1,7371 врс.	nautical mile	1,8532 *км*
1 англ. морская сажень = 6 футам	fathom	1,8288 *м*
1 кабельтов = 0,1 морской мили	cable's length	185,3 *м*
1 цепь = 100 звеньям = 22 ярдам = 66 футам	chain	20,117 *м*

12. Меры поверхности

1 кв. англ. миля — 640 акрам	square mile	259 *га* = 2,58999 $км^2$
1 акр = 4840 кв. ярдам	acre	0,404686 *га*
1 кв. ярд = 9 кв. футам	square yard	0,8361 $м^2$
1 кв. фут = 144 кв. дюймам	square foot	9,290 $дм^2$
1 кв. дюйм	square inch	6,452 $см^2$

13. Меры объема

1 регистр. тонна = 100 куб. футам	register ton	2,832 $м^3$
1 куб. ярд = 27 куб. футам	cubic yard	0,764555 $м^3$
1 куб. фут = 1728 куб. дюймам	cubic foot	28,317 $дм^3$
1 куб. дюйм	cubic inch	16,387 $см^3$

14. Меры емкости

1 квартер = 64 галлонам = 8 бушелям	quarter	290,94 *л*
1 бушель = 8 галлонам	bushel	36,368 *л*
1 галлон = 4 квартам = 277,463 $дм^3$ = 0,3696 ведра = 7,39 бутылки	imperial gallon	4,546 *л*
1 кварта = 2 пинтам	quart	1,1365 *л*
1 пинта = 0,924 бутылки	pint	0,56825 *л*

15. Меры веса

1 англ. тонна = 20 центнерам	ton, long ton	1,0160470 *т*
1 центнер = 112 торг. фунтам	hundred weight	50,802352 *кГ*
1 фунт = 16 торг. унциям = 7000 англ. гранам	pound	0,45359 *кГ*
1 торг. унция = 16 драхмам	ounce	28,3495 *Г*
1 аптекарская унция = 8 апт. драхмам	—	31,103 *Г*
1 торг. драхма	dram	1,7718 *Г*
1 апт. драхма = 3 скрупулам = 60 гранам		3,888 *Г*
1 англ. гран = $^1/_{7000}$ торг. фн.	grain	64,7989 *мГ*

IV. АМЕРИКАНСКАЯ СИСТЕМА МЕР[1]

16. Перевод американских мер в метрические

Название мер и единичные соотношения	Американское название	В метрических мерах
1 амер. миля = 3 англ. милям	statute mile	4,828 *км*
1 тауншип = 86 кв. милям	township	93,236 $км^2$
1 (винный) галлон = 0,833 англ. галлона = = 4 квартам = 8 пинтам	gallon	3,787 *л*
1 сухой галлон	»	4,4046 *л*
1 баррель керосина = 42 галлонам	barrel	1,514 *гл*
1 баррель пива = 31 галлону	»	1,173 *гл*
1 малая тонна = 2000 англ. фунтам	short ton	0,907 *т*

[1] В США принята английская система с некоторыми изменениями, приводимыми здесь.

17. Дюймы в миллиметры

(через $^1/_{16}$ дюйма); 1 дюйм = 25,400 *мм*; 1 *мм* = 0,394 дюйма

Дюймы	0/0	1/16	1/8	2/16	1/4	5/16	6/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	6/4	13/16	7/8	15/16	Дюймы
0	0,000	1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,112	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812	0
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,512	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212	1
2	50,800	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,911	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611	2
3	76,200	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,311	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01	3
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41	4
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81	5
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21	6
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61	7
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01	8
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41	9
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81	10
11	279,40	280,98	282,57	284,16	285,74	287,33	288,92	290,51	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21	11
12	304,80	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61	12
13	330,20	331,78	333,37	334,96	336,54	338,13	339,72	341,31	342,89	344,48	346,07	347,66	349,24	350,83	352,42	354,01	13
14	355,60	357,18	358,77	360,36	361,94	363,53	365,12	366,71	368,29	369,88	371,47	373,06	374,64	376,23	377,82	379,41	14
15	381,00	382,58	384,17	385,76	387,34	388,93	390,52	392,11	393,69	395,28	396,87	398,46	400,04	401,63	403,22	404,81	15
16	406,40	407,98	409,57	411,16	412,74	414,33	415,92	417,50	419,09	420,68	422,27	423,85	425,44	527,03	428,62	430,20	16
17	431,80	433,38	434,97	436,55	438,14	439,73	441,32	442,90	444,49	446,08	447,67	449,25	450,84	452,43	454,02	455,60	17
18	457,20	458,78	460,37	461,95	463,54	465,13	466,72	468,30	469,89	471,48	473,07	474,65	476,24	477,83	479,42	481,00	18
19	482,60	484,18	485,77	487,35	488,94	490,53	492,12	493,70	495,29	496,88	498,47	500,05	501,64	503,23	504,82	506,40	19
20	508,00	509,58	511,17	512,75	514,34	515,93	517,52	519,10	520,69	522,28	523,87	525,45	527,04	528,63	530,22	531,80	20
21	533,40	534,98	536,57	538,15	539,74	541,33	542,92	544,50	546,09	547,68	549,27	550,85	552,44	554,03	555,61	557,20	21
22	558,80	560,38	561,96	563,55	565,14	566,73	568,31	569,90	571,49	573,08	574,66	576,25	577,84	579,43	581,01	582,60	22
23	584,20	585,78	587,36	588,95	590,54	592,13	593,71	595,30	596,89	598,48	600,06	601,65	603,24	604,83	606,41	608,00	23

продолжение

Дюймы	0/0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16	Дюймы
24	609,60	611,18	612,76	614,35	615,94	617,53	619,11	620,70	622,29	623,88	625,46	627,05	628,64	630,23	631,81	633,40	24
25	635,00	636,58	638,16	639,75	641,34	642,93	644,51	646,10	647,69	649,28	650,86	652,45	654,04	655,63	657,21	658,80	25
26	660,40	661,98	663,56	665,15	666,74	668,33	669,91	671,50	673,09	674,68	676,26	677,85	679,44	681,03	682,61	684,20	26
27	685,80	687,38	688,96	690,55	692,14	693,72	695,31	696,90	698,49	700,07	701,66	703,25	704,84	706,42	708,01	709,60	27
28	711,20	712,77	714,36	715,95	717,54	719,12	720,71	722,30	723,89	725,47	727,06	728,65	730,24	731,82	733,41	735,00	28
29	736,60	738,17	739,76	741,35	742,94	744,52	746,11	747,70	749,29	750,87	752,46	754,05	755,64	757,22	758,81	760,40	29
30	762,00	763,57	765,16	766,75	768,34	769,92	771,51	773,10	774,69	776,26	777,86	779,45	781,04	782,62	784,21	785,80	30
31	787,40	788,97	790,56	792,15	793,74	795,32	796,91	798,50	800,09	801,67	803,26	804,85	806,44	808,02	809,61	811,20	31
32	812,80	814,37	815,96	817,55	819,14	820,72	822,31	823,90	825,49	827,07	828,66	830,25	831,83	833,42	935,01	836,60	32
33	838,20	839,77	841,36	842,95	844,53	846,12	847,71	849,30	850,88	852,47	854,06	855,65	857,23	858,82	860,41	862,00	33
34	863,60	865,17	866,76	868,35	869,93	871,52	873,11	874,70	876,28	877,87	879,46	881,05	882,63	884,22	885,81	887,40	34
35	889,00	890,57	892,16	893,75	895,33	896,92	898,51	900,10	901,68	903,27	904,86	906,45	908,03	909,62	911,21	912,80	35
36	914,40	915,97	917,56	919,15	920,73	922,32	923,91	925,50	927,08	928,67	930,26	931,85	933,43	935,02	936,61	938,20	36
37	939,80	941,37	942,96	944,55	946,13	947,72	949,31	950,90	952,48	954,07	955,66	957,25	958,83	960,42	962,01	963,60	37
38	995,20	966,77	968,36	969,94	971,53	973,12	974,71	976,30	977,88	979,47	981,06	982,64	984,23	985,82	987,41	989,00	38
39	990,60	992,17	993,76	995,34	996,93	998,52	1000,1	1001,7	1003,3	1004,9	1006,5	1008,0	1009,6	1011,2	1012,8	1014,4	39
40	1016,0	1017,6	1019,2	1020,7	1022,3	1023,9	1025,5	1027,1	1028,7	1030,3	1031,9	1033,4	1035,0	1036,6	1038,2	1039,8	40
41	1041,4	1043,0	1044,6	1046,1	1047,7	1049,3	1050,9	1052,5	1054,1	1055,7	1057,3	1058,8	1060,4	1062,0	1063,6	1065,2	41
42	1066,8	1068,4	1070,0	1071,5	1073,1	1074,7	1076,3	1077,9	1079,5	1081,1	1082,7	1084,2	1085,8	1087,4	1089,0	1090,6	42
43	1092,2	1093,8	1095,4	1096,9	1098,5	1100,1	1101,7	1103,3	1104,9	1106,5	1108,1	1109,6	1111,2	1112,8	1114,4	1116,0	43
44	1117,6	1119,2	1120,8	1122,3	1123,9	1125,5	1127,1	1128,7	1130,3	1131,9	1133,5	1135,0	1136,6	1138,2	1139,8	1141,4	44
45	1143,0	1144,6	1146,2	1147,7	1149,3	1150,9	1152,5	1154,1	1155,7	1157,3	1158,9	1160,4	1162,0	1163,6	1165,2	1166,8	45
46	1168,4	1170,0	1171,6	1173,1	1174,7	1176,3	1177,9	1179,5	1181,1	1182,7	1184,3	1185,8	1187,4	1189,0	1190,6	1192,2	46
47	1193,8	1195,4	1197,0	1198,5	1200,1	1201,7	1203,3	1204,9	1206,5	1208,1	1209,7	1211,8	1212,8	1214,4	1216,0	1217,6	47
48	1219,2	1220,8	1222,4	1223,9	1225,5	1227,1	1228,7	1230,3	1231,9	1233,5	1235,1	1236,6	1238,2	1239,8	1241,4	1243,0	48
49	1244,6	1246,2	1247,8	1249,3	1250,9	1252,5	1254,1	1255,7	1257,3	1258,9	1260,5	1262,0	1263,6	1265,2	1266,8	1268,4	49
50	1270,0	1271,6	1273,2	1274,7	1276,3	1277,9	1279,5	1281,1	1282,7	1284,3	1285,9	1287,4	1289,0	1290,6	1292,2	1293,8	50

18. Доли дюйма в миллиметры

Доли дюйма	1/64	2/64	3/64	4/64	5/64	6/64	7/64	8/64	9/64	10/64
мм	0,40	1,19	1,99	2,78	3,57	4,37	5,16	5,95	6,75	7,54
Доли дюйма	21/64	22/64	23/64	24/64	25/64	26/64	27/64	28/64	29/64	30/64
мм	8,33	9,13	9,92	10,72	11,51	12,30	13,10	13,89	14,68	15,48
Доли дюйма	41/64	42/64	43/64	44/64	45/64	46/64	47/64	48/64	49/64	50/64
мм	16,27	17,07	17,86	18,65	19,45	20,24	21,03	21,83	22,62	23,42
Доли дюйма	61/64	62/64	1/32	2/32	3/32	4/32	5/32	6/32	7/32	8/32
мм	24,21	25,00	0,79	2,33	3,97	5,56	7,14	8,73	10,32	11,91
Доли дюйма	17/32	18/32	19/32	20/32	21/32	22/32	23/32	24/32	25/32	26/32
мм	13,49	15,08	16,67	18,26	19,84	21,43	23,02	24,61	1,59	3,18
Доли дюйма	5/16	6/16	7/16	8/16	9/16	10/16	11/16	12/16	13/16	14/16
мм	7,94	11,11	14,29	17,46	20,64	23,81	3,18	9,53	15,88	22,23
Доли дюйма	1	3/4	1/2	1/4						
мм	25,40	19,05	12,70	6,35						

19. Миллиметры в дюймы

мм	Дюймы	мм	Дюймы	мм	Дюймы	мм	Дюймы	мм	Дюймы
0,01	0,0004	0,1	0,0039	1	0,0394	10	0,394	100	3,937
0,02	0,0008	0,2	0,0079	2	0,0787	20	0,787	200	7,874
0,03	0,0012	0,3	0,0118	3	0,1181	30	1,181	300	11,811
0,04	0,0016	0,4	0,0158	4	0,1575	40	1,575	400	15,748
0,05	0,0020	0,5	0,0197	5	0,1969	50	1,969	500	19,685
0,06	0,0024	0,6	0,0236	6	0,2362	60	2,362	600	23,622
0,07	0,0028	0,7	0,0276	7	0,2756	70	2,756	700	27,559
0,08	0,0032	0,8	0,0315	8	0,3150	80	3,150	800	31,496
0,09	0,0035	0,9	0,0354	9	0,3543	90	3,543	900	35,433

20. Футы в метры

Футы	м	Футы	м	Футы	м	Футы	м
1	0,3048	18	5,4864	35	10,668	52	15,850
2	0,6096	19	5,7911	36	10,973	53	16,154
3	0,9144	20	6,0960	37	11,278	54	16,459
4	1,2192	21	6,4007	38	11,582	55	16,764
5	1,5240	22	6,7055	39	11,887	56	17,069
6	1,8288	23	7,0103	40	12,192	57	17,374
7	2,1336	24	7,3151	41	12,497	58	17,678
8	2,4384	25	7,6199	42	12,802	59	17,983
9	2,7432	26	7,9247	43	13,106	60	18,288
10	3,0480	27	8,2295	44	13,411	61	18,593
11	3,3528	28	8,5343	45	13,716	62	18,897
12	3,6576	29	8,8391	46	14,021	63	19,202
13	3,9624	30	9,1440	47	14,326	64	19,507
14	4,2672	31	9,4497	48	14,630	65	19,812
15	4,5720	32	9,7537	49	14,935	66	20,117
16	4,8768	33	10,058	50	15,240	67	20,421
17	5,1816	34	10,363	51	15,545	68	20,726

Продолжение

Футы	м	Футы	м	Футы	м	Футы	м
69	21,031	77	23,469	85	25,908	93	28,346
70	21,336	78	23,774	86	26,213	94	28,751
71	21,641	79	24,079	87	26,517	95	28,956
72	21,945	80	24,384	88	26,822	96	29,261
73	22,250	81	24,689	89	27,127	97	29,576
74	22,555	82	24,993	90	27,432	98	29,870
75	22,860	83	25,298	91	27,737	99	30,175
76	23,165	84	25,603	92	28,042	100	30,480

21. Ярды в метры

Ярды	м	Ярды	м	Ярды	м	Ярды	м
1	0,91438	11	10,05822	21	19,20205	31	28,34589
2	1,82877	12	10,97260	22	20,11643	32	29,26027
3	2,74315	13	11,88698	23	21,03082	33	30,17415
4	3,65753	14	12,80137	24	21,94520	34	31,08904
5	4,59192	15	13,71576	25	22,85959	35	32,00342
6	5,48630	16	14,63014	26	23,77397	36	32,91780
7	6,40068	17	15,54452	27	24,68835	37	33,83219
8	7,31507	18	16,45890	28	25,60274	38	34,74657
9	8,22945	19	17,37329	29	26,51712	39	35,66096
10	9,14383	20	18,28767	30	27,43150	40	36,57534

22. Метры и футы в ярды

м	Футы	Ярды	м	Футы	Ярды	м	Футы	Ярды
1	3,281	1,094	10	32,808	10,936	100	328,08	109,361
2	6,562	2,187	20	65,617	21,872	200	656,17	218,722
3	9,843	3,281	30	98,425	32,808	300	984,25	328,083
4	13,123	4,374	40	131,234	43,844	400	1312,34	437,444
5	16,404	5,468	50	164,042	54,681	500	1640,42	546,805
6	19,685	6,562	60	196,850	65,617	600	1968,50	656,166
7	22,966	7,655	70	229,659	76,553	700	2296,59	765,527
8	26,247	8,749	80	262,467	87,489	800	2624,67	874,888
9	29,528	9,842	90	295,276	98,425	900	2952,76	984,249
						1000	3280,90	1093,61

23. Сводная таблица перевода линейных мер

	1 *мм* равен	1 *см* равен	1 *м* равен	1 *км* равен
мм	1	10	10^3	10^6
см	10^{-1}	1	10^2	10^5
м	10^{-3}	10^{-2}	1	10^3
км	10^{-6}	10^{-5}	10^{-3}	1

Продолжение

	1 *мм* равен	1 *см* равен	1 *м* равен	1 *км* равен
Вершков	0,0224972	0,224972	22,4972	22497,2
Аршин	0,00140607	0,0140607	1,40607	1406,07
Саженей	$46870 \cdot 10^{-8}$	0,0046870	0,46870	468,696
Верст	$9373,8 \cdot 10^{-10}$	$93738 \cdot 10^{-10}$	$93738 \cdot 10^{-8}$	0,93738
Точек	3,937008	39,37008	3937,008	3937008
Линий	0,3937008	3,937008	393,7008	393700,8
Дюймов	0,03937008	0,3937008	39,37008	39370,08
Футов	0,0032008	0,032808	3,2808	3280,84
Ярдов	0,0010936	0,010936	1,0936	1093,61

	1 верш. равен	1 арш. равен	1 саж. равна	1 верста равна	1 точка равна
мм	44,450	711,20	2133,60	1066800	0,2540
см	4,44450	71,120	213,360	106680,0	0,02540
м	0,04445	0,71120	2,13360	1066,800	$254 \cdot 10^{-6}$
км	$4445 \cdot 10^{-8}$	$7112 \cdot 10^{-7}$	$21336 \cdot 10^{-7}$	1,066800	$254 \cdot 10^{-9}$
Вершков	1	16	48	24000	0,00571429
Аршин	0,06250	1	3	1500	$35714 \cdot 10^{-8}$
Саженей	0,020833	0,333333	1	500	$119047 \cdot 10^{-9}$
Верст	$4167 \cdot 10^{-8}$	$6667 \cdot 10^{-7}$	0,0020	1	$238 \cdot 10^{-9}$
Точек	175	2800	8400	4200000	1
Линий	17,5	280	840	420000	0,1
Дюймов	1,750	28	84	42000	0,01
Футов	0,14583	2,33333	7	3500	$8333 \cdot 10^{-7}$
Ярдов	0,0486	0,777778	2,33333	1166,6666	$2778 \cdot 10^{-7}$

	1 линия равна	1 дюйм равен	1 фут равен	1 ярд равен
мм	2,540	25,40	304,800	914,40
см	0,2540	2,540	30,4800	91,440
м	0.00254	0,0254	0,30480	0,91440
км	$254 \cdot 10^{-8}$	$254 \cdot 10^{-7}$	$3048 \cdot 10^{-7}$	$9144 \cdot 10^{-7}$
Вершков	0,0571429	0,571429	6,857136	20,571429
Аршин	0,0035714	0,035714	0,428571	1,285714
Саженей	0,00119047	0,0119047	0,142857	0,428571
Верст	$238 \cdot 10^{-8}$	$238 \cdot 10^{-7}$	$2857 \cdot 10^{-7}$	$8571 \cdot 10^{-7}$
Точек	10	100	1200	3600
Линий	1	10	120	360
Дюймов	0,1	1	12	36
Футов	0,008333	0,083333	1	3
Ярдов	0,002778	0,02778	0,33333	1

24. Сводная таблица перевода квадратных и кубических мер

Квадратных мер →

	Кв. саж.	Кв. аршин	Кв. верш.	Кв. фут	Кв. дюйм	*Кв. м*	*Кв. см*	*Кв. мм*	
Куб. саж.	1	9	2304	49	7056	4,55	$4{,}55 \cdot 10^4$	$4{,}55 \cdot 10^6$	1 кв. саж. равна
Куб. арш.	27	1	256	5,44	784	0,506	5058	$50{,}58 \cdot 10^3$	1 кв. арш. равен
Куб. верш.	$11{,}06 \cdot 10^4$	4096	1	0,021	3,06	0,00198	19,76	1976	1 кв. верш. равен
Куб. фут.	343	12,7	0,0031	1	144	0,0929	929	$929 \cdot 10^2$	1 кв. фут. равен
Куб. дюйм.	$59{,}27 \cdot 10^4$	$2{,}2 \cdot 10^4$	5,36	1728	1	0,000645	6,45	645	1 кв. дюйм равен
Куб. м	9,7127	0,36	$8{,}78 \cdot 10^{-5}$	0,0283	0,0000164	1	10^4	10^6	1 *кв. м* равен
Куб. см	$9{,}7127 \cdot 10^6$	$36 \cdot 10^4$	87,8	$283 \cdot 10^2$	16,4	10^6	1	10^2	1 *кв. см* равен
Куб. мм	$9{,}7127 \cdot 10^9$	$36 \cdot 10^7$	$8{,}78 \cdot 10^3$	$283 \cdot 10^5$	$164 \cdot 10^2$	10^9	10^3	1	1 *кв. мм* равен
	1 куб. саж. равна	1 куб. арш. равен	1 куб. верш. равен	1 куб. фут равен	1 куб. дюйм равен	1 *куб. м* равен	1 *куб. см* равен	1 *куб. мм* равен	

↑ → Кубических мер

25. Английские фунты в килограммы и обратно

кГ или английские фунты	Английские фунты	*кГ*	*кГ* или английские фунты	Английские фунты	*кГ*	*кГ* или английские фунты	Английские фунты	*кГ*
1	2,2046	0,4536	18	39,6832	8,1647	55	121,2542	24,9476
2	4,4092	0,9072	19	41,8878	8,6182	60	132,2773	27,2155
3	6,6139	1,3608	20	44,0924	9,0718	65	143,3004	29,4835
4	8,8185	1,8144	21	46,2970	9,5254	70	154,3236	31,7515
5	11,0231	2,2680	22	48,5017	9,9790	75	165,3466	34,0194
6	13,2277	2,7216	23	50,7063	10,4326	80	176,3698	36,2874
7	15,4324	3,1751	24	52,9109	10,8862	90	198,4160	40,8233
8	17,6370	3,6287	25	55,1155	11,3398	100	220,4622	45,3593
9	19,8416	4,0823	26	57,3202	11,7834	200	440,9245	90,7185
10	22,0462	4,5359	27	59,5248	12,2470	300	661,3867	136,0777
11	24,2508	4,9895	28	61,7294	12,7006	400	881,8489	181,4370
12	26,4554	5,4431	29	63,9340	13,1542	500	1102,3115	226,7962
13	28,6601	5,8967	30	66,1387	13,6078	600	1322,7734	272,1555
14	30,8647	6,3503	35	77,1617	15,8757	700	1543,2356	317,5147
15	33,0693	6,8039	40	88,1849	18,1437	800	1763,6978	362,8739
16	35,2739	7,2575	45	99,2079	20,4117	900	1984,1601	408,2332
17	37,4886	7,7111	50	110,2311	22,6796	1000	2204,6223	453,5924

26. Сводная таблица перевода весов

	Килограмм	Грамм	Пуд	Фунт	Лот	Золотник	Английский фунт
1 *кГ* равен	1	1000	0,061	2,44	78	234	2,20
1 *Г* равен	0,001	1	0,000061	0,00244	0,078	0,234	0,0022
1 п. равен	16,38	16380	1	40	1280	3840	36
1 ф. равен	0,4095	409,5	0,025	1	32	96	0,9
1 лот равен	0,01280	12,80	0,00078	0,0312	1	3	0,0282
1 зол. равен	0,00427	4,27	0,00026	0,0104	0,333	1	0,0094
1 англ. ф. равен	0,454	454	0,02769	1,11	35,4	106,3	1

27. Соотношения между различными единицами давления

Единица давления	Обозначения: русские	Обозначения: международные	Техническая атмосфера	Бар	Пьеза	Гектопьеза	*мм* рт. ст.	*м* вод. ст.	Физическая атмосфера	Англ. фунт/кв. дюйм	Тонна/кв. дюйм
Килограмм на квадратный сантиметр или атмосфера техническая	*кГ/см²* *at*	kG/*cm²* *at*	1,0000	$9{,}81 \cdot 10^5$	98,0665	0,98067	735,56	10,000	0,96784	14,223	$6{,}3498 \cdot 10^{-3}$
Бар	*б*	*b*	$1{,}0917 \cdot 10^{-6}$	1,0000	0,0001	10^{-6}	0,00075	$1{,}0197 \cdot 10^{-5}$	$0{,}987 \cdot 10^{-6}$	$14{,}5 \cdot 10^{-6}$	$6{,}475 \cdot 10^{-9}$
Пьеза	*пз*	*pz*	$1{,}0197 \cdot 10^{-2}$	10 000	1,0000	0,01000	7,5006	0,10197	0,009869	0,1450	$6{,}475 \cdot 10^{-5}$
Гектопьеза	*гпз*	*hpz*	1,01972	$1 \cdot 10^6$	100,00	1,00000	750,06	10,1972	0,98692	14,504	$6{,}475 \cdot 10^{-3}$
Миллиметр ртутного столба	*мм* рт. ст.	*mm* Hg	0,00136	13 332	0,13332	0,00133	1,0000	0,0136	0,00132	0,01934	$8{,}6326 \cdot 10^{-6}$
Метр водяного столба	*м* вод. ст.	*m* H_2O	0,10000	98 066	9,8066	0,09807	73,556	1,0000	0,09678	1,4223	$6{,}3496 \cdot 10^{-4}$
Физическая атмосфера	*атм*	*atm*	1,0332	$1{,}013 \cdot 10^6$	101,325	1,01325	760,00	10,332	1,0000	14,696	$6{,}561 \cdot 10^{-3}$
Английский фунт на квадратный дюйм	фунт/кв. дюйм	*lbs/sq. in.*	0,07031	68 947	6,8947	0,06895	51,715	0,70306	0,06805	1,0000	$4{,}464 \cdot 10^{-4}$
Тонна на квадратный дюйм	*т*/кв. дюйм	*t/sq. in.*	157,485	$1544 \cdot 10^5$	15444,3	154,443	11584,0	1574,85	152,420	2240	1,0000

28. Соотношения между энергетическими единицами

Единицы	Абсолютный килоджоуль	Интернациональный килоджоуль	Интернациональная килокалория	Килокалория Национального Бюро Стандартов США	Килокалория 20° (ОСТ)	Килокалория 15°	Интернациональный киловатт-час	Килограммометр	Сило-час
Абсолютный килоджоуль	1	0,99981	0,23884	0,23900	0,23912	0,23890	$2{,}772 \cdot 10^{-4}$	101,972	$3{,}7767 \cdot 10^{-4}$
Интернациональный килоджоуль	1,00019	1	0,23889	0,23905	0,23917	0,23895	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	101,991	$3{,}7774 \cdot 10^{-4}$
Интернациональная килокалория	4,18685	4,18605	1	1,00066	1,00116	1,00026	$1{,}1628 \cdot 10^{-3}$	426,94	$1{,}5813 \cdot 10^{-3}$
Килокалория Национального Бюро Стандартов США	4,18409	4,18330	0,99934	1	1,00050	0,99959	$1{,}1620 \cdot 10^{-3}$	426,66	$1{,}5802 \cdot 10^{-3}$
Килокалория 20° (ОСТ)	4,182	4,18121	0,99884	0,99950	1	0,99909	$1{,}1614 \cdot 10^{-3}$	426,45	$1{,}5794 \cdot 10^{-3}$
Килокалория 15°	4,18580	4,18500	0,99975	1,00041	1,00091	1	$1{,}1625 \cdot 10^{-3}$	426,83	$1{,}5809 \cdot 10^{-3}$
Интернациональный киловатт-час	3600,68	3600,00	860,00	860,56	860,99	860,21	1	36767	1,3599
Килограммометр	$9{,}80665 \cdot 10^{-3}$	$9{,}80479 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3423 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3438 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3450 \cdot 10^{-3}$	$2{,}3428 \cdot 10^{-3}$	$2{,}7236 \cdot 10^{-6}$	1	$3{,}7037 \cdot 10^{-6}$
Сило-час	2647,80	2647,30	632,41	632,83	633,14	632,57	0,73536	270 000	1

Примечание. В качестве единицы измерения количества тепла в СССР принята 20-градусная большая калория (*ккал*), которая практически (с точностью до 0,02%) равна количеству тепла, необходимому для нагревания 1 *кГ* воды от 19,5 до 20,5° С при нормальном атмосферном давлении (ОСТ ВКС 6259).

ПРЕДМЕТНЫЙ АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абак Декарта 315
Абразивный износ механизмов 439
Абсолютная погрешность предельная 65
Абсциссы 238, 249
Адъюнкты 115
Алгебра векторная 226
Алгебраические уравнения 118
— Решение приближенное по методу Лобачевского 129
Алгебраические функции 90
Алфавит греческий 5
—— латинский 5
Альтернирование тензора 236
Американские меры — Перевод в метрические 536
Амплитуда колебаний 98
Анализ векторный 230
—— гармонический 312
Аналитическая геометрия 238—257
—— в пространстве 249
—— на плоскости 238
Аналитическая статика 366
Аналитические функции — Вычеты 200
— Разложение в степенные ряды 197
Аналитическое выражение функций приближенное 305—313
Английская система мер 536
Английские фунты — Перевод в килограммы 542
Антилогарифмирование 78
Аполлония теорема 243
Аппаратура измерительная 415
Аппликаты 249
Арифметическая прогрессия 80
Арифметические действия основные 63
Арифметические ряды 1-го порядка 80
—— порядка выше 1-го 81
Арифмометры 340
Арккосинус 99
Арксинус 99
Арктангенс 99
Архимеда спираль 274, 275
Архимедовы винтовые поверхности 299
Асимптоты 261
—— гиперболы 245
Астроида 281
Аффикс 84
Аффинные ортогональные тензоры — см. *Тензоры*

Б

Балансировка деталей статическая 422
Балансировочные машины — Схемы 424
Бернулли теорема 329
—— уравнение 208
Бесселевы функции 58, 222, 223, 311
Бесселя уравнение 221
—— формула 303
Биквадратные уравнения 121
Бином Ньютона 74—76
Биномиальные ряды 152
Биномиальный закон распределения вероятности 323
Биномиальный коэффициент — Вычисление 74
— Нахождение 75, 80
— Таблицы 40
Биномы дифференциальные — Интегрирование 161
Бинормали 284
Биссектрисы углов, образованных двумя прямыми — Уравнения 242
Блокирующие механизмы — см. *Механизмы блокирующие*
Бочки — Объем 111
Бэта-функция 178

В

Валлиса формула 136
Вариаторы планетарные 511
Вейерштрасса признак 177
Вектор-функции линейные 236
Векторная алгебра 226
Векторно-векторное произведение 229
Векторное исчисление 226—234
Векторное поле 231—234
Векторные линии 231
Векторные потенциалы 234
Векторные проекции 227
Векторные уравнения 230
—— плоскости 251
Векторные функции 230
Векторный анализ 230
Векторы 226 — см. также *Векторная алгебра*
— Вихри 233
— Вычитание 227
— Годографы 230

— Дивергенция 232
— Интегралы линейные 233
— Проекция 227
— Произведения 228, 229
— Расхождение 232
— Сложение 227, 228
— Уравнения 230
— Циркуляция 233
Векторы Дарбу 292
—— коллинеарные 226
—— компланарные 227
—— кручения 284
—— скорости во вращательном движении 229
—— скорости вращения трехгранника 292
Величины бесконечно большие 135
—— бесконечно малые 135
—— обратные чисел 12
—— ограниченные 134
—— постоянные — Таблицы 6
—— случайные 322; — Ожидание математическое 326; — Отклонения 327; — Распределение 323
Веревочные кривые 366
Веревочные многоугольники 364, 365
Вероятностные характеристики 326
Вероятность — Распределение — Таблица 322; — Теория 321—335
—— статистическая 324
Вероятные ошибки 331
Вершина кривой 268
Вещественные числа — Действия 62
Винтовое движение 377
Винтовые колеса 496
Винтовые линии 286, 289
Винтовые механизмы — см. *Механизмы винтовые*
Винтовые пары — см. *Пары винтовые*
Винтовые поверхности 298, 299
Винты 286, 287
—— механизмов винтовых с соосным расположением пар 491
Вихри вектора 233
Вогнутость кривых 264
Возвратные уравнения третьей степени 120
—— четвертой степени 121
Волновые уравнения 225
Восьмизвенные кривошипно-кулисные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-кулисные восьмизвенные*
Вращение вокруг неподвижной оси 376
—— твердых тел 396
—— трехгранника — Вектор скорости 292
Выкрашивание усталостное 439
Выпрямляемость абака Декарта — Условие 315
Выпуклость кривых 264
Вычерчивание кривой 265
Вычеты аналитических функций 200
Вычисления — Оценка точности 66
—— подходящих дробей 72
—— приближенные 67
—— с малыми числами 69
—— с числами, мало отличающимися от единицы 69
—— элементов фигур 102—114
Вычислительные машины 343, 347, 348
Вычитание на арифмометре 340
—— на вычислительных машинах 344, 347

Г

Гайки винтовых механизмов с соосным расположением пар 491
Гамма-функция 178
— Таблицы 41
Гармонические функции 234
Гармонический анализ 312
Гармонический ряд 149
Гармонический синтез 313
Гаусса закон 323
—— формулы 183
Геликоиды 294, 298
Геодезическая кривизна поверхности 296
Геодезические линии на поверхности 296
Геометрическая прогрессия 80, 81
Геометрическая статика 352
Геометрические места — Уравнения 240
Геометрическое значение уравнения 239
Геометрия — Приложение интегрального исчисления 189
—— аналитическая 238—257
—— аналитическая в пространстве 249
—— аналитическая на плоскости 238
—— дифференциальная 258—300
Гиперболические параболоиды 256, 257
Гиперболические спирали 262, 276
Гиперболические точки поверхности 296
Гиперболические уравнения 122
Гиперболические функции — см. *Функции гиперболические*
Гиперболические цилиндры — Уравнения 256
Гиперболоиды — Уравнения 256
—— однополостные 257
Гиперболы — Построение 248; — Уравнения параметрические 246; — Элементы 244, 245, 248
—— равнобочные 246
—— сопряженные 245
Гипоидные колеса 496
Гипоциклоиды 281
Гипоциклоиды-рулетты 280
Гироскопический момент 399
Гироскопический эффект 399

Гироскопы 398
Гистограмма распределения 325
Годограф вектора 230
Головки зубьев эвольвентных зацеплений 493
Голоморфные функции 198
Гоммеля редукторы 508
Гониометрия 94
Градиенты скалярных функций 231
Градусная мера — Перевод в радианную 39
Графики бесселевых функций 222, 223
—— движения точки 371
—— обратных тригонометрических функций 99
—— полиномов Чебышева 224
—— синусоидальных величин — Построение 97
—— тригонометрических функций 88—91, 94, 99, 101; — Построение 97, 98
Графическое интегрирование 183, 211, 516
Графостатика 364
Греческий алфавит 5
Гульдена — Паппа теорема 364
Гуляева редукторы 507
Гюльдена правила 111

Д

Давление на соприкасающихся поверхностях удельное 442
Даламбера признак сходимости и расходимости рядов 150
—— принцип 387, 391
Даламбера-Эйлера условия 196
Дарбу вектор 292
Датчики 415
—— электрические 416
Движение — Устойчивость 392
—— винтовое 377
—— вращательное — Кинематика — Формулы 376
—— машины — Характерные периоды 425
—— твердых тел 379, 381
—— твердых тел около неподвижной точки 398; — Уравнения 401
—— твердых тел плоско-параллельное 377, 398
Движение точки — График 371
—— криволинейное 372, 374, 384
—— относительное 374, 388
—— переменной массы 385
—— прямолинейное 369, 370, 384
Двойные интегралы 184
Двойные ряды 312
Двухкулисные механизмы — см. *Механизмы двухкулисные*
Двухползунные механизмы — см. *Механизмы двухползунные*
Декарта абак 315
Декартовы координаты — см. *Координаты прямоугольные*
Деление на арифмометре 341
—— на вычислительных машинах 345, 347
—— на логарифмической линейке 338
—— отрезка в данном отношении 238
—— сокращенное 69
Делители наименьшие чисел 9
Делительные окружности 493
Детали — Балансировка статическая 422
—— механизмов — Износ 438
Диаграммы кинетической энергии механизма — Построение 426
—— распределения мощности сил трения по поверхностям 441
—— удельного скольжения 442
Дивергенция вектора 232
—— потенциального поля 234
Динамика 382
—— механизмов и машин 424
—— системы 388
—— тела переменной массы 399
—— твердых тел 396
—— точки 383, 386
Директриссы гиперболы 243, 244
—— эллипсов 243
Дирихле теорема 306
Дискриминант 147
—— квадратного трехчлена 88
Дискриминантная кривая 268
Дифференциалы полные 144, 145
—— функций 138, 139, 145
Дифференциальная геометрия 258—300
Дифференциальное исчисление 134—153
Дифференциальные биномы — Интегрирование 161
Дифференциальные зубчатые механизмы — см. *Механизмы зубчатые дифференциальные*
Дифференциальные уравнения 206—225
— Решения приближенные 211
— Системы 213
— Способ последовательных решений 211
Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах 208
—— в частных производных 224
—— вращения 396
—— высших порядков 213
—— криволинейного движения точки 384
—— линейные 215, 217
—— неоднородные 216
—— обыкновенные высших порядков 213
—— однородные 207

—— 1-го порядка 208; — Система 214
—— 1-го порядка обыкновенные 206
—— приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами 216
—— прямолинейного движения точки 384
—— с разделенными переменными 207
Дифференциальные функции распределения вероятности 322
Дифференцирование — Формулы 139
—— графическое 143
—— графическое диаграмм кулачковых механизмов 516
—— неявных функций 146
—— определенного интеграла по параметру 174
—— функций 139
—— функций комплексного переменного 196
—— функций многих переменных 143
—— численное 304
Дроби 62
—— десятичные 62; — Изменения от перенесения запятой 64; — Обращение в непрерывные 71
—— непрерывные 71
—— непрерывные конечные — Приближенные значения 73
—— непрерывные цепные 71
—— обыкновенные — Действия 64
—— периодические 62; — Обращение в простые 64
—— подходящие — Вычисление 72
—— простые 62; — Обращение в десятичные 64
—— смешанные 62
Дробнолинейные функции 90
Дуги — Длина 37, 39, 190, 259, 283
—— зацепления 493
—— окружности — Длина в градусах — Перевод в радианы 39; — Спрямление 281
—— пространственных кривых — Длина 283
Дюймы — Перевод в миллиметры 537, 539

Е

«e» — Основание натуральных логарифмов 135
— Таблицы величин, связанных с «e» 7
Единицы — Системы 383
—— давления — Перевод одних в другие 543
—— механические 382
—— энергетические — Перевод одних в другие 544
Ермакова признак сходимости рядов 150

Ж

«g» («ж») ускорение силы тяжести 372, 383 — Таблицы величин, связанных с «g» 8
Жироскопы — см. *Гироскопы*
Жордана лемма 201
Жуковского теорема 421
—— функция 205
Жуковского-Грюэ правило 399

З

Задирание деталей механизмов 439
Закон Гаусса 323
—— Кулона 357
—— Ньютона 1-й 383
—— Ньютона 2-й 383, 386
—— Ньютона 3-й 383
—— биномиальный распределения вероятности 323
—— больших чисел 328
—— всемирного тяготения 384
—— действия и противодействия 383
—— инерции 383
—— независимости действия сил 384
—— об ускорении и силе 383
—— распределения случайной величины 322
—— сохранения механической энергии 387
Законы арифметических действий 63
—— трения 434
Затылование зубьев фасонных фрез — Применение логарифмической спирали 276
Зацепления зубчатые 493; — Момент трения 437
—— цевочные 495
—— циклоидальные 494
—— эвольвентные 493
Зубчатые зацепления — см. *Зацепления зубчатые*
Зубчатые механизмы — см. *Механизмы зубчатые*
Зубчатые пары 495, 511, 513
Зубчатые передачи 495
—— конические 496
—— переключаемые 501, 502
—— плоско-цилиндрические 496
Зубчатые храповые механизмы — см *Механизмы храповые зубчатые*
Зубья эвольвентные — Корригирование 494

И

Извлечение квадратных корней на арифмометре 341
—— на логарифмической линейке 377
—— сокращенное 69

Извлечение кубических корней на логарифмической линейке 337
Измерительная аппаратура 415
Износ — Распределение по поверхности трения 440
—— абразивный 439
—— деталей в механизмах 438, 443
—— коррозионный 439
Изогональная траектория 271
Изоклины 211
Изолированные точки кривой 263
Импульс силы 386
—— ударный 402
Инварианты 247
Инверсоры 466
—— Липкина 466
Интеграл Стильтьеса — Вычисление 192
—— Фурье 308
Интегралы — Среднее значение — Теорема 173
—— Эйлера 178
—— вероятностей 324
—— двойные 184
—— кратные 184
—— криволинейные 186
—— линейные вектора 233
—— неопределенные — Свойства 154; — Связь с определенными 173; — Таблицы 154, 165
—— несобственные 174; — Главное значение 177; — Сходимость и расходимость — Признаки Коши 176
—— несобственные равномерно сходящиеся 177
Интегралы определенные 172
— Вычисление 182
— Дифференцирование по параметру 174
— Интегрирование по параметру 174
— Интегрирование по частям 173
— Переменные — Замена 173
— Связь с неопределенными 173
— Таблицы 178
Интегралы от биномиальных дифференциалов 161
—— от иррациональных функций — Таблицы 168
—— от нечетных функций 174
—— от рациональных функций — Таблицы 165
—— от трансцендентных функций — Таблицы 170
—— от четных функций 174
—— по комплексным переменным 196
—— по поверхности 187
—— расходящиеся 175
—— сходящиеся 174
—— тройные 185
—— эллиптические — Таблицы 59
Интегральное исчисление 154—193
— Приложение к геометрии и механике 189
Интегральные функции распределения вероятности 322
Интегральный косинус 164
Интегральный логарифм 164
Интегральный признак сходимости рядов 150
Интегральный синус 164
Интеграторы 343
Интеграфы 343
Интегрирование 155
— Метод Остроградского 159
— Применение 189—191
— Предел верхний 172
— Предел нижний 172
Интегрирование графическое 183, 211, 516
—— дифференциальных биномов 161
—— иррациональных функций 160
—— определенного интеграла по параметру 174
—— по частям определенного интеграла 173
—— рациональных функций 156
—— трансцендентных функций 161
—— численное 304
—— численное дифференциальных уравнений 212
Интерполирование 303
—— квадратическое — Поправки 36
Интерполяционная поправка — Вычисление 32
Интерполяционная формула Лагранжа 304
Интерполяционные формулы — Остаточные члены 304
Интерполяция линейная — Пропорциональные части 35
Иррациональные функции — Интегрирование 160
Иррациональные числа 63
Истирание деталей механизмов 438
Источники точечные 234
Исчисление дифференциальное 134—153
—— разностное 301—304
—— тензорное 234
Итераций метод 127

К

Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка 255
—— прямой 253
Карно — Остроградского теорема 403
Касательные 259; — Длина 260; — коэффициент угловой 260
—— к пространственной кривой 283
—— плоскости к поверхности 294; — Уравнения 295

Кассини овал 265
Качение окружности по окружности 272
—— плоскости по плоскости 271
—— прямой по окружности 272
Квадрат разности 74
—— скалярный вектора 228
—— суммы 74
Квадратическая погрешность средняя 305
Квадратическое интерполирование — Поправки 36
Квадратическое отклонение среднее 305
Квадратные меры — Перевод одних в другие 542
Квадратные уравнения 119
Квадратные функции 88
Квадраты наименьшие — Способ 330, 332
—— чисел 12
Килограммы — Перевод в английские фунты 542
Кинематика 369
—— вращательного движения — Формулы 376
—— кулачковых механизмов 515, 518
—— плоских механизмов 413
—— плоских шарнирных механизмов 456, 458
—— прямолинейного движения точки — Формулы 370
—— твердых тел 375
Кинематические пары — Классификация 407; — Структура 407
—— геометрически замкнутые 409
—— кулачкового типа 514
—— плоских механизмов — Давление — Определение 421
—— с промежуточными деформируемыми телами 412
—— с промежуточными телами качения 412
Кинематические схемы механизмов 413
Кинематический момент 389, 397
Кинетическая энергия — см. *Энергия кинетическая*
Кинетостатика плоских механизмов 418, 456
—— точки 387
Клеро уравнение 209
Клинья регулировочные направляющих 410
—— сферические 111
Колебания маятников — Уравнение дифференциальное 397
Колеса винтовые 496
—— гипоидные 496
—— маховые — Момент инерции — Определение 428
Количество движения 386, 388, 402
Коллинеарные векторы 226
Кольцевой сектор — Площадь 107
Кольцо круговое — Площадь 106
Компланарные векторы 227
Комплексные переменные — Интегралы 196
— Функции 194—205
Комплексные ряды 194, 195
Комплексные числа 84; — Действия 62
—— бесконечно малые 194
Конволютные винтовые поверхности 299
Конечные приращения — Формулы 141
—— для функции нескольких переменных — Формулы 145
Конечные разности простейших функций 301
Конечные ряды числовые 80, 82
Конические поверхности 298
Конические сечения 249
Коноиды 294
Контакт изношенных пар 441
Конус трения 357, 434
Конусы — Уравнения 256, 298
—— круглые 109
—— усеченные 110
—— усеченные эллиптические 111
Конформные отображения 201
Конхоиды 273—276
Координаты — Начало — Перенос 250; — Оси — Поворот 250; — Преобразование 239
—— вектора 228
—— косоугольные 238
—— обобщенные 368
—— полярные 239
—— прямоугольные (декартовы) 238, 249; — Преобразование 250
—— точки пересечения прямых 242
—— центра тяжести — Вычисление интегрированием 191
Копировальные устройства 470
Копры маятниковые 406
Копыта цилиндрические 109
Корни квадратные — Извлечение на арифмометре 341; — Извлечение на логарифмической линейке 337
—— квадратные чисел 12; — Извлечение сокращенное 69
—— кубические — Извлечение на логарифмической линейке 337
—— кубические чисел 12
—— трансцендентных уравнений действительные 122
—— чисел — Отделение 123; — Формулы 75
Коробки передач 499—501
—— планетарные 510
Корригирование эвольвентных зубьев 494
Косинус интегральный 164
Косинусы — Логарифмы 48, 49

— Таблицы 44, 45
— Теорема 102, 114
Косоугольные координаты 238
Косоугольные треугольники — Решения 113
Котангенсы — Логарифмы 50, 51
— Таблицы 46, 47
Коши признак сходимости рядов 149, 150
—— признак сходимости и расходимости несобственных интегралов 176
—— теорема 197, 210
—— формула 141
Коши — Адамара формула 195
Коэффициент Фурье обобщенный 305
—— биномиальный — Вычисление 74; — Нахождение 75, 80; — Таблицы 40
—— вариации 326
—— восстановления 402
—— изменчивости 326
—— мгновенного трения 402
—— неравномерности вращения звена приведения 427
—— перекрытия 493
—— полезного действия винтовой пары 490
—— полезного действия механизма — Определение 429
—— потерь в механизмах 429
—— трения 434; — Значения 436
—— трения для подвижных соединений 435
—— трения качения для катка на плоскости 437
—— трения скольжения 357; — Значения 437
—— угловой касательной 260
—— устойчивости на опрокидывание 369
—— эпициклоиды угловой 280
Кратные интегралы 184
Кривизна линии 266
—— поверхности 295
—— пространственной кривой 284
Криволинейные интегралы 186
Криволинейные шкалы 315
Кривошипно-коленные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-коленные*
Кривошипно-коромысловые шестизвенные механизмы — см. *Механизмы плоские шарнирные шестизвенные кривошипно-коромысловые*
Кривошипно-кулисные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-кулисные*
Кривошипно-рычажные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-рычажные*
Кривошипно-шатунные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-шатунные*
Кривые 258 — см. также по их названиям, например: *Дискриминантная кривая, Кусочногладкие кривые; Нецентральные кривые; Пространственные кривые; Центральные кривые; Циклоидальные кривые*
— Вершины 268
— Выпуклость 264
— Вычерчивание 265
— Исследование 265
— Натуральное уравнение 268
— Построение 262
— Развертка 269
— Соприкосновение 266
— Точки особые 262, 263
— Траектории 271
— Эволюта 269
Кривые веревочные 366
—— второго порядка 242, 247
—— плоские 258
Кристоффеля — Шварца функция 205
Критерий Сильвестра 369
Круги — Периметр 106
— Площадь 12, 106
— Сегменты — Таблицы 37
— Элементы — Таблицы 37
Круговое кольцо — Площадь 106
Круговой сегмент — Площадь 107
Круговой сектор — Площадь 107
Круговые функции 91; — Таблицы 52
Кручение пространственной кривой 284
Куб разности 74
—— суммы 74
Кубические меры — Перевод одних в другие 542
Кубические уравнения 119
Кубы 108
—— чисел 12
Кулачково-коромысловые механизмы — см. *Механизмы кулачково-коромысловые*
Кулачково-ползунные механизмы — см. *Механизмы кулачково-ползунные*
Кулачковые механизмы — см. *Механизмы кулачковые*
Кулона закон 357
Кусочногладкие кривые 138

Л

Лагранжа уравнение 209, 391
—— формула 141, 304
Лагранжа — Дирихле теорема 368
Лапласа оператор 234
—— уравнение 196, 225, 234
—— функция — График 324
Лапласовые преобразования — Таблица 219
Латинский алфавит 5
Лежандра функции 223
Лейбница признак сходимости рядов 150
Лемма Жордана 201

Лемнискаты — Точки узловые 263
Линейки логарифмические — Правила пользования 336
Линейная интерполяция — Пропорциональные части 35
Линейные меры — Перевод одних в другие 540
Линейные системы — Решение 115
Линейные уравнения — Система 117, 128
—— дифференциальные 215; — Система 217
Линейные функции 87
Линейчатые поверхности 298
Линии — Кривизна 266
— Образование при движении плоскости по плоскости 271
— Семейство 268
Линии винтовые 286, 289
—— геодезические на поверхности 296
—— кривые плоские 258
—— однородные — Центр тяжести 359
Липкина инверсоры 466
Липшица условие 210
Лобачевского метод приближенного решения алгебраических уравнений 129
Логарифм интегральный 164
Логарифмирование 78
Логарифмические линейки — Правила пользования 336
Логарифмические номограммы 317
Логарифмические спирали — см. *Спирали логарифмические*
Логарифмические уравнения 122
Логарифмические функции 91
Логарифмические шкалы 314
Логарифмический шаблон 314
Логарифмы 76
Логарифмы десятичные 77
—— постоянных величин — Таблицы 6
—— тригонометрических функций 48
—— факториалов — Таблицы 41
—— чисел 12
Логарифмы косинусов 48, 49
—— котангенсов 50, 51
—— натуральные 77
—— натуральные чисел — Таблица 42
—— синусов 48, 49
—— тангенсов 50, 51
—— факториалов — Таблицы 41
Лорана ряд 198
Лучевые номограммы 316
Лучи — Уравнения полярные 242
—— винтов 287
Ляпунова теорема 329, 368

М

Маклорена формула 142
Мальтийские механизмы — см. *Механизмы мальтийские*
Мантисса логарифма 77
Маркова теорема 329
Масса тела — Вычисление интегрированием 191
Массы вращающиеся — Уравновешивание 421
—— маховые — Расчет 427
—— уравновешивающие — Определение графическое 423
Математические маятники 385
Математические обозначения 1—61
Математические приборы 336—348
Математическое ожидание случайной величины 326
Матрица квадратная 115
Маховые колеса — Момент инерции — Определение 428
Машины вычислительные 343, 347, 348
Маятники математические 385
—— физические — Колебания — Уравнение дифференциальное 397
Маятниковые копры 406
Медиана 327
Международная метрическая система — см. *Метрическая система международная*
Мера градусная — Перевод в радианную 39
Меры — Перевод одних в другие 537
—— веса — Перевод в другие 542
—— веса английские 536
—— веса международные 533, 534
—— веса русские старые 535
—— длины английские 536
—— длины международные 533
—— длины русские старые 535
—— емкости английские 536
—— емкости международные 534
—— емкости русские старые 535
—— квадратные — Перевод одних в другие 542
—— кубические — Перевод одних в другие 542
—— линейные — Перевод одних в другие 540
—— массы английские 536
—— массы международные 534
—— массы русские старые 535
—— объема английские 536
—— объема международные 534
—— объема русские старые 535
—— поверхности английские 536
—— поверхности международные 534
—— поверхности русские старые 535
Метрическая система международная 533
Метры — Перевод в ярды 540
Механизмы — Детали — Износ 438
— Детали изнашивающиеся — Условия работы 440

— Динамика 424
— Классификация 407, 413
— К. п. д. 431
— Справочные данные 451—531
— Структура 407, 412
— Трение 433
Механизмы блокирующие 529—531
Механизмы винтовые с компенсацией ошибок по шагу ходового винта и его тепловых деформаций 492
—— с несколькими степенями свободы 492
—— с соосным расположением кинематических пар 488; — Перемещение скоростей и касательных ускорений — Построение плана 489
—— с соосным расположением пар — Ошибка положения 491
—— с соосным расположением пар двухзвенные 489
—— с соосным расположением пар трехзвенные 489; — Типы 490
Механизмы двухкулисные 481
—— двухползунные 482
Механизмы зубчатые 492
—— дифференциальные 503, 508
—— для преобразования равномерного вращательного движения — Схема 512
—— непереключаемые 498
—— неуправляемые 503; — Типы 504
—— переключаемые 498
—— планетарные 503
—— планетарные включения 508, 509
—— реверсивные — Типы 502
—— с неподвижными осями колес 497
—— с подвижными осями колес 502
—— управляемые 508
—— храповые 527
Механизмы инверсоров 466
—— кривошипно-коленные 487
—— кривошипно-коромысловые — Размеры — Определение 460
Механизмы кривошипно-кулисные — Ползуны — Скорость и ускорение — Изменение 483; — Характеристика 484
—— восьмизвенные 484
—— с вращающейся кулисой 480, 481
—— с качающейся кулисой 480
—— с поступательно движущейся кулисой 481
—— шатунные шестизвенные 484
—— шестизвенные 482
Механизмы кривошипно-рычажные 487
Механизмы кривошипно-шатунные 474; — Диаграмма 479; — Планы скоростей и ускорений 477; — Размеры — Определение 460
—— с прицепным шатуном 487
—— смещенные 477; — Анализ кинематический 479; — Характеристика 478
—— центральные 474; — Характеристика 477
Механизмы кулачково-коромысловые 520, 524
Механизмы кулачково-ползунные 520, 523
Механизмы кулачковые 513
— Анализ кинематический 515
— Диаграммы — Графическое дифференцирование и интегрирование 516
— Кинематика 515
— К. п. д. 520, 522
— Проектирование 522
— Профилирование 518
— Скорость и ускорение — Определение 520, 521
— Углы давления 520
— Углы передачи 520
Механизмы кулачковые плоские трехзвенные 517; — Кинематика 518
—— мальтийские 525; — Расчетные зависимости 526
—— пантографов 467, 469
—— планетарные реверсивные 509, 510
Механизмы плоские — Анализ кинематический 414
— Звенья — Силы инерции — Определение 418
— Исследование экспериментальное 414
— Кинематика 413
— Кинематические пары — Давление — Определение 421
— Кинетостатика 418
— Ошибки 445
— Перемещения — Измерение 416
— Преобразование 449
— Проектирование 447
— Силы приведенные — Определение 421
— Скорость — Измерение 418
— Ускорение — Измерение 418
Механизмы плоские кулачковые трехзвенные 517; — Кинематика 518
—— с вращательными и поступательными парами 470, 482
—— с поступательными парами — Уравнения векторные для построения планов скоростей и ускорений 472
Механизмы плоские шарнирные 453
— Кинематика 456
— Кинетостатика 456
— План скоростей — Построение 456
— Размеры — Определение 459
Механизмы плоские шарнирные антипараллелограммов 465

—— **двухкривошипные** — Передаточное отношение — Изменение 464; — Характеристика 464
—— **многозвенные** 465
—— **направляющие** 466
—— с остановами 466
Механизмы плоские шарнирные четырехзвенные 457
— Кинематика 458
— План скоростей 458
— Типы 462
Механизмы плоские шарнирные шестизвенные — План сил — Построение 457; — Планы скоростей и ускорений 455
—— кривошипно-коромысловые 465
Механизмы ползунно-коленные 487
—— ползунно-кулисные 481
—— реверсивные планетарные 509, 510
—— роликовые храповые 528
—— рычажные с качающимся цилиндром 488
—— с одними поступательными парами 451
—— трехзвенные 451
Механизмы храповые 527; — Размеры 529
—— зубчатые 527
—— колодочные 529
—— роликовые 528
—— с кулачками или эксцентриками 529
—— фрикционные 528
—— фрикционные пружинные 529
Механика — Приложение интегрального исчисления 189
—— теоретическая 352—406
Механические величины — Измерение 415
Механические единицы 382
Мещерского уравнение 386
Микрометры 489
Миллиметры — Перевод в дюймы 539
Миноры определителей 115
Мнимые эллипсоиды — Уравнения 255
Многозначные функции 99
Многоугольник сил 353
Многоугольники — Площадь 106
—— веревочные 364; — Применение 365
—— правильные 104; — Элементы — Таблица значений 105
—— силовые 364
Мода 327
Модуль десятичных логарифмов 77
—— зацепления 493
Момент гироскопический 399
—— **инерции** 392; — Определение интегрированием 191
—— **инерции маятника** — Определение 397
—— инерции механизма приведенный 426
—— инерции однородных тел 393
—— кинематический 389; — Уравнение 397
—— количества движения — Теорема 403
—— количества движения точки 386
—— трения — Значение 436
—— трения в зубчатых зацеплениях 437
—— трения в подшипниках 437
Моменты инерции единичные 419
—— пар 354
—— сил 354
Монжа обозначения производных функций многих переменных 144
Моногенные функции 196
Монотонные функции 137
Мощность 367
—— холостого хода механизмов 431
Муавра формула 86

Н

Наименьшие делители чисел 9
Направляющие для прямолинейного движения 409
—— кругового движения 410
Натуральные логарифмы чисел — Таблица 42
Неоднородные дифференциальные уравнения 216
Неопределенности — Раскрытие 142
Неопределенные интегралы 154, 165, 173
Непрерывные дроби 71, 73
Непрерывные функции 136
Несобственные интегралы 174, 176, 177
Неубывающие функции 137
Неуправляемые зубчатые механизмы — см *Механизмы зубчатые неуправляемые*
Нецентральные кривые 247
Неявные функции — Дифференцирование 146
Никомеда конхоида 273
Ножки зубьев эвольвентных зацеплений 493
Номограммы для определения скоростей и ускорений в кулачковых механизмах 521
—— z (зет) 319
—— из выравненных точек 318
—— логарифмические 317
—— лучевые 316
—— на параллельных шкалах 319
—— нулевого жанра 318
—— паспорта токарных станков 317, 319

—— с четырьмя переменными — Построение 319
—— сетчатые 315, 316
—— скорости резания 316, 317, 319
Номографический порядок уравнения 318
Номография 314—320
Нормали 259; — Длина 260, 267
—— к поверхности 294; — Уравнения 295
—— пространственной кривой 283
—— эвольвенты окружности — Длина 278
Ньютона бином 74—76
—— закон 1-й 383
—— закон 2-й 383, 386
—— закон 3-й 383
—— формулы 303, 304
Ньютона — Лейбница формула 173

О

Обобщенные координаты 368
Обобщенные силы 368
Обозначения математические 1
—— Монжа производных функций многих переменных 144
—— условные 1
Обратные величины чисел 12
Обратные функции 91, 99, 101, 196
Объем генеральной совокупности 328
—— однородный — Центр тяжести 359
—— тела — вычисление 108; — Вычисление интегрированием 190
—— тела вращения 111
Обыкновенные уравнения дифференциальные 1-го порядка 206
Овал Кассини 265
Огибающая 268
Огива 326
Ограниченные величины 134
Однозначные функции — Особые точки 199
Однополостные гиперболоиды 257
Однородные уравнения дифференциальные 207
Ожидание математическое случайной величины 326
Округление приближенных чисел 65
Окружности — Деление на n частей 105
— Длина 12
— Дуги — Длины в градусах — Перевод в радианы 39
— — Спрямление 281
— Качение по окружности 272
— Качение по прямой 272
— Уравнения 240, 242, 243
— Числовые зависимости 104
— Эвольвента 270, 272, 276—278
Окружности делительные 493
Окружность соприкасающаяся 266
—— трения 435
Оператор Лапласа 234
—— набла 231
Операционные исчисления 218
Определители 115
— Вычисление 116
— Свойства 116
Определенные интегралы — см. *Интегралы определенные*
Опрокидывание — Устойчивость 369
Ординаты 238, 249
—— веревочных многоугольников 365
Орт бинормали 284
—— нормали пространственной кривой 284
Ортогональная траектория 271
Орты 250
—— главных нормалей — Производные 292
Оси координат — Поворот 250
Особые точки 199, 262, 263
Остаточные погрешности 331
Остроградского метод интегрирования 159
—— теорема 233
—— уравнение 403
—— формула 188
Остроградского — Гамильтона принцип 392
Отделение корней 123
Отклонение случайной величины 327
—— среднее квадратическое 305
Относительная погрешность предельная 65
Отображения конформные 201
Отрезки — Деление в данном отношении 238
—— полярные 260
Отрицательные числа — Действия 63
Оценка частости 330
Ошибка средняя квадратическая средневзвешенного 332
Ошибки — Измерение 331, 332
—— вероятные 331
—— кажущиеся 331
—— пантографа — Определение 469
—— плоских механизмов 445
—— положения винтовых механизмов 491

П

Пантографы 467; — Ошибки — Определение 469
—— параллелограммные 468
Паппа — Гульдена теорема 364
Параболические сегменты — Площадь 107

Параболические точки поверхности 295
Параболические цилиндры — Уравнения 256
Параболоиды — Уравнения 256, 257
—— вращения 111
—— гиперболические 256, 257
Параболы — Построение 246, 249
— Уравнения параметрические 247
— Элементы 246—249
Параллелепипед сил 353
Параллелепипеды прямоугольные 108
Параллелограмм сил 353
Параллелограммные пантографы 468
Параллелограммы — Площадь 106
Параллельность прямых — Условия 242
Параметризация 259
Параметрические уравнения — см. *Уравнения параметрические*
Пары винтовые — К. п. д. 490
—— зубчатые 495, 511, 513
—— качательного движения 411
—— кинематические — см. *Кинематические пары*
—— сил 355
—— шаровые 411
Паскаля треугольник 75
Передачи зубчатые — см. *Зубчатые передачи*
—— реечные — см. *Реечные передачи*
—— червячные — см. *Червячные передачи*
Переменные комплексные — см. *Комплексные переменные*
Перемещение силы параллельное 356
Перемещения возможные — Принцип 368
Пересечение трех прямых — Условия 242
Перестановки 79, 115
Периметры плоских фигур — Вычисление 106 — см. также названия фигур с подрубрикой — Периметр, например: *Круги* — Периметр
Период синусоидальной функции 98
—— функции 92
Периодические дроби 62, 64
Периодические функции 91
Перициклоиды 281
Перпендикулярность прямых — Условия 242
π («пи») — Значение 63
— Таблицы величин, связанных с π 6
Пирамиды 108
Пифагора теорема 103
Планетарные вариаторы — см. *Вариаторы планетарные*
Планетарные зубчатые механизмы — см. *Механизмы зубчатые планетарные*
Планетарные коробки передач — см. *Коробки передач планетарные*
Планетарные редукторы — см. *Редукторы планетарные*
Планиметры 342
Планки регулировочные направляющих 410
Плоские механизмы — см. *Механизмы плоские*
Плоские кривые 258
Плоскости — Движение по плоскости — Образование линий 271; — Уравнения 251
—— нормальные к пространственной кривой 283
—— параллельные — Уравнения 256
—— пересекающиеся — Уравнения 256
—— соприкасающиеся 284
—— спрямляющие 284
Плотность вероятности 322
Площади фигур 106, 189, 190 — см. также под названием фигур с подрубрикой — Площадь, например: *Круги* — Площадь; *Параболические сегменты* — Площадь; *Параллелограммы* — Площадь; *Ромбы* — Площадь; *Треугольники* — Площадь
Пневматические прессы с качающимся цилиндром 488
Поверхности — Кривизна 295
— Линейный элемент 294
— Образование линиями 297
— Сечение 296
— Теория 293
— Точки — Классификация 296
— Уравнения 293
Поверхности винтовые 298, 299
—— вращения 298
—— второго порядка — Вид — Определение 255; — Теория 255; — Уравнения канонические 255
—— конические 298
—— кривые — Площадь — Вычисление интегрированием 190
—— линейчатые 298
—— однородные — Центр тяжести 359
—— развертывающиеся 297
—— тел — Вычисление 108
—— тел вращения 111; — Площадь — Вычисление интегрированием 190
—— уровня 231
—— центральные — Уравнение — Преобразование 256
—— цилиндрические 298
—— эвольвентные винтовые 299
Погрешности остаточные 331
—— приближенных чисел 65
Погрешность предельная абсолютная 65
—— предельная относительная 65
—— средняя квадратическая 305
Подкасательные 260
Поднормали 260

Подстановки Эйлера 160
Подходящие дроби — Вычисление 72
Подшипники — Момент трения 437
Показательные уравнения 121
Показательные функции 91, 195, 302; — Таблицы 52
Поле векторное 231—234
—— направлений 211
—— скалярное 230
—— соленоидальное 234
Ползунно-коленные механизмы — см. *Механизмы ползунно-коленные*
Ползунно-кулисные механизмы — см. *Механизмы ползунно-кулисные*
Ползуны кривошипно-кулисных механизмов — Скорость и ускорение — Изменение 483
Полигоны распределения 325
Полиномы Чебышева 224
Полные дифференциалы 144, 145
Полодии 271
Положительные числа — Действия 63
Полюс однозначной функции 199
Полярные координаты 239
Полярные отрезки 260
Понтоны — Объем 109
Поправки для квадратического интерполирования 36
—— интерполяционные — Вычисление 32
Последовательность числовая — Предел 134
Постоянная Эйлера C 135
Постоянные величины — Таблицы 6
Потенциалы векторные 234
Потенциальная энергия 367
Потенцирование 78
Потери в механизмах 429
Поток векторного поля 232
Правила Гюльдена 111
Правило Жуковского-Грюэ 399
Предел функции 134
—— числовой последовательности 134
Предельная теорема 328
Предельные погрешности 65
Пределы — Теоремы 135
—— важнейшие 135
—— определенного интеграла 172
—— последовательности — Признаки существования 135
Преобразование координат 239, 250
Преобразование уравнения параболоида к каноническому виду 257
—— параболы 248
—— центральной поверхности к каноническому виду 256
—— центральных линий к каноническому виду 248
Преобразования лапласовы — Таблица 219
Прессы пневматические с качающимся цилиндром 488
Прецессия регулярная 399
Приближенные вычисления без точного учета погрешностей 67
Приближенные числа — Округление 65 — Погрешности 65
Приборы математические 336—348
Призматоиды 108
Призмы 108
—— усеченные 108
Признак Вейерштрасса 177
—— Даламбера 150
—— Ермакова 150
—— Коши 149, 150, 176
—— Лейбница 150
—— сходимости рядов 149, 150
—— тензорный системы величин a_{ij} 236
Принцип Даламбера 387, 391
—— Остроградского — Гамильтона 392
—— Римана — Шварца 205
—— возможных перемещений 368
—— возможных перемещений для удара 403
Приращения конечные — Формулы 141
—— для функции нескольких переменных — Формула 145
Прогрессия арифметическая 80
—— геометрическая 80, 81
Проективные шкалы 314
Проектирование кулачковых механизмов 522
—— плоских механизмов 447
Проекции 104
—— векторные 227
Произведение векторов 228, 229
Производные сложных функций 138, 145
—— функций 137
Пропорции 82
Пропорциональные части для линейной интерполяции 35
Простейшие функции 301
Пространственные кривые 282
— Дуги — Длина 283
— Кривизна 284
— Кручение 284
— Нормали 283
— Расположение вблизи данной точки 292
— Уравнения 285
— Формулы 285, 288
Простые дроби 62
— Обращение в десятичные 64
Профилирование кулачковых механизмов 518
Проценты 84
Прямая — Качение по окружности 272
— Пересечение с плоскостью 253
— Уравнения 240—242, 252, 253

Прямоугольные координаты — см. *Координаты прямоугольные*
Прямоугольные параллелепипеды 108
Прямоугольные треугольники — Решения 112
Прямые — Точки пересечения — Координаты 242
— Условия параллельности 242
— Условия перпендикулярности 242
Птоломея теорема 104
Пуассона теорема 329
—— уравнение 225
Пучок прямых — Уравнения 242

Р

Работа 366; — Вычисление графическое 367
—— на конечном пути 367
—— силы тяжести 367
Равнобочные гиперболы 246
Равновесие — Устойчивость 368
—— пар 356
—— сил, приложенных к твердому телу 353
—— систем сочлененных 356
—— системы с трением 357
—— трех непараллельных сил в плоскости 354
Равномерные шкалы 314
Радиус кривизны 266
—— гиперболы 245
—— логарифмической спирали 267, 276
—— параболы 246
—— поверхности 296
—— пространственной кривой 284
—— спирали Архимеда 275
—— циклоиды 267
Радиус-вектор точки 228
Радиусы кручения 284
Развертка кривой 269
Развертывающиеся поверхности 297
Разложение сил 353, 354
—— силы инерции 387
Разложение функций — Случаи специальные 307
—— в бесконечные ряды 151
—— в ряды по бесселевым функциям 311
—— в ряды по полиномам Чебышева 311
—— в ряды степенные 152
—— в ряды Фурье 308
Размерности — Правило 382
Размещения 79
Разности конечные простейших функций 301
Разностное исчисление 301—304
Разность квадратов 74
—— кубов 74
—— тензоров 235
Распределение — Гистограмма 325
— Полигон 325
— Широта 326
Распределение Стьюдента 328; — Таблица функции $S(z)$ 334
—— вероятности — Дифференциальная функция 322
—— скоростей 378, 380
—— случайных величин нормальное — График интегральной функции 324
—— статистическое 325
—— ускорений 379, 380
Расстояние между точками 238
—— от точки до прямой 241
Расходящиеся интегралы 175
Рациональные функции 87, 90, 156
Реакции опорные — Определение — Применение веревочного многоугольника 365
Ребро возврата 297
Реверсивные зубчатые механизмы — см. *Механизмы зубчатые реверсивные*
Регулировочные клинья направляющих 410
Регулировочные планки направляющих 410
Редукторы Гоммеля 508
—— Гуляева 507
—— планетарные 504; — К. п. д. — Формулы 505; — Передаточные отношения — Формулы 505, 506
Реечные передачи 497
Резольвенты 120
Ренкина способ спрямления дуги окружности 282
Решение треугольников 102, 112—114
—— уравнений 115—133
Рикката уравнение 208
Римана-Шварца принцип симметрии 205
Робертса — Чебышева теорема 461
Ролля теорема 141
Ромбы — Площадь 106
Ротор вектора 233
Рулетты 271
— Уравнение 272
Рунге схема вычисления коэффициентов 313
Рунге — Кутта метод решения дифференциальных уравнений 212
Рычажные механизмы с качающимся цилиндром — см. *Механизмы рычажные с качающимся цилиндром*
Ряд Лорана 198
—— Тэйлора 197, 198
Ряды — Применение в решении дифференциальных уравнений 211
—— арифметические 80, 81
—— биномиальные 152

— гармонические 149
— двойные 312
— для сравнения 149
— комплексные 194, 195
— конечные числовые 80, 82
— функциональные 151
— Фурье обобщенные 305
— Фурье тригонометрические 306
— числовые — Признаки сходимости 149, 150; — Сходимость 149

C

C постоянная Эйлера 135
Самоприкосновения точки 263
Свертывание тензоров 236
Связи 352
Сегменты кругов — Площадь — Таблицы 37
— круговые — Площадь 107
— параболические — Площадь 107
— шаровые 110
Секторы кольцевые — Площадь 107
— круговые — Площадь 107
— шаровые 110
— эллиптические — Площадь 107
Семейство кривых — Дискриминантная линия 269; — Огибающая 269
— линий 268
— окружностей — Огибающая 269; — Уравнение 269
— поверхностей огибающее 297
Сетки функциональные 315
Сетчатые номограммы 315, 316
Сечение поверхности 296
Сечения конические 249
Сила инерции — Разложение 387
— трения 357
— тяжести 367
Силовой многоугольник 364
Силовой план 364
Силовые линии векторного поля 231
Силы — Перемещение параллельное 356
— Разложение 353, 354
— Сложение 353, 364
— Уравновешивание 366
Силы инерции звеньев плоских механизмов — Определение 418
— непараллельные — Равновесие в плоскости 354
— обобщенные 368
— параллельные — Сложение 354
— приведенные плоских механизмов — Определение 421
— приложенные к твердому телу — Условия равновесия 358
— уравновешивающие плоских механизмов — Определение 421
Сильвестра критерий 369
Симметрирование тензора 236
Симпсона формула 182
Синтез гармонический 313
— механизмов 459, 460
Синус интегральный 164
Синусоидальные величины 97, 98
Синусоидальные функции — Период 98
Синусы — Логарифмы 48, 49
— Таблицы 44, 45
— Теорема 102, 114
Система координат сферическая 251
— координат цилиндрическая 251
— линейная однородная с постоянными коэффициентами 217
— мер американская — Перевод в метрическую 536
— мер английская 536
— мер метрическая международная 533
— мер старая русская 535
— *n* дифференциальных уравнений 1-го порядка 214
— сил — Приведение к заданному центру 356
— сил произвольная 356
Системы — Динамика 388
— дифференциальных уравнений 213
— дифференциальных уравнений линейных 217
— единиц 383
— линейных уравнений 117; — Решение приближенное 128
— сил с трением 357
Скалярное поле 230
Скалярный квадрат вектора 228
Скаляры 226
Скалярные функции — Градиенты 231
Скорость 370, 373, 376, 377; — Распределение 378, 380; — Сложение 375
— звена приведения 427
— механизмов — Определение 425
— плоских механизмов — Измерение 418
— резания — Номограммы логарифмические 316, 317, 319
Сложение векторов 227, 228
— вероятностей — Теорема 321
— двух параллельных сил 354
— на арифмометре 340
— на вычислительных машинах 344, 347
— пар 355
— сил 353, 364
— скоростей 375
— ускорений 375
Сложные функции — см. *Функции сложные*
Слой шаровой 110
Случайные величины — см. *Величины случайные*

Случайные события — см. *События случайные*
Смешанные дроби 62
Смятие 439
События случайные 321
Совокупность генеральная 328
Соединения (мат) 79
—— подвижные — Коэффициент трения 435
—— скользящие подвижные 409
Соприкасающиеся окружности 266
Соприкосновение кривых 266
Сопряженные гиперболы 245
Сочетания 79
Специальные функции 221
Спирали Архимеда 274
— Поднормали 275
— Построение 274
— Применение в технике 275
— Радиус кривизны 275
Спирали гиперболические 262, 276
—— логарифмические 275; — Радиус кривизны 267, 276; — Эволюта 270, 276
Спрямление дуги окружности 281
Среднее значение — Теорема 184
Среднее квадратическое отклонение 305
Средняя квадратическая погрешность 305
Старая русская система мер 535
Статика 352
—— аналитическая 366
—— геометрическая 352
Статистическая вероятность 324
Статистическое распределение 325
Степени чисел — Формулы 74
Степенные функции 89
Степень перекрытия 493
Стильтьеса интеграл — Вычисление 192
Стирлинга формула 136, 303, 304
Стокса теорема 233
—— формула 189
Стьюдента распределение 328
— Таблицы функции $S(z)$ 334
Сумма кубов 74
Суммирование тензоров 235
Сферическая система координат 251
Сферические клинья — Поверхность 111
— Объем 111
Сферические треугольники 114
Схема Рунге вычисления коэффициентов 313
Сходимость рядов числовых 149, 150
Сходящиеся интегралы 174

Т

Тангенсы — Логарифмы 50, 51
— Таблицы 46, 47
— Теорема 102
Тела 190; — Масса — Вычисление интегрированием 191
—— вращения 11
—— вращающиеся — Давление на опоры 397; — Точка — Скорости и ускорения 377
—— вращающиеся твердые — Действие удара 405
—— однородные — Момент инерции 393; — Центры тяжести 359
—— переменной массы — Динамика 399
—— твердые — Вращение 396; — Движение 379, 381, 398, 401; — Динамика 396; — Кинематика 375
—— твердые вращающиеся — Действие удара 405
—— цилиндрические — Моменты инерции единичные 419
Телеграфное уравнение 225
Телесные углы 104
Тензорное исчисление 234
Тензорный признак системы величин a_{ij} 236
Тензоры 234—236
Теорема Аполлония 243
—— Бернулли 329
—— Дирихле 306
—— Жуковского 421
—— Карно — Остроградского 403
—— Коши 197, 210
—— Лагранжа — Дирихле 368
—— Ляпунова 329, 368
—— Маркова 329
—— Остроградского 233
—— Паппа — Гульдена 364
—— Пифагора 103
—— Птоломея 104
—— Пуассона 329
—— Робертса — Чебышева 461
—— Ролля 141
—— Стокса 233
—— Чебышева 328
—— Штурма 123
—— Эйлера 389
—— импульсов 389
—— кинетической энергии 387, 390, 401
—— количества движения 386, 402
—— количества движения системы 388
—— количества движения тел переменной массы 399
—— косинусов 102, 114
—— моментов количества движения 386, 389, 400, 403
—— о вычетах 200
—— о движении центра инерции 400, 403
—— о кинематическом моменте 390
—— о пределах 135
—— о среднем 184
—— о среднем значении интеграла 173

—— потери кинетической энергии 403
—— предельная 328
—— синусов 102, 114
—— сложения вероятностей 321
—— тангенсов 102
—— умножения вероятностей 322
Теоремы динамики системы 388
—— динамики системы в применении к удару 402
—— динамики точки 386
—— дифференциального исчисления 141
Теоретическая механика 352—406
Теория вероятностей 321—335
—— кривых 2-го порядка 247
—— механизмов и машин 407—450
—— ошибок 330
—— поверхностей 293
—— поверхностей 2-го порядка 255
—— пределов — Основные понятия 134
—— точности механизмов 444
Тетраэдры — Объем 110
Точечные источники 234
Точка — Движение — Графики 371
— Движение криволинейное 372, 374, 384
— Движение относительное 374, 388
— Движение прямолинейное 369, 370, 384
— Динамика 383
— Закон движения 369
— Радиус и вектор 228
Точка возврата 262
—— прекращения кривой 264
—— разрыва 136
—— самоприкосновения кривой 263
Точки — Удар о поверхность 402
—— гиперболы — Построение 245
—— кривой изолированные 263
—— лемнискаты узловые 263
—— особые 262, 263
—— особые однозначных функций 199
—— перегиба кривых 264
—— переменной массы — Движение 385
—— пересечения прямых — Координаты 242
—— поверхности — Классификация 296
—— равноотстоящие узловые — Интерполяционные формулы 303
—— трехкратные 263
—— угловые кривой 264
—— узловые 263
Точность механизмов — Теория 444
Тор 111
— Поверхность — Вычисление 364
Траектория 372, 375
—— изогональная 271
—— кривых 271
—— ортогональная 271
Трансцендентные уравнения 121
— Действительные корни 122
Трансцендентные функции — см. *Функции трансцендентные*
Трапеции — Площадь 106
— Формула 182
Трение в механизмах 433
—— верчения 433
—— жидкостное 435
—— качение 357, 433
—— скольжения 357, 433, 434
Треугольник Паскаля 75
Треугольники — Площадь 106
— Решения 102, 112—114
— Углы — Тригонометрические функции 112
Треугольники косоугольные — Решения 113
—— прямоугольные — Решения 112
—— сферические — Площадь 114; — Решения 114
Трехгранники сопровождающие 284
Трехзвенные механизмы — см. *Механизмы трехзвенные*
Трехкратные точки кривой 263
Тригонометрические ряды Фурье 306
Тригонометрические уравнения 122
Тригонометрические функции — см. *Функции тригонометрические*
Тригонометрия плоская — Формулы 94
Тройные интегралы 185
Труба 109
Тэйлора ряд 197, 198; — Применение в решении дифференциальных уравнений 211
—— формула 141, 145

У

Угловой коэффициент — см. *Коэффициент угловой*
Угловые точки кривой 264
Углы — Деление — Применение спирали Архимеда 275
—— Эйлера 250
—— касательной с осями координат 261
—— нормали с осями координат 261
—— треугольника — Тригонометрические функции — Зависимости 112
Угол давления 277, 520
—— между двумя прямыми 241
—— между плоскостями и прямыми 254
—— передачи 520
—— телесный 104
—— трения 357
Уголки равнобокие — Центр тяжести — Вычисление 364
Удар 402

— Действие на вращающееся твердое тело 405
— Центр 406
Удар двух тел 403
— Уравнения 404
Умножение вероятностей — Теорема 322
—— на арифмометре 340
—— на вычислительной машине 345, 347
—— на логарифмической линейке 338
—— сокращенное 67
—— тензоров 236
Управляемые зубчатые механизмы — см. *Механизмы зубчатые управляемые*
Уравнение Бернулли 208
—— Бесселя 221
—— Клера 209
—— Лагранжа 209, 391
—— Лапласа 196, 225, 234
—— Мещерского 386
—— Остроградского 403
—— Пуассона 225
—— Риккати 208
—— Эйлера 216, 398
—— телеграфное 225
Уравнения — Геометрическое значение 239
— Номографический порядок 318
— Решения 115—133
Уравнения алгебраические 118; — Решение приближенное по методу Лобачевского 129
—— биквадратные 121
—— векторные для построения планов скоростей и ускорений механизмов 472
—— возвратные 3-й степени 120
—— возвратные 4-й степени 121
—— волновые 225
—— геометрических мест 240
—— гиперболические 122
—— движения твердых тел 398
—— движения твердых тел около неподвижной точки 401
—— дифференциальные — см. *Дифференциальные уравнения*
—— квадратные 119
—— кинематического момента 397
—— кинетической энергии 397
—— колебаний маятника 397
—— кубические 119
—— линейные — Система 117, 128
—— линейные нормальные 332
—— линейные условные 332
—— логарифмические 122
—— математической физики 225
—— параболоида 256, 257
Уравнения параметрические гиперболы 246
—— окружности 243
—— параболы 247
—— прямой 241, 252
—— циклоиды 262
—— эллипса 244
Уравнения поверхности 293
—— показательные 121
—— полярные 242
—— пространственных кривых 285
—— прямой 240—242, 252, 253
—— распространения тепла 225
—— семейства окружностей 269
—— теории потенциала 225
—— трансцендентные 121; — Действительные корни 122
—— тригонометрические 122
—— удара двух тел 404
—— функциональных шкал 314
—— центроиды 282
—— четвертой степени 120
—— эпициклоиды 272
Уравновешивание вращающихся масс 421
—— сил 366
Ускорение 370, 373, 375—377; — Распределение 379, 380; — Сложение 375
—— звена приведения угловое 427
—— механизмов — Определение 425
—— механизмов плоских — Измерение 418
—— силы тяжести — Таблицы величин 8
Условие Липшица 210
Условные обозначения 1
Усталостное выкрашивание 439
Установки для измерения механических величин 415
Устойчивость движения 392
—— на опрокидывание 369
—— равновесия 368

Ф

Фазы синусоидальных величин 98
Факториалы целых чисел — Таблицы 41
—— чисел — Логарифмы — Таблицы 41
Факториальные функции 302
Фигуры — Элементы — Вычисление 102—114
—— однородные — Центр тяжести 360
—— плоские — Периметры — Вычисление 106; — Площадь — Вычисление 106, 189
Физические маятники — Колебания — Уравнение дифференциальное 397
Формула Бесселя 303
—— Валлиса 136

— Гаусса 183
— Коши 141
— Коши — Адамара 195
— Лагранжа 141, 304
— Маклорена 142
— Муавра 86
— Ньютона 303, 304
— Ньютона — Лейбница 173
— Симпсона 182
— Стирлинга 136, 303, 304
— Стокса 189
— Тэйлора 141, 145
— Френе 292
— Чебышева 183
— Эйлера 103
— дифференцирования 139
— интерполяционная — Остаточные члены 304
— конечных приращений 141
— конечных приращений для функции нескольких переменных 145
— приведения 92, 163
— трапеций 182
Френе формула 292
Фрикционные храповые механизмы — см. *Механизмы храповые фрикционные*
Функции — Графики 88—91, 94, 97—99, 101
— Дифференциалы 138
— Предел 134
— Приближенное аналитическое выражение 305—313
— Производные 137
— Разложение 307
— Разложение в бесконечные ряды 151
— Разложение в ряд Фурье 308
— Разложение в ряды по полиномам Чебышева 311
— Разложение в степенные ряды 152
— Экстремальные значения — Определение 147
Функции Бесселевы 58, 222, 223, 311
— Лежандра 223
— алгебраические 90
— аналитические — Вычеты 200; — Разложение в степенные ряды 197
— бесконечно большие 135
— бесконечно малые 135
— векторные 230
— гармонические 234
— гиперболические 100; — Графики 101; — Таблицы 52
— гиперболические комплексных переменных 196
— гиперболические обратные 101
— голоморфные 198
— двух переменных — Формула Тэйлора 145
— дифференциальные распределения вероятности 322
— дробнолинейные 90
— заданные параметрически — Дифференцирование 139
— интегральные распределения вероятности 322
— иррациональные — Интегрирование 160
— квадратные 88
— комплексного переменного 194—205
— кратного аргумента 95
— круговые 91; — Таблицы 52
— линейные 87
— логарифмические 91
— многих переменных — Дифференцирование 143
— многозначные 196
— монотонные 137
— непрерывные 136
— неубывающие 137
— неявные — Дифференцирование 146
— обратные 91, 99, 101, 196
— ограниченные сверху (или снизу) 134
— однозначные — Точки особые 199
— периодические 91
— показательные 91, 195, 302; — Таблицы 52
— половины аргумента 95
— простейшие — Конечные разности 301
— распределения 193
— распределения вероятности дифференциальные 322
— рациональные 87, 90; — Интегрирование 156
— синусоидальные — Период 98
— скалярные — Градиенты 231
Функции сложные — Дифференциал полный 145
— Дифференциалы 139
— Дифференцирование — Цепное правило 139
— Производные 138
— Производные частные 145
Функции специальные 221
— степенные 89
— трансцендентные 90; — Интегрирование 161
Функции тригонометрические 91, 302
— Выражение через другие 95
— Значения — Таблицы 44
— Значения для некоторых аргументов 93
— Изменения по знаку и величине по четвертям круга 93
— Логарифмы десятичные 48
Функции тригонометрические дополнительных углов — Зависимости 92
— комплексных переменных 195

— кратного аргумента 95
— обратные 99
— одного аргумента — Соотношения 94
— половины аргумента 95
— произведений углов — Преобразование в суммы 96
— суммы и разности углов 94
— суммы углов — Преобразование в произведения 96
— углов треугольника — Зависимости 112
Функции факториальные 302
— целые рациональные 87
— эвольвентные 277; — График 278
— элементарные 87—114
Функциональные ряды 151
Функциональные сетки 315
Функциональные шкалы — Уравнения 314
Функция Жуковского 205
— Кристоффеля — Шварца 205
— Лапласа — График 324
— $\Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ — Значения 60
— $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — Значения 61
— эвольвентная $\varphi = \text{inv}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha - \alpha$ — Значения 57
Фунты английские — Перевод в килограммы 542
Фурье интеграл 308
— коэффициент обобщенный 305
— ряд обобщенный 305
— ряд тригонометрический 306
Футы — Перевод в метры 539
— Перевод в ярды 540

Х

Характеристика логарифма 77
Характеристики вероятностные 326
Хорды — Длины — Таблицы 37
Храповые механизмы — см. *Механизмы храповые*

Ц

Цевочные зацепления — см. *Зацепления цевочные*
Целые функции рациональные 87
Центр группирования 323
— геодезической кривизны поверхности 296
— инерции — Движение — Теорема 400, 403
— кривизны 266
— линии 2-го порядка 247
— параллельных сил 359
— тяжести 359; — Координаты — Определение интегрированием 191
— тяжести объемов 359
— тяжести плоской фигуры — Определение — Применение веревочного многоугольника 365
— тяжести фигур 360
— удара для двух тел 406
Центральные кривые 247
— Уравнения — Преобразование 248
Центроиды 271
— Уравнения 272
Цепные дроби — см. *Дроби непрерывные*
Циклоидальные зацепления — см. *Зацепления циклоидальные*
Циклоидальные кривые 272, 278
Циклоиды 278, 279
— Радиус кривизны 267
— Уравнения параметрические 262
— Эволюта 270
Циклоиды-рулетты 278
Цилиндрическая система координат 251
Цилиндрические копыта 109
Цилиндрические поверхности 298
Цилиндры — Объем 109
— Поверхность 109
— Уравнения 256
Циркуляция вектора 233

Ч

Чаплыгина метод решения дифференциальных уравнений 212
Части пропорциональные для линейной интерполяции 35
Частость — Оценка 330
Частота 325
— колебаний 98
Чебышева полиномы 224
— способ спрямления дуги окружности 281
— теорема 328
— формула 183
Червяк-зубчатая рейка 497
Червяк-червячная рейка 497
Червячные передачи 497
— глобоидные 497
Четырехзвенные шарнирные механизмы — см. *Механизмы плоские шарнирные четырехзвенные*
Четырехугольники 103
— Площадь 106
— Свойства 104

Числа вещественные — Действия 62
—— иррациональные 63
—— комплексные 62, 84, 194
—— отрицательные — Действия 63
—— положительные — Действия 63
—— приближенные 65
—— целые — Факториалы — Таблицы 41
Численное интегрирование дифференциальных уравнений 212

Ш

Шаблон логарифмический 314
Шаг винта 286
—— зацепления 493
Шаровой слой 110
Шаровые пары 411
Шаровые сегменты 110
Шаровые секторы 110
Шары 110
Шатунные кривые 461
Шестизвенные кривошипно-кулисные механизмы — см. *Механизмы кривошипно-кулисные шестизвенные*
Широта распределения 326
Шкалы криволинейные 315
—— логарифмические 314
—— проективные 314
—— равномерные 314
—— функциональные — Уравнения 314
Шкивы планетарные реверсивные 509
Штурма теорема 123

Э

Эвольвента 270
—— окружности 270, 272, 276, 278; — Построение 277
Эвольвентные винтовые поверхности 293
Эвольвентные зацепления 493
Эвольвентные функции — см. *Функции эвольвентные*
Эволюта гипоциклоиды 281
—— кривой 269
—— логарифмической спирали 270, 276
—— циклоиды 270
Эйлера интегралы 178
—— подстановки 160
—— постоянная C 135
—— способ решения дифференциальных уравнений 211
—— теорема 389
—— углы 250
—— уравнение 216, 398
—— формула 103
Эквидистантные эвольвенты окружности 278
Экстремум 147, 148
Эксцентриситеты эллипсов 243
Электрические датчики 416
Элементарные функции 87—114
Эллипсоиды 111, 255
Эллипсы 107, 243, 244
Эллиптические интегралы — Таблицы 59
Эллиптические конусы усеченные — Объем 111
Эллиптические параболоиды — Уравнения 256
Эллиптические секторы — Площадь 107
Эллиптические точки поверхности 296
Эллиптические цилиндры — Уравнения 256
Энергетические единицы — Перевод одних в другие 544
Энергия кинетическая 387
— Потеря — Теорема 403
— Теорема 387, 401
— Уравнения 397
Энергия кинетическая систем — Теорема 390
—— потенциальная 367
Эпициклоиды 279
— Коэффициент угловой 280
— Построение 280
Эпициклоиды-рулетты 279
Эффект гироскопический 399

Я

Ярды — Перевод в метры 540

Технический редактор *Т. Ф. Соколова* Корректор *О. И. Семенова*

Переплет художника *А. Л. Бельского*

Подписано к печати 17/XI-1955 г. Т-08362. Тираж 50 001—85 000 экз. (3-й завод)
Печ. л. 36. Уч.-изд. лист. 55,5. Бум. л. 18. Формат 60×92¹/₁₆. Заказ 1977.

Отпечатано с матриц 1-й типографии Машгиза, Ленинград, ул. Моисеенко, 10
в типографии № 1 Госстройиздата, г. Владимир